43
P. N. - 2
641502
Smithsonian
2

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCLXXXIV.

1887

SERIE QUARTA

MEMORIE

DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

VOLUME IV.

LYNCÆI

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI
1887

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCLXXXIV.

1887

SERIE QUARTA

MEMORIE

DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

VOLUME IV.

LYNCÆI

302264
AUG 17 1936

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI
1887

RELAZIONE

letta dal Socio Dini, relatore, a nome anche del Socio Beltrami, nella seduta del 9 gennaio 1887, sopra la Memoria del prof. Ernesto Padova, intitolata: *Sulle espressioni invariabili.*

« È noto che i parametri differenziali di una funzione possono essere costruiti come invarianti assoluti comuni ad una forma quadratica, e ad altre con ugual numero di variabili, ma in tal guisa non si possono avere in generale, altro che se la seconda forma è anch' essa quadratica. Il prof. Padova ha cercato di ottenerli per altra via, deducendoli da formole che servono a trasformare certi integrali multipli; ed ha perciò osservato che se in queste formole la funzione che trovasi sotto uno dei segni d' integrazione è invariabile, lo è anche quella che trovasi sotto l' altro, e così da parametri differenziali noti ne deduce altri nuovi, alcuni dei quali già trovati dal prof. Ricci.

« Queste ricerche sono collegate colla teoria della curvatura di superficie situate in spazî piani, e l' autore trova le formole che danno le funzioni simmetriche dei raggi di curvatura espresse per mezzo dei parametri differenziali di quella funzione che uguagliata a zero rappresenta l' equazione della superficie, il che dà modo di trovare le espressioni dei raggi di curvatura in coordinate generali o curvilinee.

« I vostri Commissarî perciò riconoscono che questa Memoria ha una particolare importanza, e ne propongono quindi l' inserzione negli Atti dell' Accademia ».

Sulle espressioni invariabili.
Memoria del prof. ERNESTO PADOVA

Allorquando si ha una forma differenziale quadratica $\varphi = \Sigma_{r,s} a_{rs} dx_r dx_s$ la quale, col sostituire alle n variabili x_r altre n variabili x'_r, diventa $(\varphi) = \Sigma_{rs} (a_{rs}) dx'_r dx'_s$, ogni espressione formata colle a_{rs} e colle loro derivate, la quale in seguito alla sostituzione si cangia in una espressione formata analogamente coi coefficienti (a_{rs}) e colle loro derivate rapporto alle x', è stata dal Beltrami (1) chiamata *assoluta*. Se la sostituzione ora accennata cangia le funzioni qualsiansi U, V, ... delle x nelle altre (U), (V), ..., un' espressione formata colle a_{rs}, U, V, ... e colle loro derivate rapporto alle x, è dallo stesso autore detta *invariabile* quando, per questo cangiamento di variabili, essa si trasforma in una espressione formata analogamente colle (a_{rs}), (U), (V), ... e colle loro derivate rapporto alle x'. Adotteremo queste denominazioni nella presente Memoria.

È noto quanto sia grande nell' analisi l' importanza della espressione invariabile comunemente conosciuta sotto il nome di parametro differenziale del secondo ordine; le belle e recenti ricerche del mio amico e collega G. Ricci (2) hanno messo in evidenza come, oltre all' ordinario parametro Δ_2 U, quando U dipenda da n variabili, si possano costruire altre n—1 espressioni invariabili, che contengano le derivate seconde della funzione U al 2°, 3°, ... n° grado rispettivamente. La dimostrazione del Ricci fondata sopra concetti puramente algebrici è semplice ed elegante, ma conduce a trovare quelle espressioni sotto una forma, che, quando a certi simboli introdotti dall' autore si sostituiscono i loro valori in funzione delle derivate seconde di U, perde assai della sua semplicità e non presenta un vantaggio, che si ha nella forma sotto la quale ordinariamente si considera il Δ_2 U. Voglio dire che non è al pari di questo, astrazione fatta da un fattore comune (che è l' inversa della radice quadrata del discriminante della forma φ), una somma di derivate prime di espressioni formate colle derivate di U. Ho per ciò cercato di trovare per altra via delle espressioni invariabili e sono pervenuto ad un metodo che permette di costruirne, in modo abbastanza semplice, altre di forma assai diversa da quelle del Ricci e che godono la ora accennata proprietà. Queste nuove espressioni invariabili in alcuni casi soltanto, coincidono coi parametri differenziali trovati dal Ricci.

Mi sia concesso, per esporre brevemente il metodo da me tenuto, di adottare, par-

(1) *Ricerche di analisi applicata alla Geometria.* — Giornale di Matematiche di Battaglini, vol. II, pag. 355.

(2) *Sui parametri e gli invarianti delle forme quadratiche differenziali.* Annali di Matematica pura ed applicata, serie 2ª, tomo XIV.

lando di integrazioni multiple, la ormai generalmente accettata estensione della fraseologia propria delle figure che esistono nello spazio. Ecco in cosa esso consiste. Se F è una espressione invariabile in uno spazio ad n dimensioni, ove il quadrato dell' elemento lineare è rappresentato da $\varphi = \Sigma_{rs} a_{rs} dx_r dx_s$, la quale oltre ai coefficienti a_{rs} contiene la variabile dipendente U, e se l' integrale $\int F dS_{n-1}$ esteso ad un campo ad $n-1$ dimensioni, che forma il contorno completo di uno spazio ad n dimensioni, può trasformarsi, adottando variabili generali, e qualunque sia la forma del campo S_{n-1}, in un integrale $\int F_1 dS_n$, esteso al campo ad n dimensioni limitato da S_{n-1}, la F_1 sarà anch' essa una espressione invariabile. Ed infatti, se alle variabili x, si sostituiscono n nuove variabili indipendenti generali x', la F si cangierà in una funzione (F) formata colle (a_{rs}), (U) e colle loro derivate come la F lo era colle a_{rs}, U e loro derivate; trasformando l' integrale $\int (F) dS_{n-1}$, esteso al medesimo campo S_{n-1}, in $\int (F_1) dS_n$ al modo stesso col quale si trasforma $\int F dS_{n-1}$ in $\int F_1 dS_n$ stante l' arbitrarietà del campo d' integrazione, (F_1) sarà uguale ad F_1, e le due funzioni avranno identica forma, quindi la F_1 sarà una espressione invariabile.

Le espressioni invariabili che così si trovano sono intimamente collegate con quelle che danno la somma delle inverse e le somme dei prodotti due a due, tre a tre,.... delle inverse dei raggi di curvatura principali di un campo ad $n-1$ dimensioni situato in un campo piano ad n dimensioni, ho per ciò premesso in un primo paragrafo alcune considerazioni sui raggi di curvatura. In una prima formula ho esteso una relazione data da Lamé per le superficie del nostro spazio, estensione che non so sia stata ancor fatta; in una seconda ho espresso la somma dei prodotti due a due delle inverse dei raggi di curvatura per mezzo di parametri differenziali di quella funzione, che uguagliata ad una costante rappresenta l' equazione della superficie, ed ho per ultimo indicata la via colla quale si perverrebbe ad analoghe formule per le somme dei prodotti 3 a 3, 4 a 4,..... delle inverse dei raggi di curvatura.

Nel § II ho dato delle espressioni invariabili del secondo ordine, scopo principale di questa ricerca, ed ho mostrato nel § III come si potrebbero costruire espressioni invariabili di ordine superiore. Nell' ultimo § ho indicato alcune formule integrali, che si deducono dai teoremi esposti nei §§ precedenti.

§ I.

1. Gli n raggi principali di curvatura di una superficie S_n ad n dimensioni, situata in uno spazio piano od euclideo ad $n+1$ dimensioni, sono radici della equazione [1]

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} \frac{a_{11}}{\varrho}+(11) & \frac{a_{21}}{\varrho}+(21) & \cdots\cdots & \frac{a_{n1}}{\varrho}+(n1) \\ \frac{a_{12}}{\varrho}+(12) & \frac{a_{22}}{\varrho}+(22) & \cdots\cdots & \frac{a_{n2}}{\varrho}+(n2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{a_{1n}}{\varrho}+(1n) & \frac{a_{2n}}{\varrho}+(2n) & \cdots\cdots & \frac{a_{nn}}{\varrho}+(nn) \end{vmatrix} = 0,$$

[1] Vedasi G. Ricci, *Principî di una teoria delle forme differenziali quadratiche.* Annali di Matematica, serie 2ª, tomo XII.

ove il simbolo (rs) è definito dalla equazione

$$(2)\qquad (rs)\sqrt{a} = \begin{vmatrix} \frac{d^2 y_1}{dx_r dx_s} & \frac{d^2 y_2}{dx_r dx_s} & \cdots\cdots & \frac{d^2 y_{n+1}}{dx_r dx_s} \\ \frac{dy_1}{dx_1} & \frac{dy_2}{dx_1} & \cdots\cdots & \frac{dy_{n+1}}{dx_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{dy_1}{dx_n} & \frac{dy_2}{dx_n} & \cdots\cdots & \frac{dy_{n+1}}{dx_n} \end{vmatrix}.$$

ammesso che le y_h siano le variabili che danno al quadrato dell' elemento lineare dello spazio ad $n+1$ dimensioni la forma $\Sigma_h dy_h^2$, che le x_r rappresentino le variabili indipendenti nello spazio S_n, che il quadrato dell' elemento lineare in questo spazio sia dato da $\Sigma a_{rs} dx_r dx_s$ e che finalmente a sia il discriminante di quest' ultima forma differenziale quadratica.

Osserviamo che se per brevità si indica con A_h l' elemento reciproco ad α_h nel determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots\cdots & \alpha_{n+1} \\ \frac{dy_1}{dx_1} & \frac{dy_2}{dx_1} & \cdots\cdots & \frac{dy_{n+1}}{dx_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{dy_1}{dx_n} & \frac{dy_2}{dx_n} & \cdots\cdots & \frac{dy_{n+1}}{dx_n} \end{vmatrix}$$

la (2) può scriversi sotto la forma

$$(3)\qquad (rs)\sqrt{a} = \sum_1^{n+1}{}_h A_h \frac{d^2 y_h}{dx_r dx_s}.$$

Inoltre avendosi

$$a_{rs} = \sum_1^{n+1}{}_{hk} \frac{dy_h}{dx_r} \cdot \frac{dy_k}{dx_s}$$

sarà

$$a = \sum_1^{n+1}{}_h A_h^2 .$$

2. Se l' equazione della superficie ora considerata è

$$(4)\qquad U(y_1 y_2 \ldots y_{n+1}) = \text{cost},$$

essa diverrà una identità quando alle y si sostituiranno le loro espressioni in funzione delle x, talchè dalla (4) dedurremo le equazioni

$$(5)\qquad \Sigma_h \frac{\partial U}{\partial y_h} y_h^i = 0$$

$$(6)\qquad \Sigma_{uv} \frac{\partial^2 U}{\partial y_u \partial y_v} y_u^i y_v^j + \Sigma_h \frac{\partial U}{\partial y_h} y_h^{ij} = 0$$

ove per brevità si è scritto y_h^i, y_h^{ij} in luogo di $\frac{dy_h}{dx_i}, \frac{d^2 y_h}{dx_i dx_j}$ rispettivamente. Dalle

$n+1$ equazioni che si ottengono dando ad i nella (5) i valori $1, 2, \ldots n$ e nella (6) ad i, j un determinato sistema di valori r ed s, si ha, risolvendo rispetto a $\frac{dU}{dy_h}$

$$\frac{dU}{dy_h} = -\frac{A_h}{(rs)\sqrt{a}} \Sigma_{uv} \frac{d^2 U}{dy_u\, dy_v} y_u^r y_v^s \tag{7}$$

donde si ricava, se colla ordinaria notazione si pone $\Delta_1 U = \Sigma_h \left(\frac{dU}{dy_h}\right)^2$

$$\frac{A_1}{\frac{dU}{dy_1}} = \frac{A_2}{\frac{dU}{dy_2}} = \cdots\cdots = \frac{A_{n+1}}{\frac{dU}{dy_{n+1}}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\Delta_1 U}} \tag{8}$$

e quindi si ottiene

$$(rs) = -\frac{1}{\sqrt{\Delta_1 U}} \Sigma_{uv} \frac{d^2 U}{dy_u\, dy_v} y_u^r y_v^s \,. \tag{7'}$$

3. Dalla (1) noi abbiamo

$$\sum_1^n {}_i \frac{1}{\varrho_i} = -\Sigma_{lm}\, c_{lm}\, (lm)\,,$$

se c_{lm} è l'elemento reciproco ad a_{lm} nel discriminante a diviso pel discriminante stesso; quindi valendoci della (7'), potremo trasformare questa equazione nell'altra

$$\Sigma_i \frac{1}{\varrho_i} = \frac{1}{\sqrt{\Delta_1 U}} \Sigma_{lm}\, c_{lm}\, \Sigma_{uv}\, y_u^l\, y_v^m \frac{d^2 U}{dy_u\, dy_v} \,. \tag{9}$$

Dalla teoria dei determinanti si ha

$$c_{lm} = \frac{1}{2a} \Sigma_{gk} \frac{dA_g}{dy_k^l} \frac{dA_g}{dy_k^m}$$

e poichè è

$$\frac{dA_g}{dy_k^l} = -\frac{dA_k}{dy_g^l}$$

si deduce facilmente da quella formula l'altra

$$\Sigma_l\, c_{lm}\, y_u^l = \frac{1}{2a} \Sigma_{lgk}\, y_u^l \frac{\partial A_g}{\partial y_k^l} \frac{\partial A_g}{\partial y_k^m} = \frac{1}{a} \Sigma_g\, A_g \frac{dA_g}{dy_u^m}\,,$$

talchè la (9) diviene

$$\begin{aligned}\Sigma_i \frac{1}{\varrho_i} &= \frac{1}{a\sqrt{\Delta_1 U}} \Sigma_{guv}\, y_v^m\, A_g \frac{dA_g}{dy_u^m} \frac{d^2U}{dy_u\, dy_v} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\Delta_1 U}} \left[\Sigma_u \frac{d^2 U}{dy_u^2} - \frac{1}{a} \Sigma_{gu}\, A_g\, A_u \frac{d^2 U}{dy_g\, dy_u} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\Delta_1 U}} \left[\Delta_{2,1} U - \frac{1}{2\sqrt{a\Delta_1 U}} \Sigma_g\, A_g \frac{d\Delta_1 U}{dy_g} \right]\end{aligned}$$

ove si è scritto $\Delta_{2,1} U$ in luogo di $\Sigma \frac{d^2 U}{dy_u^2}$. Se p è la direzione della normale alla superficie $U = \text{cost}$ nel punto $(y_1, y_2, \ldots y_{n+1})$ si ha [1]

$$\frac{dU}{dp} = \sqrt{\Delta_1 U}\,, \quad \frac{dy_s}{dp} = \frac{1}{\sqrt{\Delta_1 U}} \frac{dU}{dy_s}$$

[1] Vedasi E. Beltrami, *Sulla teorica generale dei parametri differenziali.* Memorie dell'Acc. delle scienze dell'Istituto di Bologna, serie 2ª, tomo VIII.

e conseguentemente

$$\Sigma \frac{1}{\varrho_i} = \frac{\Delta_{2,1} U}{\sqrt{\Delta_1 U}} - \frac{d \sqrt{\Delta_1 U}}{dU} . \tag{10}$$

Viene così estesa al caso di una superficie ad n dimensioni, situata in uno spazio piano, la formula trovata da Lamé (*Leçons sur les coordonnées curvilignes*, p. 42) per le superficie nello spazio ordinario.

4. Dalla (1) noi abbiamo pure

$$\Sigma \frac{1}{\varrho_i \varrho_j} = \tfrac{1}{4} \Sigma_{ij\,gh} (c_{ij} c_{gh} - c_{ih} c_{gj}) [(ij)(gh) - (ih)(gj)] \tag{11}$$

ove agli indici i, j della somma del primo membro bisogna dare i valori che corrispondono alle combinazioni binarie dei numeri 1, 2, ... n, mentre agli indici della somma del secondo membro bisogna dare tutti i valori da 1 ad n; ed è per ciò che è stato preposto il fattore $\frac{1}{4}$, poiche quando si permutano fra loro gli indici i, g e gli indici j, h si riproducono gli stessi termini. La (11) può anche scriversi così:

$$\begin{aligned} \Sigma \frac{1}{\varrho_i \varrho_j} &= \tfrac{1}{2} \Sigma_{ij\,gh} c_{ij} c_{gh} (ij)(gh) - \tfrac{1}{2} \Sigma_{ij\,gh} c_{ij} c_{gh} (ih)(gj) \\ &= \tfrac{1}{2} [\Sigma_{ij} c_{ij} (ij)]^2 - \tfrac{1}{2} \Sigma_{ij\,gh} c_{ij} c_{gh} (ih)(gj) . \end{aligned} \tag{11'}$$

Pel calcolo eseguito nel numero precedente già sappiamo che il primo termine del secondo membro è uguale ad

$$\tfrac{1}{2} \left[\frac{\Delta_{2,1} U}{\sqrt{\Delta_1 U}} - \frac{d \sqrt{\Delta_1 U}}{dU} \right]^2 ;$$

calcoliamo il secondo termine. Noi abbiamo

$$\begin{aligned} \Sigma_{ij\,gh} c_{ij} c_{gh} (ih)(gj) &= \frac{1}{a^2 \Delta_1 U} \Sigma_{klhjuvrs} A_k A_l y_v^j y_s^h \frac{dA_k}{dy_u^h} \frac{dA_l}{dy_r^j} \frac{d^2 U}{dy_u dy_v} \frac{d^2 U}{dy_r dy_s} = \\ &= \frac{1}{\Delta_1 U} \Sigma_{uv} \left(\frac{d^2 U}{dy_u dy_v} \right)^2 - \frac{2}{a \Delta_1 U} \Sigma A_l A_r \frac{d^2 U}{dy_u dy_l} \frac{d^2 U}{dy_u dy_r} + \\ &\quad + \frac{1}{a^2 \Delta_1 U} \Sigma A_k A_l A_u A_r . \frac{d^2 U}{dy_u dy_l} \frac{d^2 U}{dy_k dy_r} = \\ &= \frac{1}{\Delta_1 U} \Sigma \left(\frac{d^2 U}{dy_u dy_v} \right)^2 - \frac{2}{a \Delta_1 U} \Sigma_u \left(\Sigma_l A_l \frac{d^2 U}{dy_u dy_l} \right)^2 + \\ &\quad + \frac{1}{(\Delta_1 U)^3} \left(\Sigma \frac{dU}{dy_l} \frac{dU}{dy_u} \frac{d^2 U}{dy_u dy_l} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{\Delta_1 U} \Sigma \left(\frac{d^2 U}{dy_u dy_v} \right)^2 + \left(\frac{d \sqrt{\Delta_1 U}}{dU} \right)^2 - \frac{\Delta_1 \Delta_1 U}{2 (\Delta_1 U)^2} \end{aligned}$$

conseguentemente se, adottando la notazione proposta dal Ricci, si pone

$$\Delta_{2,2} U = \sum_{1}^{n+1}{}_{u,v} \left[\frac{d^2 U}{dy_u^2} \frac{d^2 U}{dy_v^2} - \left(\frac{d^2 U}{dy_u dy_v} \right)^2 \right]$$

si ha

$$\Sigma \frac{1}{\varrho_i \varrho_j} = \frac{\Delta_{2,2} U}{\Delta_1 U} - \frac{\Delta_{2,1} U}{\sqrt{\Delta_1 U}} \frac{d \sqrt{\Delta_1 U}}{dU} + \frac{\Delta_1 \Delta_1 U}{4 (\Delta_1 U)^2} , \tag{11''}$$

la quale ci dà la somma dei prodotti due a due delle inverse dei raggi di curvatura, per mezzo di espressioni invariabili che contengono la U.

La (11″) riproduce immediatamente la nota espressione della curvatura totale di una superficie in un punto, quando si prenda l'equazione di questa superficie sotto la forma

$$\mathrm{U} \equiv z - f(xy) = \text{cost.}$$

La (10) e la (11″) possono evidentemente servire a dare con molta facilità le espressioni dei raggi di curvatura di una superficie situata in uno spazio a tre dimensioni, quando si faccia uso di coordinate curvilinee, perchè come vedremo nel § II la $\Delta_{22}\,\mathrm{U}$ è una espressione invariabile e ne troveremo la forma per coordinate qualsivogliano.

5. Senza dare l'intiero sviluppo della somma dei prodotti ad r ad r delle inverse dei raggi di curvatura principali, farò ora notare che un termine dello sviluppo è $\frac{\Delta_{2,r}\mathrm{U}}{\sqrt{(\Delta_1\mathrm{U})^r}}$, ove $\Delta_{2,r}\mathrm{U}$ ha il significato che il Ricci gli ha attribuito nella citata Memoria, *Sui parametri* ecc. Noi abbiamo infatti dalla (1)

$$\sum \frac{1}{\varrho_{i_1}\varrho_{i_2}\dots\varrho_{i_r}} = \frac{1}{1^2.\,2^2 \dots r^2}\sum \begin{vmatrix} c_{i_1,j_1} \; c_{i_1 j_2} \dots c_{i_1 j_r} \\ \dots\dots\dots\dots \\ c_{i_r j_1} \; c_{i_r j_2} \dots c_{i_r j_r} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} (i_1 j_1)\,(i_1 j_2)\dots(i_1 j_r) \\ \dots\dots\dots\dots \\ (i_r j_1)\,(i_r j_2)\dots(i_r j_r) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2^2.\,3^2 \dots r^2 (\Delta_1\mathrm{U})^{\frac{r}{2}}} \sum y^{j_1}_{v_1}\, y^{j_2}_{v_2} \dots y^{j_r}_{v_r} \begin{vmatrix} c_{i_1 j_1} \dots c_{i_1 j_r} \\ \dots\dots\dots \\ c_{i_r j_1} \dots c_{i_r j_r} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} y^{i_1}_{u_1}\, y^{i_1}_{u_2} \dots y^{i_1}_{u_r} \\ \dots\dots\dots \\ y^{i_r}_{u_1}\, y^{i_r}_{u_2} \dots y^{i_r}_{u_r} \end{vmatrix} \frac{d^2\mathrm{U}}{dy_{u_1}\,dy_{v_1}} \dots \frac{d^2\mathrm{U}}{dy_{u_r}\,dy_{v_r}}$$

$$= \frac{r^r}{2^2.\,3^2 \dots r^2 (\Delta_1\mathrm{U})^{\frac{r}{2}}} \sum \mathrm{A}_{l_1}\,\mathrm{A}_{l_2} \dots \mathrm{A}_{l_r} \begin{vmatrix} \frac{d\mathrm{A}_{l_1}}{dy^{i_1}_{v_1}}\, y^{i_1}_{u_1} , & \frac{d\mathrm{A}_{l_2}}{dy^{i_1}_{v_2}}\, y^{i_1}_{u_1} & \dots & \frac{d\mathrm{A}_{l_r}}{dy^{i_1}_{v_r}}\, y^{i_1}_{u_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d\mathrm{A}_{l_1}}{dy^{i_r}_{v_1}}\, y^{i_r}_{u_1} , & \frac{d\mathrm{A}_{l_2}}{dy^{i_r}_{v_2}}\, y^{i_r}_{u_2} & \dots & \frac{d\mathrm{A}_{l_r}}{dy^{i_r}_{v_r}}\, y^{i_r}_{u_r} \end{vmatrix} .$$

$$\frac{d^2\mathrm{U}}{dy_{u_1}\,dy_{v_1}} \dots \frac{d^2\mathrm{U}}{dy_{u_r}\,dy_{v_r}}$$

Se si osserva che $\Sigma_i \frac{d\mathrm{A}l}{dy^i_v}\, y^i_u$ è uguale ad A_l per $u = v$ ed uguale a $-\mathrm{A}_v$ per $u = l$ si vede che ai sistemi di valori delle u uguali alle v, pei quali il determinante dell'ultima somma prende il valore $\mathrm{A}_{l_1}\,\mathrm{A}_{l_2} \dots \mathrm{A}_{l_r}$, corrispondono pel fattore formato colle derivate seconde di U i termini del determinante

$$\mathrm{D}_{u_1, u_2, \dots u_r} = \begin{vmatrix} \frac{d^2\mathrm{U}}{dy^2_{u_1}} , & \frac{d^2\mathrm{U}}{dy_{u_1}\,dy_{u_2}} , & \dots & \frac{d^2\mathrm{U}}{dy_{u_1}\,dy_{u_r}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d^2\mathrm{U}}{dy_{u_1}\,dy_{u_r}} , & \frac{d^2\mathrm{U}}{dy_{u_2}\,dy_{u_r}} , & \dots & \frac{d^2\mathrm{U}}{dy^2_{u_r}} \end{vmatrix}$$

col loro rispettivo segno, per cui una parte dello sviluppo del secondo membro sarà

$$\frac{r^r}{1^2.2^2.3^2\ldots r^2(\Delta_1 U)^{\frac{r}{2}}\, a^r}\, \Sigma A^2_{l_1} A^2_{l_2} \ldots A^2_{l_r} . D_{u_1, u_2 \ldots u_r} = \frac{r^r}{2^2.3^2\ldots r^2(\Delta_1 U)^{\frac{r}{2}}}\, \Sigma D_{u_1, u_2, \ldots u_r}$$

e l' ultima somma si estende a tutte le combinazioni dei numeri 1, 2, ..., $n+1$ presi ad r ad r, e poichè il campo ad $n+1$ dimensioni delle variabili y è piano, questa somma è appunto il parametro differenziale di secondo ordine e di grado r che il Ricci denota con $\Delta_{2,r} U$. Donde si vede la importanza che questi parametri hanno nella teoria della curvatura.

§ II.

1. Dalla *Teorica generale dei parametri differenziali* del prof. E. Beltrami, prendiamo questa formula fondamentale (§ 4 (7))

$$(1) \qquad \int V \frac{dU}{dp}\, dS_{n-1} = -\int \frac{1}{\sqrt{a}}\, \Sigma_r \frac{d}{dy_r}(\sqrt{a}\,.\,V\,.\,U_r)\, dS_n\,,$$

nella quale il secondo integrale è esteso al campo ad n dimensioni intieramente limitato dal campo ad $n-1$, cui viene esteso il primo integrale; p è la normale alla superficie S_{n-1}, diretta verso l' interno ed è

$$U_r = \Sigma_s\, c_{sr} \frac{dU}{dy_s}$$

se il quadrato dell' elemento lineare in S_n è dato da

$$ds^2 = \Sigma a_{rs}\, dy_r\, dy_s$$

e c_{rs} ha il significato attribuitogli nel § I. Le funzioni che entrano in questa formula sono però soggette alla condizione di essere monodrome, finite e continue esse e le loro derivate fino all' ordine che occorre considerare. È valendoci di questa formula e del ragionamento già svolto nella introduzione che determineremo le nostre espressioni invariabili.

2. La derivata di una funzione rispetto alla normale ad uno spazio è una espressione invariabile, perchè (Beltrami, Mem. citata, § 3 (10 bis)) si ha

$$\frac{dU}{dp} = -\frac{\nabla UV}{\sqrt{\Delta_1 V}}$$

se $V = \text{cost}$ è l' equazione dello spazio cui è normale la p e ∇UV designa il parametro differenziale misto del primo ordine delle due funzioni U e V. Si è preso nel secondo membro il segno — perchè si suppone che V cresca andando dall' interno all' esterno del campo S_n. Quindi facendo $V = 1$ noi abbiamo sotto il segno integrale del secondo membro della (1) l' espressione

$$J_1 = \frac{1}{\sqrt{a}}\, \Sigma_r \frac{d}{dy_r}(\sqrt{a}\, U_r)$$

che non è altro che l' ordinario parametro differenziale del 2° ordine $\Delta_{2,1}U$, la cui invariabilità resta così dimostrata nel modo più semplice.

3. Facciamo $V = \Delta_{2,1} U$ ed avremo dalla (1)

$$\int \Delta_{2,1} U \frac{dU}{dp} dS_{n-1} = -\int \frac{1}{\sqrt{a}} \Sigma_r \frac{d}{dy_r} (\sqrt{a}\, U_r \Delta_{2,1} U)\, dS_n ,$$

prendendo invece $V = \frac{1}{2}$ e $\Delta_1 U$ in luogo di U, la (1) darà

$$\int \tfrac{1}{2} \frac{d\Delta_1 U}{dp} dS_{n-1} = -\int \frac{1}{2\sqrt{a}} \Sigma_r \frac{d}{dy_r} \left(\sqrt{a}\, \Sigma_s c_{rs} \frac{d\Delta_1 U}{dy_s} \right) dS_n$$

per cui, sottraendo queste due equazioni una dall'altra, avremo

$$\int \left[\tfrac{1}{2} \frac{d\Delta_1 U}{dp} - \Delta_{2,1} U \frac{dU}{dp} \right] dS_{n-1} = -\int \frac{1}{\sqrt{a}} \Sigma_r \frac{d}{dy_r} \left[\frac{\sqrt{a}}{2} \Sigma_s c_{rs} \frac{d\Delta_1 U}{dy_s} - \sqrt{a}\, U_r \Delta_{2,1} U \right] dS_n$$

e quindi la nuova espressione invariabile

$$\text{(2)} \qquad J_2 = \frac{1}{\sqrt{a}} \Sigma_r \frac{d}{dy_r} \left[\sqrt{a}\, U_r \Delta_{2,1} U - \frac{\sqrt{a}}{2} \Sigma_e c_{sr} \frac{d\Delta_1 U}{dy_s} \right].$$

In questa espressione le derivate terze spariscono; basta, per vederlo facilmente, ricordare dalla Memoria del Ricci, *Sui parametri* ecc. che si ha

$$\tfrac{1}{2} \frac{d\Delta_1 U}{dy_s} = \Sigma_i U_i U_{is} , \qquad \Delta_{2,1} U = \Sigma_{lm} c_{lm} U_{lm}$$

ove è

$$U_{lm} = U^{lm} - \Sigma_i a_{lm,i} U_i , \quad U^{lm} = \frac{d^2 U}{dy_l\, dy_m}$$

$$2a_{lm,i} = \overset{m}{a_{li}} + \overset{l}{a_{mi}} - \overset{i}{a_{lm}} , \quad \overset{t}{a_{rs}} = \frac{da_{rs}}{dy_t} .$$

La espressione invariabile di 2° ordine J_2 è collegata col parametro $\Delta_{2,2} U$ già usato nel precedente § da una relazione che ora passeremo a stabilire. Osserviamo che dalla più volte citata Memoria del Ricci, *Sui parametri* ecc. si ha

$$\begin{aligned} \Delta_{2,2} U &= \tfrac{1}{4} \Sigma_{ijgh} [c_{ig} c_{jh} - c_{ih} c_{jg}] [U_{ig} U_{jh} - U_{ih} U_{jg}] \\ &= \tfrac{1}{2} [\Sigma_{ig} c_{ig} U_{ig}]^2 - \tfrac{1}{2} \Sigma_{ijgh} c_{ig} c_{jh} U_{ih} U_{jg} = \\ &= \tfrac{1}{2} (\Delta_{2,1} U)^2 - \tfrac{1}{2} \Sigma_{ijgh} c_{ig} c_{jh} U_{ih} U_{jg} \end{aligned}$$

D' altra parte abbiamo

$$\begin{aligned} J_2 &= (\Delta_{2,1} U)^2 + \Sigma_{rlm} U_r (\overset{r}{c_{lm}} U_{lm} + c_{lm} \overset{r}{U_{lm}}) - \frac{1}{\sqrt{a}} \Sigma_{rsi} c_{rs} U_i U_{is} (\sqrt{a})^r - \Sigma_{rsi} (c_{rs} U_i U_{is})^r = \\ &= 2\Delta_{2,2} U + \sum_{lmr} U_r U_{lm} \left[\overset{r}{c_{lm}} - \Sigma_{ij} c_{mi} (c_{lj} a_{ij,r} + \overset{i}{c_{lj}} a_{jr}) \right] - \\ &- \Sigma_{lmr} U_l U_{lm} \left[\overset{r}{c_{mr}} + c_{mr} \frac{(\sqrt{a})^r}{\sqrt{a}} \right] + \Sigma_{lmr} c_{lm} U_r (\overset{r}{U_{lm}} - \overset{l}{U_{rm}}) \end{aligned}$$

ed approfittando delle relazioni trovate dal Ricci

$$a_{ij,r} + a_{rj,i} = \overset{j}{a_{ir}} , \quad \Sigma_{hk} c_{hk} a_{hk,j} = -\Sigma_{hk} a_{hj} \overset{k}{c_{hk}} - \frac{(\sqrt{a})^j}{\sqrt{a}} ,$$

questa equazione dopo qualche riduzione darà

$$(2') \qquad J_2 = 2\Delta_{2,2}U + \Sigma_{lmir} U_i U_r c_{lm} \left[\overset{l}{a}_{mr,i} - \overset{r}{a}_{ml,i} + \Sigma_{sj} c_{sj} \left(a_{lm,s}\, a_{ir,j} - a_{li,j}\, a_{mr,s}\right) \right]$$

$$+ \Sigma U_r U_{lm} \left[\overset{r}{c}_{lm} + \Sigma c_{mi} c_{lj} \left(a_{ir,j} + a_{jr,i}\right) \right]$$

$$- \Sigma U_l U_{lm} \left[\overset{r}{c}_{mr} + \Sigma c_{mr} c_{ij} \left(a_{ir,j} + a_{ij,r}\right) \right]$$

ossia, ponendo

$$a_{mi,rl} = \overset{l}{a}_{mr,i} - \overset{r}{a}_{ml,i} + \sum_{sj} c_{sj} \left(a_{lm,s}\, a_{ir,j} - a_{rm,s}\, a_{il,j}\right)$$

ed osservando che le ultime due somme del secondo membro della (2′) sono nulle, si ha

$$(3) \qquad J_2 = 2\Delta_{2,2} U + \Sigma_{rlmi} c_{lm}\, a_{mi,rl}\, U_i U_r \,.$$

4. Si può dimostrare che la funzione, che deve aggiungersi al parametro $\Delta_{2,2}U$ per ottenere la nostra espressione è essa stessa una espressione invariabile, donde resulta la invariabilità di $\Delta_{2,2}U$. Infatti dalle formule trovate del Ricci si ha che indicando tra parentesi la espressione analoga alla generica funzione f, quando alle variabili x si sostituiscono altre variabili x', hanno luogo le relazioni

$$(4) \qquad \begin{gathered} U_r = \Sigma_p (U_p)\, x_r^p \,, \quad (a_{lm,pq}) = \Sigma_{ighk}\, a_{ih,gk}\, x_i^l\, x_g^p\, x_h^m\, x_k^q \\ (a_{pq}) = \Sigma_{rs}\, a_{rs}\, x_r^p\, x_s^q \,, \quad c_{sr} = \Sigma_{pq} (c_{pq})\, x_r^p\, x_s^q \end{gathered}$$

per cui sarà

$$\Sigma_{rilm} (c_{lm}) (a_{mi,rl}) (U_i)(U_r) = \Sigma_{rilmhksj} (c_{lm})\, a_{hs,kj}\, x_h^m\, x_k^r\, x_s^i\, x_j^l \cdot (U_i)(U_r) =$$

$$= \Sigma_{hjks}\, c_{hj}\, a_{hs,kj}\, U_s U_k$$

come volevamo provare.

5. Le due funzioni J_2 e $\Delta_{2,2}U$ divengono dunque identicamente fra loro uguali soltanto se si annullano i coefficienti $a_{lm,rs}$ e questa è la condizione necessaria e sufficiente affinchè la forma differenziale che rappresenta il quadrato dell'elemento lineare dello spazio S_n possa ridursi ad una somma di n quadrati, ossia, adottando la locuzione del Ricci affinchè la forma φ sia di classe zero. Di questo teorema già noto [1] darò qui una semplicissima dimostrazione. Dalla equazione

$$(a_{lm,pq}) = \Sigma_{ighk}\, a_{ih,gk}\, x_i^l\, x_h^m\, x_g^p\, x_k^q$$

si deduce che i coefficienti $a_{lm,pq}$ non possono essere zero per nessun sistema di variabili se non lo sono per tutti, od, in altre parole, che l'annullarsi di questi coefficienti è proprietà indipendente dalla scelta delle variabili. Conseguentemente questa proprietà è certo condizione necessaria perchè la $\varphi = \Sigma a_{rs}\, dx_r\, dx_s$ sia di classe zero. Dico ch'è altresì condizione sufficiente, poichè la φ sarà di classe zero quando si possano deter-

[1] Vedasi p. e Ricci. *Principî di una teoria ecc.* (Mem. citata).

minare n funzioni x delle n variabili indipendenti tali che soddisfacciano le equazioni a derivate parziali

$$(5) \qquad \Sigma_g \, x_g^i \left[\Sigma_{hk} \, a_{hk,g} \, x_h^r \, x_k^s + \Sigma_h \, a_{hg} x_h^{rs} \right] = 0 \qquad r, s = 1, 2, \dots n$$

poichè allora annullandosi tutte le $(a_{hg,i})$ saranno costanti i coefficienti (a_{rs}) della forma trasformata e con una sostituzione lineare a coefficienti costanti si potrà ridurre la forma (φ), che è per ipotesi positiva, ad una somma di quadrati di differenziali. Ammesso che il determinante funzionale delle x rapporto alle antiche variabili x' sia diverso da zero, alle (5) si possono sostituire le equivalenti equazioni

$$\Sigma_{hk} \, a_{hk,g} \, x_h^r \, x_k^s + \Sigma_h \, a_{hg} \, x_h^{rs} = 0$$

che, risolute rapporto alle x_u^{rs}, danno

$$(6) \qquad x_u^{rs} = - \Sigma_{hkg} \, c_{kg} \, a_{hk,g} \, x_h^r \, x_k^s \; ,$$

ora, affinchè questo sistema definisca delle funzioni x delle x' basta [1] che da esse si ottenga identicamente

$$\frac{dx_u^{rs}}{dx'_t} = \frac{dx_u^{ts}}{dx_r} ,$$

quando negli sviluppi del primo e del secondo membro si sostituiscano per le derivate secondo i loro valori dati dalle (6). Nel caso nostro eseguendo lo sviluppo si trova con semplicissimo calcolo

$$\Sigma_{hkgl} \, c_{ug} \, a_{kg,lh} \, x_h^r \, x_l^t \, x_k^s = 0$$

condizione che è verificata per l'ipotesi fatta che le $a_{kg,lh}$ sieno tutte nulle.

6. Da ciò che precede emerge immediatamente che se in uno spazio piano, il campo rappresentato dalla equazione $U = \text{cost}$ è contorno completo di uno spazio S_n, nel quale U e le sue derivate prime e seconde si mantengono finite, continue e monodrome ha luogo la equazione

$$\int_{S_n} \Delta_{2,2} \, U dS_n - \tfrac{1}{2} \int \Delta_1 \, U \Sigma \frac{1}{\varrho_i} \, dS_{n-1} = 0 \; .$$

Se si osserva che nel nostro spazio $\int \Delta_1 \, U \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} \right) d\sigma$ esteso ad una superficie chiusa è proporzionale all'aumento di volume dello spazio limitato da quella superficie, quando ai punti del contorno si danno spostamenti normali proporzionali a $\Delta_1 U$, si vede che il nuovo parametro differenziale $\Delta_{2,2} U$ potrà venire vantaggiosamente adoperato anche in problemi di Fisica Matematica.

7. Beltrami ha dimostrato [2] che la curvatura tangenziale di una linea $U = \text{cost}$ tracciata sopra una superficie è data da una espressione analoga alla (10) del § precedente, che si ha cioè

$$\frac{1}{r} = \frac{\Delta_{2,1} U}{\sqrt{\Delta_1 U}} - \frac{d \sqrt{\Delta_1 U}}{dU} \, .$$

(1) Vedasi G. Ricci, *Sopra alcuni sistemi di equazioni differenziali.* Annali di Matematica pura ed applicata, serie 2ª, tomo XII.

(2) *Ricerche di analisi applicate alla Geometria*, § XXI.

ma dei coefficienti $a_{lm,pq}$, quando si tratta di una superficie a due dimensioni, sono diversi da zero soltanto $a_{12,12}$, $a_{21,12}$, $a_{12,21}$, $a_{21,21}$ e si ha [1]

$$a_{12,12} = - a_{21,12} = - a_{12,21} = a_{21,21} = \frac{a}{\varrho_1 \varrho_2}$$

conseguentemente sopra una superficie che abbia il quadrato dell' elemento lineare espresso da

$$\mathrm{E}\, du^2 + 2\mathrm{F}\, du\, dv + \mathrm{G}\, dv^2$$

avremo

$$(7) \quad \int \frac{\Delta_1 \mathrm{U}}{r}\, ds = \int \left[2\Delta_{2,2}\mathrm{U} - \frac{\mathrm{EU_1}^2 + 2\mathrm{FU_1U_2} + \mathrm{GU_2}^2}{\varrho_1 \varrho_2} \right] d\sigma = \int \left[2\Delta_{2,2}\mathrm{U} - \frac{\Delta_1 \mathrm{U}}{\varrho_1 \varrho_2} \right] d\sigma$$

ove il primo integrale va esteso alla linea rappresentata dalla equazione U = cost, che si suppone formare il contorno completo dell' area cui sono estesi gli ultimi due integrali.

8. Prendiamo ora a considerare l' integrale

$$\int \left[\Delta_{2,2}\mathrm{U} \frac{d\mathrm{U}}{dp} - \frac{\Delta_{2,1}\mathrm{U}}{2} \frac{d\Delta_1 \mathrm{U}}{dp} + \tfrac{1}{2} \Sigma_{rs}\, c_{rs} \frac{d\Delta_1 \mathrm{U}}{dx_r} \frac{d \frac{d\mathrm{U}}{dx_s}}{dp} - \Sigma_{ijhks}\, c_{hk}\, a_{sk,j}\, \mathrm{U}_i\, \mathrm{U}_j\, \mathrm{U}_{ih} \frac{dx_s}{dp} \right] d\mathrm{S}_{n-1}$$

esteso ad uno spazio che circondi totalmente un campo S_n, nel quale ammetteremo che tanto le funzioni quanto le derivate che avremo da considerare soddisfacciano a tutte le condizioni necessarie, perchè si possa applicare la trasformazione indicata dalla formula (1). Cominciamo dal provare che la funzione sotto il segno integrale è invariabile. Pei primi due termini non vi ha dubbio, poichè se V = cost, rappresenta il campo S_{n-1}, essi equivalgono a

$$- \frac{1}{\sqrt{\Delta_1 \mathrm{V}}} \left[\Delta_{2,2}\mathrm{U} \,.\, \nabla \mathrm{UV} - \frac{\Delta_{2,1}\mathrm{U}}{2} \nabla (\mathrm{V} \Delta_1 \mathrm{U}) \right],$$

basterà considerare gli altri due; ora abbiamo

$$\tfrac{1}{2} \Sigma c_{sr} \frac{d\Delta_1 \mathrm{U}}{dx_r} \frac{d\mathrm{U}^s}{dp} - \Sigma c_{hk}\, a_{sk,j}\, \mathrm{U}_i\, \mathrm{U}_j\, \mathrm{U}_{ih} \frac{dx_s}{dp} =$$

$$= \tfrac{1}{2} \Sigma_{srh}\, c_{sr} \left[\frac{d\Delta_1 \mathrm{U}}{dx_r} \frac{d^2 \mathrm{U}}{dx_s\, dx_h} - 2\Sigma_{ij}\, \mathrm{U}_i\, \mathrm{U}_j\, \mathrm{U}_{ir}\, a_{sh,j} \right] \frac{dx_h}{dp} =$$

$$= \tfrac{1}{2} \Sigma_{srh}\, c_{sr} \frac{d\Delta_1 \mathrm{U}}{dx_r} \mathrm{U}_{sh} \frac{dx_h}{dp} = \frac{1}{\sqrt{\Delta_1 \mathrm{V}}} \Sigma_{hi\,sr}\, c_{sr}\, \mathrm{U}_i\, \mathrm{U}_{ir} \mathrm{U}_{sh}\, \mathrm{V}_h\,,$$

ma se supponiamo di sostituire alle variabili x altre variabili y, noi abbiamo per le (4)

$$\Sigma_{srh} (c_{sr}) (\mathrm{U}_i) (\mathrm{U}_{ir}) (\mathrm{U}_{sh}) (\mathrm{V}_h) = \Sigma_{srih\, lm\lambda\mu} (c_{sr})\, \mathrm{U}_{lm}\, \mathrm{U}_{\lambda\mu}\, (\mathrm{U}_i)\, (\mathrm{V}_h)\, x_l^i\, x_m^r\, x_\lambda^s\, x_\mu^h =$$

$$= \Sigma_{lm\lambda\mu}\, c_{m\lambda}\, \mathrm{U}_{lm}\, \mathrm{U}_{\lambda\mu}\, \mathrm{U}_l\, \mathrm{V}_\mu$$

come volevamo provare. Gli ultimi due termini della espressione sotto il segno integrale, se U e V divengono fra loro eguali, si trasforma in $-\frac{\Delta_1 \Delta_1 \mathrm{U}}{4\sqrt{\Delta_1 \mathrm{U}}}$. Per la os-

[1] Ricci, *Principî di una teoria delle forme differenziali quadratiche.*

servazione generale gia fatta sarà dunque invariabile la espressione

$$(8)\quad J_3 = \frac{1}{\sqrt{a}} \Sigma_r \frac{d}{dx_r} \left\{ \sqrt{a} \left[U_r \Delta_{2,2} U - \tfrac{1}{2} \Delta_{2,1} U \Sigma_s c_{sr} \frac{d\Delta_1 U}{dx_s} + \Sigma_{hk} \frac{c_{hk}}{2} \frac{d\Delta_1 U}{dx_h} \Sigma_s c_{sr} \frac{d^2 U}{dx_k dx_s} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \Sigma_{hksij} c_{hk} c_{sr} a_{sk,j} U_i U_j U_{ih} \right] \right\}.$$

Fatto lo sviluppo di questa espressione si riconoscerebbe facilmente che le derivate terze di U si distruggono scambievolmente, le derivate dell' ordine più elevato che restano sono le derivate seconde e queste appariscono al terzo grado, per cui J_3 è una espressione invariabile di secondo ordine e di terzo grado.

Se il campo S_n è piano la J_3 è uguale a tre volte la $\Delta_{2,3} U$ trovata dal Ricci. Scegliendo infatti per variabili x quelle che danno all'elemento lineare la forma $\sqrt{\Sigma dx_h^2}$, le $a_{sk,j}$ sono nulle $a = c_{hh} = 1$, $c_{hk} = 0$, e la (8) dà

$$J_3 = \Sigma \frac{d}{dx_r} \left[\Delta_{2,2} U . U^r - \tfrac{1}{2} \frac{d\Delta_1 U}{dx_r} \Sigma_h \frac{d^2 U}{dx_h^2} + \tfrac{1}{2} \Sigma_h \frac{d\Delta_1 U}{dx_h} \frac{d^2 U}{dx_h dx_r} \right] =$$

$$= \tfrac{1}{2} \Sigma_{rhs} \begin{vmatrix} U^{rr} & U^{rh} & U^{rs} \\ U^{hr} & U^{hh} & U^{hs} \\ U^{sr} & U^{sh} & U^{hh} \end{vmatrix} = 3\Delta_{2,3} U$$

9. Se dunque la equazione $U = \text{cost}$ rappresenta in uno spazio piano ad n dimensioni una superficie che forma il contorno completo di un campo, nel quale la funzione U e le sue derivate prime e seconde si mantengono finite, continue e monodrome, si avrà la relazione

$$\int \Delta_{2.3} U \, dS_n = \tfrac{1}{3} \int \left[\Delta_{2,2} U \sqrt{\Delta_1 U} - \Delta_{2,1} U \frac{d\sqrt{\Delta_1 U}}{dU} + \tfrac{1}{4} \frac{\Delta_1 \Delta_1 U}{\sqrt{\Delta_1 U}} \right] dS_{n-1} =$$

$$= \tfrac{1}{3} \int \Delta_1 U^{\frac{3}{2}} \Sigma \frac{1}{\varrho_i \varrho_j} dS_{n-1}.$$

10. È poi facile vedere come proseguendo in queste ricerche si potrebbero costruire delle espressioni invariabili, che nel caso di spazi piani si riducano ai parametri $\Delta_{2,4}, \Delta_{2,5}, \ldots$ e come si potrebbero esprimere per mezzo di integrale di queste funzioni altri integrali che contengono le somme di prodotti 3 a 3, 4 a 4, ... delle inverse dei raggi di curvatura di uno spazio ad n—1 dimensioni situato in uno spazio piano ad n, moltiplicate per le potenze 2, $\frac{5}{4}$, ... di $\Delta_1 U$ rispettivamente.

11. Farò anche notare che la espressione

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \Sigma_r \frac{d}{dy_r} \left[\sqrt{a} \Sigma_s c_{sr} \frac{d\nabla UV}{dy_s} - \sqrt{a} V_r \Delta_{2,1} U - \sqrt{a} U_r \Delta_{2,1} V \right]$$

è invariabile e potrebbe considerarsi come un parametro differenziale del secondo ordine misto delle funzioni U e V.

§ III.

1. Il processo indicato conduce colla massima facilità a trovare anche delle espressioni invariabili di ordine superiore al secondo, e quindi se si pone mente al fatto che i parametri differenziali non sono che gli invarianti assoluti comuni ad una forma quadratica e ad un' altra forma, si vede come si possa per questa via trovare indirettamente la soluzione di un problema algebrico non ancora risoluto. Si riconosce infatti per esempio subito, che oltre alle note espressioni di 3° e 4° ordine rispettivamente

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \Sigma_r \frac{d}{dy_r}\left[\sqrt{a}\, \Sigma_s c_{sr} \frac{d\Delta_1 U}{dy_s}\right]$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \Sigma_r \frac{d}{dy_r}\left[\sqrt{a}\, \Sigma_s c_{sr} \frac{d\Delta_{2,h} U}{dy_s}\right]$$

sono pure invariabili le altre

$$A_h = \frac{1}{\sqrt{a}} \Sigma_r \frac{d}{dy_r}\left[\sqrt{a}\,.\, U_r\, \Delta_{2,h} U\right],$$

$$B_h = \frac{1}{\sqrt{a}} \Sigma_r \frac{d}{dy_r}\left[\sqrt{a}\, \Delta_{2,h} U\, \Sigma_s c_{sr} \frac{d\Delta_1 U}{dy_r}\right].$$

$$C_h = \frac{1}{\sqrt{a}} \Sigma_r \frac{d}{dy_r}\left[\sqrt{a}\, U_r\, A_h\right],$$

$$D_h = \frac{1}{\sqrt{a}} \Sigma_r \frac{d}{dy_r}\left[\sqrt{a}\, B_h\, U_r\right], \text{ ecc.}$$

§ IV.

1. Dalle relazioni trovate nei §§ precedenti si possono dedurre alcune formule che ora passerò ad esporre, limitandomi al caso in cui lo spazio sia piano.

Noi abbiamo

$$\int \Sigma_h \frac{d\Delta_1 V}{dx_h}\left[\tfrac{1}{2}\frac{d\Delta_1 U}{dx_h} - \Delta_{2,1} U \frac{dU}{dx_h}\right] dS_n = -\int \Delta_1 V \left[\tfrac{1}{2}\frac{d\Delta_1 U}{dp} - \Delta_{2,1} U \frac{dU}{dp}\right] dS_{n-1} - {}$$
$$- 2\int \Delta_1 V \Delta_{2,2} U\, dS_n$$

$$\int \Sigma_h \frac{d\Delta_1 U}{dx_h}\left[\tfrac{1}{2}\frac{d\Delta_1 V}{dx_h} - \Delta_{2,1} V \frac{dV}{dx_h}\right] dS_n = -\int \Delta_1 U \left[\tfrac{1}{2}\frac{d\Delta_1 V}{dp} - \Delta_{2,1} V \frac{dV}{dp}\right] dS_{n-1} - {}$$
$$- 2\int \Delta_1 U \Delta_{2,2} V\, dS_n$$

quindi, sottraendo queste equazioni una dall' altra, si ha

$$\int\left[\Delta_1 U \Delta_{2,2} V - \Delta_1 V \Delta_{2,2} U + \Delta_{2,1} U \nabla(U, \Delta_1 V) - \Delta_{2,1} V \nabla(V, \Delta_1 U)\right] dS_n =$$
$$= \tfrac{1}{2}\int\left[\Delta_{2,1} V \Delta_1 U \frac{dV}{dp} - \Delta_{2,1} U \Delta_1 V \frac{dU}{dp} - \tfrac{1}{2}\Delta_1 U \frac{d\Delta_1 V}{dp} + \tfrac{1}{2}\Delta_1 V \frac{d\Delta_1 U}{dp}\right] dS_{n-1}.$$

Formula che ha una certa analogia con quella che esprime il teorema di Green.

2. Analogamente si trova

$$\int \Sigma_r \frac{dV}{dx_r}\left[\tfrac{1}{2}\frac{d\Delta_1 U}{dx_r} - \Delta_{2,1} U \frac{dU}{dx_r}\right] dS_n = -\int V\left[\tfrac{1}{2}\frac{d\Delta_1 U}{dp} - \Delta_{2,1} U \frac{dU}{dp}\right] dS_{n-1} - $$
$$- 2\int V\Delta_{2,2} U dS_n$$

$$\int \Sigma_r \frac{dV}{dx_r}\left[\Delta_{2,2} U \frac{dU}{dx_r} - \frac{\Delta_{2,1} U}{2}\frac{d\Delta_1 U}{dx_r} + \Sigma_s \tfrac{1}{2}\frac{d\Delta_1 U}{dx_s}\frac{d^2 U}{dx_r\, dx_s}\right] dS_n =$$
$$= -\int V\left[\Delta_{2,2} U \frac{dU}{dp} - \tfrac{1}{2}\frac{d\Delta_1 U}{dp}\Delta_{2,1} U + \tfrac{1}{2}\Sigma_s \frac{d\Delta_1 U}{dx_s}\frac{d}{dp}\cdot\frac{dU}{dx_s}\right] dS_{n-1} - 3\int V\Delta_{2,3} U dS_n .$$

3. Da queste ultime formule, osservando che si ha

$$\Delta_{2,2}\sqrt{\varrho} = 0\,, \qquad \Delta_{2,3}\,\varrho = 0\,,$$

quando ϱ rappresenta il raggio vettore di un punto dello spazio ordinario a partire dall' origine, si può dedurre la nota formula che dà il valore di V in un punto dello spazio S, quando siano noti sul contorno i valori di V e di $\frac{dV}{dp}$ e nell' interno di S i valori di $\Delta_{2,1}V$. Si ha infatti dalla prima p. e.

$$\int_{S-S'} \Sigma \frac{dV}{dx}\left[\tfrac{1}{2}\frac{d\Delta_1\sqrt{\varrho}}{dx} - \Delta_{2,1}\sqrt{\varrho}\,\frac{d\sqrt{\varrho}}{dx}\right] dS =$$
$$= -\int_{\sigma+\sigma_0} V\left[\tfrac{1}{2}\frac{d\Delta_1\sqrt{\varrho}}{dp} - \Delta_{2,1}\sqrt{\varrho}\,\frac{d\sqrt{\varrho}}{dp}\right] d\sigma$$

ove σ è il contorno del campo S, che comprende la origine dei raggi vettori, σ_0 la superficie di una sfera S′ descritta attorno all' origine, con raggio piccolissimo. Ma è

$$\Delta_1\sqrt{\varrho} = \frac{1}{4\varrho}\,, \quad \Delta_{2,1}\sqrt{\varrho} = \frac{3}{4\varrho^{\frac{2}{3}}}$$

per cui se V_0 è il limite finito verso il quale tende V avvicinandosi indefinitamente all' origine, si ha, passando al limite per σ_0 tendente a zero

$$\int_S \Sigma \frac{dV}{dx}\frac{x}{\varrho^3}\, dS = \int_\sigma V \frac{d\frac{1}{\varrho}}{dp}\, d\sigma - 4\pi V_0$$

e poichè si ha

$$\int_S \Sigma \frac{dV}{dx}\frac{x}{\varrho^3}\, dS = \int_\sigma \frac{1}{\varrho}\frac{dV}{dp}\, d\sigma + \int \Delta_{2,1} V \frac{1}{\varrho}\, dS$$

avremo

$$4\pi V_0 = \int_\sigma \left(V \frac{d\frac{1}{\varrho}}{dp} - \frac{1}{\varrho}\frac{dV}{dp}\right) d\sigma - \int \frac{\Delta_{2,1} V}{\varrho}\, dS$$

ch' è la formula nota cui alludevamo.

RELAZIONE

letta dal Socio Moriggia, relatore, a nome anche del Socio Todaro, nella seduta del 6 febbraio 1887, sulla Memoria del dott. Romeo Fusari, intitolata: *Ricerche intorno alla fina anatomia dell'Encefalo dei Teleostei (Ciprinidi e Salmonidi).*

« L'autore dopo d'aver passate in breve rassegna le ricerche da altri condotte in codesta direzione, e combattutine i risultati di alcune, entra a dare una descrizione particolareggiata sulla istologia del *cervelletto*, della *valvula cerebelli* e del *tetto ottico*. Confronta la struttura del *tetto ottico* con quella delle eminenze bigemine anteriori dell'uomo.

« Descrive le cellule nervose, le fibre, la nevroglia, le cellule epiteliari, insistendo sull'intimo rapporto, che passa tra la nevroglia e l'epitelio dei centri nervosi e per riguardo alla provenienza embrionale, come pure per i loro uffici.

« Tre tavole accompagnano e rischiarano il lavoro, che è stato fatto nel Laboratorio del prof. Golgi.

« Alla vostra Commissione, senza entrare qui in maggiori particolari, parve essere la Memoria ben condotta, buoni assai i metodi di ricerca, notevoli i risultati ottenutine, per cui non esita a proporre all' Accademia, che il lavoro del Fusari venga inserito nei suoi Atti ».

Intorno alla fina anatomia dell'Encefalo dei Teleostei.

Memoria del dott. ROMEO FUSARI.

La letteratura risguardante il sistema nervoso centrale dei pesci conta digià un numero ragguardevole di pubblicazioni. Tralasciando gli autori più antichi (Scarpa, Carus, Gottsche, Owsyannikow), mi basterà citare i lavori di Stieda (1), di Viault (2), di Rohon (3), di Vignal (4), di Fritsch (5), ed i più recenti di Mayser (6), di Ahlborn (7) e di Rabl-Rückhard (8).

Stieda diresse i suoi studî specialmente sui pesci ossei, e diede una descrizione della struttura e della morfologia di tutte le singole parti del sistema nervoso centrale, dalla quale descrizione appare aver egli rilevato tutto quanto si poteva coi metodi di cui allora disponeva la scienza. Viault, Rohon e Vignal istituirono ricerche sui pesci cartilaginei. Fritsch volgendosi nuovamente ai teleostei, giovandosi del microtomo, scoprì sull'encefalo dei medesimi numerose particolarità, le quali erano sfuggite ai primi osservatori. Mayser riprendendo gli studî di Fritsch e ricercando specialmente sui ciprinoidi, col mezzo di preparati in serie sviluppò le anteriori conoscenze, e corresse alcuni errori di anatomia e di interpretazione in cui erano caduti i precedenti autori. Ahlborn eseguì una serie di pazientissime ricerche sul cervello dei petromizonti. È notevole la sua proposta della divisione dell'encefalo in una metà posteriore

(1) Stieda, *Studien über das centrale Nervensystem der Knochenfische.* Zeitschrift f. wiss. Zool. Vol. XVIII. 1867.

(2) Viault, *Recherches histologiques sur la Structure des Centres nerveux des Plagiostomes.* Archives de Zoologie exp. T. V. 1876.

(3) Rohon, *Das Centralorgan des Nervensystems der Selachier.* Denkschrift der Kaiserl. Akademie d. Wiss. Bd. XXXVIII. 1878.

(4) Vignal, *Note sur l'Anatomie des Centres nerveux du Mola.* Arch. de Zool. exp. Ann. 1881, n. 3, T. IX.

(5) Fritsch, *Untersuchungen über den feineren Bau des Fischgehirns, mit besonderer Berücksichtigung der Homologien bei anderen Wirbelthierklassen.* Berlin 1878. *Offener Brief an meine Opponenten in Sachen « Fischgehirns »* Zeitschr. f. wiss. Zool. Vol. XXXVIII. fasc. 1°, pag. 165-166.

(6) Mayser, *Vergleichend-anatomische Studien über das Gehirns der Knochenfische mit besonderer Burücksichtigung der Cyprinoiden.* Zeitschr. f. wissen. Zool. Vol. XXXVI.

(7) Ahlborn, *Untersuchungen über das Gehirns der Petromyzonten.* Zeitschr. f. wissen. Zool. Vol. XXXIX, fasc. 2.

(8) Rabl-Rückhard, *Zur Deutung des Gehirns der Knochenfische.* Arch. f. Anat. u. Entwicklungsgesch. 1882 pag. 111-128. *Das Grosshirn der Knochenfische, und seine Anhangsgebilde.* Arch. f. Anat. und Entwicklunsgesch. 1883. Supplem. pag. 280-322. *Weiteres zur Deutung des Gehirns der Knochenfische.* Biol. Centralbl. III Ann. n. 1, pag. 21-23.

od *epicordale*, ed una metà anteriore o *precordale*, divisione la quale sarebbe fondata sul diverso rapporto di posizione che hanno queste parti rispetto alla corda dorsale, e sulla diversa loro struttura interna, e che sarebbe estendibile non solo ai pesci ed ai batraci, ma a tutti i vertebrati. Rabl-Ruckard da ultimo fondandosi specialmente su ricerche embriologiche, riuscì a stabilire ed a dimostrare le omologie delle diverse parti dell'encefalo dei pesci rispetto a quelle dell'encefalo dei vertebrati superiori. Le sue conclusioni riuscendo in genere conformi a quelle di Mayser e di Ahlborn, vengono a combattere vittoriosamente le obbiezioni sollevate in proposito per opera specialmente di Fritsch, ed a rendere chiaro e semplice un importante capitolo dell'anatomia comparata.

Se per tutti questi studi e per quelli d'altri che non ho nominati (Cuvier, Hollard, Mayer, Müller ecc.) si riuscì abbastanza felicemente alla determinazione delle singole parti dell'organo nervoso centrale dei pesci, e si potè accertare l'andamento dei diversi fasci nervosi, riguardo però alla struttura, alla morfologia elementare ed alle relazioni reciproche fra i vari elementi regna ancora molta oscurità. Stieda divide le cellule nervose del sistema cefalo-rachidiano dei pesci in grande e piccole, ma non accorda a tale distinzione una differenza nella funzionalità, anzi sostiene che tutte le distinzioni fatte su questo proposito fra le cellule nervose sono arbitrî ed ipotesi. Circa le connessioni delle cellule colle fibre e delle cellule nervose fra loro, confessa che non è mai riuscito a vedere un rapporto diretto fra una cellula ed una fibra midollata nè fra cellula e cellula; ma tuttavia appare propenso ad ammettere che le cellule nervose si mettano in relazione, tanto fra di loro che coi fasci delle fibre nervose, col mezzo di tutti i loro prolungamenti, dacchè egli nega che queste cellule siano provvedute di un processo affatto differente dagli altri, come Deiters ed altri autori avevano già descritto, e nota con cura speciale la direzione di tutti i prolungamenti facendo risaltare i rapporti di vicinanza.

Viault e Vignal al contrario riconoscono sempre nelle cellule nervose un prolungamento speciale (prolungamento indiviso o di Deiters), e sebbene nei loro preparati non abbiano mai potuto riscontrare il fatto, ammettono tuttavia che tale prolungamento vada a costituire il *cilinder axis* di una fibra nervosa. Mayser al pari di Owsyannykow trova delle connessioni dirette fra cellule e fibre nervose; gli altri autori non danno queste connessioni per accertate.

Vi sono poi osservatori che intesero a trovare distinzioni fra le varie cellule nervose usando reattivi diversi. Così Mauthner (1) impiegando la colorazione del carminio di Gerlach sul sistema nervoso dell'Esox Lucius, distinse quattro specie di cellule nervose caratterizzate dal diverso coloramento che le varie parti della cellula assumevano. Denissenko (2) che studiò a sua volta specialmente sul cervelletto dei pesci e di altri vertebrati l'azione di diverse sostanze coloranti (carminio, ematossilina, eosina), stabilì due specie di cellule nervose (Haematoxilin- und Eosinzellen).

(1) Mauthner, *Beitrage zur näheren Kentniss der morphologischen Elementen des Nervensystems*. Sitzungsber. der Kais. Akad. Vol. XXXIX. 1859.

(2) Denissenko, *Zur Frage über den Bau der Kleinhirnrinde bei verschiedenen Klassen von Wirbelthieren*. Arch. f. mikroscop. Anat. Vol. XIV. 1877.

Affatto recentemente, e già dopo che il professor Golgi [1] veniva coi suoi nuovi reperti sul sistema nervoso centrale dei mammiferi a distruggere le ipotesi anatomiche e gli arbitrari completamenti schematici di Gerlach, Schultze, di Boll, di Luys, di Meynert ecc., il Bellonci [2] ponendosi a studiare la struttura dell'encefalo dei vertebrati inferiori, stabilì per le cellule nervose una distinzione affatto diversa da tutte le antecedenti. Già Butzke aveva accennato al diverso coloramento prodotto dall'azione dell'acido osmico sulle cellule nervose, ora il Bellonci, provando di nuovo questo reagente, a seconda del modo di comportarsi delle cellule nervose col medesimo, distinse due specie di cellule nervose centrali; le une sarebbero debolmente colorate dall'acido osmico, le altre prenderebbero una tinta bruno-nerastra, e talvolta affatto nera. Oltre a questo differente contegno chimico, i due ordini di cellule avrebbero anche una diversità morfologica, giacchè le cellule anneribili sarebbero provvedute d'un processo *cilinder axis*, le cellule non anneribili, non avrebbero che processi protoplasmatici; le prime sarebbero sempre intimamente compenetrate dalla nevroglia, e per mezzo dei loro molteplici prolungamenti sarebbero strettamente unite al reticolo fondamentale; le seconde sarebbero contenute in ispazi liberi di nevroglia, ed avrebbero una certa indipendenza dal reticolo, a cui sono unite per mezzo di pochi prolungamenti. A queste particolari proprietà l'autore attribuì grande importanza, credendo egli che le cellule anneribili formino i nuclei d'origine dei nervi motori, e che le cellule non anneribili si riscontino di preferenza laddove le origini dei nervi sensitivi si risolverebbero nel reticolo di Gerlach; le une quindi sarebbero motrici, le altre elementi di senso.

Queste asserzioni del Bellonci, che venivano in certo modo ad infirmare le deduzioni fatte dal Golgi, o per lo meno, contro ogni legge di evoluzione, a far sospettare nell'encefalo dei vertebrati inferiori una struttura diversa da quella dei vertebrati superiori, mi indussero da prima a fare alcune ricerche di controllo usando l'acido osmico sull'encefalo di vari pesci ossei.

Già a priori, dando uno sguardo alla tavola unita al lavoro del Bellonci, vedendo quelle fogge di cellule, di cui perfino il corpo, il quale facilmente si può ottenere colorato coi metodi più comuni, si allontana di gran lunga dalle ordinarie forme, si può sospettare che per la reazione coll'acido osmico si colorino anche altre parti che non siano le pure cellule nervose. Infatti, provando io l'azione di questa sostanza, vidi che essa si comporta diversamente a seconda del suo grado di concentrazione; se è discretamente concentrata (1 a 100-200) colora le parti più periferiche del pezzo che vi viene immerso in un nero quasi uniforme, rimanendone la parte centrale non attaccata; se è più diluito (1 a 500-1000, come insegna il Bellonci), allora estende la sua azione più all'interno, però in modo irregolare; agisce anche meno diffusamente, compare colorato in bruno un indistinto reticolo, e sono pur colorati (dal bruno più chiaro con tutte le gradazioni intermedie) alcuni corpi cellulari, i cui prolungamenti

(1) Golgi, *Sulla fina anatomia degli organi centrali del sistema nervoso*. Ulrico Hoepli. Milano, 1885.

(2) Bellonci, *Ricerche comparative sulla struttura dei centri nervosi dei vertebrati*. Memorie della R. Acc. dei Lincei. Vol. V, 1880, pag. 157.

si possono seguire per brevissimo tratto, confondendosi essi coll'apparente reticolo. Qua e là sono pure visibili alcuni punti più neri, a forma di goccie o di corpi provveduti di informi espansioni, goccie e corpi che molto probabilmente non sono altro che mielina annerita. Alcune cellule sono limitate da uno spazio bianco, il quale si riscontra pure in tutti i pezzi di encefalo o di midollo spinale mal conservati; e per vero anche qui il tessuto nervoso si è dovuto certo ritrarre, giacchè il pezzo dopo essere stato posto fresco in una soluzione d'acido osmico tanto diluita, viene subito dopo trasportato nell'alcool. È facile dedurre da tutto questo come da una parte l'alterazione del tessuto nervoso per opera dell'alcool, dall'altro la irregolare azione dell'acido osmico, abbiano indotto in errore il Bellonci.

Ottenuti questi risultati, sebbene il Bellonci, dietro prove fatte, avesse sospettato che la reazione nera del Golgi non fosse applicabile ai vertebrati inferiori, pure io la volli ritentare, e dopo molte difficoltà la ottenni. Questa non mi riuscì ancora completa per ogni parte del sistema nervoso centrale, tuttavia i parziali risultati ottenuti bastano per poter asserire che la struttura del sistema nervoso centrale dei vertebrati inferiori non differisce in generale da quella dei vertebrati superiori.

Metodo di ricerca.

I pesci da me usati appartengono all'ordine dei Fisostomi e alla famiglia dei Ciprinidi e dei Salmonidi, in ispecial modo poi ebbi a studiare il cervello di tinca, di carassius, di salmone e di trota. Le tinche ed i carassius me li procuravo ancora vivi, oppure morti solo da brevissimo tempo, e di grandezza media; i salmoni e le trote ho avuto la fortuna di averle appena nate, fortuna di cui devo grazie al chiarissimo zoologo prof. Pavesi. L'encefalo intero delle tinche, oppure, se si trattava di trote o salmoni neonati, l'animale intero io poneva nel liquido di Müller diluito con un terzo d'acqua. Passati due giorni sostituiva al liquido di Müller diluito altrettanto dello stesso liquido puro, e divideva poi in due ó più parti gli encefali più grossi. Lasciato ancora l'intervallo di due giorni, cominciavo a tentare la reazione su alcuni pezzi di encefalo o su teste intere, mettendole prima per 1-2 giorni in una miscela di $^4/_5$ di liquido di Müller ed $^1/_5$ di soluzione d'acido osmico all'1 $^0/_0$, e poi passandoli per altri 1-2 giorni ancora in nitrato d'argento al 0,75 $^0/_0$. Continuando ogni giorno lo stesso processo su altri pezzi o su altre teste, riuscivo finalmente a colpire il momento giusto di indurimento e ad ottenere la reazione.

Molto più difficile è l'avere la colorazione nera senza l'aiuto dell'acido osmico, il che forse dipende dall'essere malagevole il sorprendere il grado giusto di indurimento in bicromato; i pezzi riescono così piccoli, che in poco tempo possono passare da un indurimento insufficiente ad uno troppo forte.

Non ho tralasciato del resto i comuni metodi di colorazione, specialmente per le sezioni in serie, onde farmi un'idea generale sulla grossolana struttura e sul modo di connessione delle varie parti dell'encefalo.

Descritto il metodo di ricerca, farò qui un'esposizione generale delle particolarità di forma e di contegno dei vari elementi del sistema nervoso centrale. Era mia intenzione di far poi seguire una descrizione della struttura e della morfologia di ogni singola parte dell'encefalo dei teleostei; ma a causa dell'esito parziale della

reazione nera, stimando ora prematuro il far ciò, darò solo come saggio quanto ho potuto rilevare per il *cervelletto*, la *valvula cerebelli*, ed il *tetto ottico*.

Note generali sulla Morfologia e sul contegno dei diversi elementi degli organi centrali nervosi.

Per mezzo della reazione al nitrato d'argento negli organi nervosi dei teleostei, appaiono colorati in nero quattro specie di elementi: *cellule nervose, fibre nervose, cellule della nevroglia, cellule epiteliali*.

Le *cellule nervose* si presentano come corpi la cui forma e grandezza varia notevolmente a seconda della provincia a cui appartengono, e varia pure fra gli elementi della stessa provincia. Riguardo alla forma si distinguono cellule piramidali, poligonali globose, piriformi, fusiformi ed irregolari. Riguardo alla grandezza le cellule oscillano entro limiti abbastanza larghi (per il corpo cellulare dagli 8-15 ai 50-70 μ), però le più grandi fra di esse non raggiungono le dimensioni delle più grandi cellule dei vertebrati superiori. Le forme più grandi si trovano in quella parte dell'encefalo che forma la continuazione diretta del midollo spinale (midollo allungato, parte commissurale del cervelletto, parte commissurale del lobo ottico di Stieda), le forme più piccole si trovano nel cervelletto (granuli) e nel tetto ottico.

Ciascun corpo cellulare nervoso si continua in un numero maggiore o minore di prolungamenti. Fra questi se ne trova sempre uno, il quale per il suo contegno e per i caratteri speciali, si distingue da tutti gli altri. Questo è il *prolungamento nervoso*, gli altri sono i *prolungamenti protoplasmatici*. Il numero di questi ultimi varia assai nelle cellule poligonali, è di 3-4 nelle piramidali e nelle globose, di uno o due nelle fusiformi e piriformi. Già in prossimità alla loro origine questi prolungamenti cominciano a ramificarsi dicotomicamente ad angolo acuto, e a mano a mano che la divisione procede, subiscono un progressivo assottigliamento, poi, senza che mai abbiano a congiungersi colle divisioni dei prolungamenti vicini, terminano dopo una leggera ondulazione conservando ancora una discreta grossezza. Le grosse cellule del cervelletto e della valvula cerebelli danno un sorprendente ed elegantissimo esempio di ramificazione del processo protoplasmatico (vedi tav. I, fig. 15, 16, 18, 19); la massima parte di queste cellule, ed anche un intiero ordine di cellule nel tetto ottico, mandano i loro prolungamenti protoplasmatici verso la periferia, e le loro ultime ramificazioni giungono fino a toccare la pia, terminando spesso con un piccolo bottone. Il modo di comportarsi di questi prolungamenti fanno togliere il sospetto che non si abbiano potuto seguire supposte ulteriori divisioni, e quindi, senz'altro, si può dire inesatta l'asserzione del Bellonci, per il quale le cellule nervose sarebbero unite fra loro per mezzo di un reticolo intercellulare in cui si risolverebbero i prolungamenti protoplasmatici.

I prolungamenti nervosi, al pari che nei mammiferi, si distinguono dagli altri per la loro maggiore omogeneità, per l'aspetto ialino, e la superficie più liscia. Già in vicinanza alla loro origine si assottigliano, e dopo un certo tratto vanno a dividersi dicotomicamente, oppure emettono ramificazioni laterali staccantisi ad angolo retto. Queste ramificazioni alla loro volta possono emettere altri rami di secondo ed anche di terzo ordine, fino a raggiungere una estrema finezza. Molti prolungamenti

colle successive dicotomiche divisioni in rami si risolvono per intero in un intreccio di filamenti; altri invece pur somministrando rami, conservano sempre una propria individualità, ed entrano direttamente a costituire i fasci di fibre nervose. Dunque come nei mammiferi, anche in questa classe di vertebrati si possono distinguere due tipi di cellule:

1° Cellule gangliari (v. tav. I, fig. 16, 17, 20) il cui prolungamento somministra scarsi fili laterali e direttamente trasformasi nel *cilinder axis* di una fibra nervosa midollare;

2° Cellule gangliari (v. tav. I, fig. 5, 15) il cui prolungamento nervoso suddividendosi complicatamente perde la propria individualità, e prende parte *in toto* alla formazione di una rete nervosa diffusa.

Anche riguardo alle *fibre nervose* ho potuto distinguere due modi di comportarsi; alcune, cioè, provenienti dai fasci centrali, si mettono in diretta comunicazione colle cellule, perchè il loro *cilinder axis*, pure emettendo fili laterali, si continua col processo nervoso di queste; altre, giunte in prossimità delle cellule nervose, si dividono dicotomicamente in rami, i quali alla lor volta si suddividono in filamenti di secondo e terzo ordine fino a costituire un fino intreccio, senza che alcuno di essi si metta in diretto rapporto col prolungamento nervoso di una cellula.

Quindi anche le fibre nervose, in relazione al contegno del rispettivo *cilinder axis*, possono essere distinte in due categorie:

1ª Fibre nervose il cui cilindrasse, sebbene somministri fibrille laterali secondarie (che suddividendosi si perdono nella rete diffusa), conserva la propria individualità, e va a mettersi in rapporto diretto colle cellule gangliari del primo tipo, continuandosi col relativo prolungamento nervoso.

2ª Fibre nervose il cui cilindrasse, suddividendosi complicatamente, perde la propria individualità, ed in totalità prende parte alla formazione della rete nervosa diffusa.

Questa rete diffusa serve a mettere in relazione non solo le fibre nervose colle cellule nervose della seconda categoria, ma stabilisce ancora un rapporto fra fibra e fibra. È ovvio poi comprendere come una tal rete diffusa possa connettere fra loro tanto le cellule appartenenti a diverse provincie, quanto i singoli gruppi cellulari.

A costituire tale complicato intreccio di filamenti entrano:

1° Le fibrille emananti dal prolungamento nervoso delle cellule del primo tipo.

2° I prolungamenti nervosi delle cellule del secondo tipo in totalità.

3° Le fibrille emananti da quelle fibre nervose che vanno a mettersi in rapporto diretto colle cellule nervose del primo tipo.

4° Molte fibrille nervose in totalità, quelle cioè fornite dalle complicate ramificazioni delle fibre nervose della seconda categoria.

Le *Cellule della nevroglia* si trovano disseminate in tutte le parti del sistema nervoso centrale. I corpi cellulari hanno per lo più piccole dimensioni; in generale per grandezza stanno al di sotto delle mediocri cellule nervose; hanno forme svariatissime (stellate, rotondeggianti, irregolari ecc.), e sono provvedute di prolungamenti talora numerosissimi (nelle cellule aracniformi), talora scarsi, corti od eccezionalmente lunghi, semplici o ramificati. Tali prolungamenti sono in generale più fini che quelli

delle cellule nervose ed il decorso loro è molto irregolare. Questo carattere, e la piccolezza del corpo cellulare rispetto all' estensione dei prolungamenti, non costituiscono però una qualità esclusiva alle cellule nevrogliche; la sola particolarità per cui si possono sicuramente distinguere questi dagli elementi nervosi è il non essere i primi provveduti di quel processo unico, speciale, che non manca mai negli ultimi.

Nel midollo allungato ed anche in tutto il midollo spinale la nevroglia è così riccamente rappresentata, che le fine sezioni di queste parti colorate semplicemente col picrocarminio offrono un aspetto di reticolo. Questo reticolo di sostegno in vicinanza alle cellule nervose talora non cambia aspetto, talora si fa più denso, e persino compatto, in modo da formar loro una specie di involucro o capsula, la quale non rare volte si continua sui grossi prolungamenti protoplasmatici che da tali cellule derivano.

Le *Cellule epiteliali* tappezzano il canal centrale, le sue dilatazioni, ed i suoi diverticoli. Il corpo cellulare è di forma cilindroconica, la parte cilindrica guarda verso la cavità, e l' apice del cono si prolunga in uno od in molteplici filamenti nell'interno della sostanza nervosa, e può estendersi tanto da attraversare tutto lo strato nervoso. Ad esempio nel midollo spinale e nel midollo allungato di trota, questi prolungamenti dal canal centrale e dal fondo del quarto ventricolo, raggiungono alla periferia la pia madre; il tetto ottico è pure attraversato in tutto il suo spessore da molti di questi prolungamenti.

Voglio qui far notare l' intimo rapporto che passa fra queste cellule epiteliari e le cellule dette della nevroglia. In vero in talune località, in ispecie ai dintorni del canal centrale, ai lati del quarto ventricolo, e nello strato sotto epiteliale del tetto ottico, le cellule della nevroglia sono così numerose, e col mezzo dei loro prolungamenti si frammischiano siffattamente coi prolungamenti delle cellule epiteliali, che è difficile vedere nel risultante intreccio, qual parte abbiano le prime e quali le seconde. Ciò però che resta evidente è la parte spesso molto importante, che ha il tessuto epiteliale dei centri nervosi nella formazione del tessuto di sostegno dei medesimi. Questa identità di ufficio delle cellule nevrogliche e delle cellule epiteliali, e l' intimo vicendevole loro rapporto, come pure l'ugual modo di contenersi ai reattivi, dà un nuovo appoggio alla dottrina sostenuta anche dal Golgi stesso (1), per la quale queste due sorta di elementi avrebbero una comune origine dal foglietto esterno blastodermico.

Cervelletto (v. Tavola II).

Il cervelletto nei teleostei ha forma di una mammella grigiastra a sommità posteriore, aderente per la sua base in avanti ed in basso, libera in addietro.

Facendo eccezione di Weber (2) e di Philippeaux e Vulpian (3), i quali considerarono questa parte come il corpo quadrigemello, gli altri autori concordano tutti circa la sua omologia. Solo vi è disparere nel giudicare a qual parte del cervelletto dei mammiferi essa corrisponda: chi lo considera come rappresentante dell' intera parte

(1) Golgi, opera citata.

(2) Riportato nell' opera di Gottsche, *Vergleichende Anatomie des Gehirns der Gratenfische.*

(3) Philippeau e Vulpian, *Comptes rendus hebdomedaires des séances de l'Académie des sciences.* Tome XXXIV. 1852.

omologa dei mammiferi, chi lo trova corrispondente solo al verme. La sua sezione nel senso sagittale lo mostra simile ad una circonvoluzione qualunque del cervelletto dei mammiferi, non vi ha ganglio centrale; quindi sarebbe piuttosto da raffrontarsi al verme che non all' intero cervelletto.

Lo Stieda distingue nel cervelletto tre strati:

1° Uno strato esterno o corticale (strato molecolare).

2° Una zona di confine (Grenzschicht).

3° Lo strato dei granuli.

La zona corticale composta di una sostanza fondamentale finamente granulosa, non è dappertutto ugualmente spessa, ma in una sezione trasversa appare notevolmente assottigliata nella sua porzione mediana, laddove appunto la zona dei granuli finisce in punta. La zona di confine, che serve di limite alle altre due zone, è data da un fascio di fibre scorrenti parallelamente alla superficie, essa manca verso la parte posteriore superiore del cervelletto, di là comincia qualche fibra ad unirsi in fascio, il quale venendo in giù verso la parte commisurale si fa sempre più robusto. Verso questa parte, su sezioni longitudinali verticali paramediane, si fa distinto in mezzo allo strato dei granuli (che in questo punto è molto ridotto) uno *strato centrale* composto da un fascio di fibre nervose.

Nello *strato esterno o molecolare* si trovano varie forme di elementi nervosi, di cui la maggior parte ricorda e per la forma e per il modo di comportarsi dei loro prolungamenti protoplasmatici le cellule di Purkinje del cervelletto dei vertebrati superiori. La grandezza del corpo cellulare varia da 25 a 40 μ, la forma è ovale, raramente globosa. Le più grandi di queste cellule sono situate nella parte più profonda dello strato, anzi talune entrano nella zona di confine, ma non sono disposte in quella regolare serie che si riscontra nei mammiferi. Le altre cellule occupano senz' ordine la zona, ma per lo più si trovano nelle parti più interne. Anche il modo di ramificazione dei prolungamenti protoplasmatici non serba sempre quella costanza di tipo che riscontrasi nelle cellule di Purkinje. Tale prolungamento è per lo più unico, prende origine generalmente dalla parte più periferica della cellula, e si dirige verso la periferia emanando numerosi rami secondari, i quali tendono pure a portarsi alla superficie somministrando altri rami, che alla lor volta assumono prevalentemente la direzione dei primi, e danno ulteriori divisioni. Ma questo modo di comportarsi soffre numerosissime eccezioni, talora l'unico prolungamento dà soli rami secondarii, i quali non si ramificano più, talvolta alcuni rami prendono direzioni così strane, e si ramificano così singolarmente, che sfuggono ad ogni descrizione. Richiamo qui l' attenzione sulle figure che fanno corredo a questo lavoro, le quali possono valere meglio di qualunque descrizione; solo qui insisto di nuovo sul fatto che all'estremo limite periferico dello strato molecolare, queste ramificazioni vanno a terminare spesse volte con un rigonfiamento.

Lo straordinario sviluppo e la magnifica ramificazione che offrono i prolungamenti protoplasmatici delle cellule grandi dello strato molecolare, dimostra come sia infondata la teoria sostenuta da Obersteiner [1], che omologhe cellule nervose abbiano tanto

[1] Obersteiner, *Der feinere Bau der Kleinhirnsrinde bei Menschen und Thieren.* Biologisches Centralblatt n. 5. P. 145-155.

maggior numero di prolungamenti, e questi si diramino tanto più quanto più in alto siamo nella serie animale.

Gli unici prolungamenti nervosi delle accennate cellule sono diretti, con regola quasi costante, verso lo strato di confine, in cui entrano. Quivi giunti si osserva per i medesimi un duplice modo di contenersi; una parte arrivati in questo strato prendono la direzione del medesimo, e si frammischiano alle fibre che lo compongono, dando nel loro decorso qualche filamento secondario; un' altra parte attraversano tutto questo strato, entrano nella zona dei granuli, e quivi taluni vengono a risolversi completamente in fibrille, mentre altri sembra che si comportino come quelli delle cellule della prima categoria, giacchè li ho veduti dopo un certo decorso finir tronchi ancora allo stato di filamento bene individualizzato.

In questa zona esistono inoltre altre forme cellulari (piriformi, fusate, triangolari di media grandezza), sparse senza ordine. Specialmente nella parte posteriore inferiore del cervelletto si possono notare molte di queste cellule, le quali hanno di singolare che molti dei loro prolungamenti nervosi sono diretti verso la periferia, ed alla periferia in tale località si trova appunto uno straterello costituito da fibre nervose (tav. II, 5).

Le fibre nervose in questa zona sono assai scarse: tranne qualche filamento che dalla zona di confine va forse a mettersi in rapporto coi prolungamenti nervosi delle cellule sparse nello strato, non notasi d'altro che le fibre stesse della zona di confine le quali entrano per breve tratto onde mettersi in relazione diretta colle cellule più periferiche. Solo nella parte posteriore inferiore molte fibrille attraversano in vario senso la zona molecolare. Taluna delle medesime staccatesi dalle fibre della zona di confine, dopo di esser passate attraverso a tutto lo strato molecolare vengono ad immettersi fra le fibre che quivi formano lo strato più periferico. Ho trovato assolutamente mancante nella zona corticale ogni traccia che facesse sospettare dell' esistenza di fibre arcuate, le quali invece sono molto numerose nel cervelletto dei vertebrati superiori (1).

Taluni osservatori, fra cui Mayser ed Obersteiner mettono in questo strato un sistema di fibre radiali, le quali andrebbero a congiungersi coi prolungamenti protoplasmatici degli elementi di Purkinje. Or bene, io nego affatto l' esistenza di questo sistema di fibre; l' aspetto di una striatura radiata che presenta la zona esterna preparata coi metodi comuni è data in parte dai fini prolungamenti protoplasmatici delle cellule nervose di questo strato, che hanno appunto tale direzione, in parte dalle fibrille della nevroglia, che molto numerose attraversano radialmente questo strato.

La *zona di confine* non contiene altri elementi nervosi che fibre, le quali, scarse verso il fondo del cervelletto, a poco a poco si raccolgono in fascio, che diviene sempre più cospicuo mano mano che si avvicina alla parte commissurale. A comporre questo fascio entrano, forse esclusivamente o per lo meno in grandissima parte, le fibre che prendono origine diretta dalle cellule nervose del primo tipo che si trovano nello strato molecolare, i prolungamenti nervosi delle quali si arrestano in questa

(1) Fusari, *Sull' origine delle fibre nervose nello strato molecolare delle circonvoluzioni cerebellari dell' uomo.* Atti della R. Accademia delle scienze di Torino, Vol. XIX.

zona. Io non ho mai potuto constatare se in questo fascio vi siano anche fibre la cui origine sia indiretta, cioè si comportino come quelle che ho ascritto alla seconda categoria.

In questo strato esistono molte cellule della nevroglia. Sono elementi di forma stellata o poligonale, fornite di prolungamenti di cui gran parte entrati nello strato molecolare lo attraversano per giungere talora fino al margine libero.

Nello *strato di granuli* trovansi sparse molte piccole cellule nervose globose (10-20 μ) provvedute di 4-5 prolungamenti protoplasmatici, e di un prolungamento nervoso sottilissimo, che ben presto si toglie di vista. Queste piccole cellule corrispondono alle cellule globose trovate dal prof. Golgi nello stesso strato del cervelletto dei mammiferi.

Verso il fondo dello strato si notano altre forme cellulari nervose, di cui alcune per il modo di comportarsi dell' unico prolungamento protoplasmatico assomigliano alle cellule dello strato molecolare, altre sono di forma varia e sono provvedute di 3-4 prolungamenti protoplasmatici. Alcuni dei processi nervosi di questi elementi si dividono completamente in fibrille, in altra parte sembrano comportarsi alla guisa di quelli delle cellule del primo tipo, perchè ho potuto per buon tratto seguirli, e sebbene dassero fili laterali, i processi tuttavia si mantenevano abbastanza robusti; la loro direzione era verso lo strato delle fibre centrali.

Contrariamente a ciò che osservasi nella zona più esterna, lo strato dei granuli è provveduto di una ricca rete di fibrille. Questa rete è data:

1° Dalle diramazioni del prolungamento nervoso delle cellule del secondo tipo appartenenti alla zona corticale;

2° Dei prolungamenti nervosi delle piccole cellule dello strato dei granuli, e da quelli delle più grandi cellule dello stesso strato che si comportano come cellule del secondo tipo;

3° Dalle diramazioni secondarie del prolungamento nervoso delle cellule del primo tipo appartenenti alla zona corticale ed allo strato dei granuli;

4° Dalle diramazioni secondarie emesse da alcune fibre dello strato di confine;

5° Dalle fibre dello strato centrale le quali, comportandosi come quelle del secondo tipo, vengono a suddividersi completamente in mezzo ai granuli;

6° Dalle fibre del medesimo strato centrale che molto probabilmente attraversano lo strato dei granuli per mettersi in diretto rapporto con alcune cellule del primo tipo nello strato molecolare, oppure entrano nello strato dei granuli per congiungersi col prolungamento nervoso delle più grandi cellule che qui si trovano.

Nello strato in parola si trovano sparse numerose cellule connettive raggiate, i cui prolungamenti incrociandosi in varia guisa si dirigono specialmente verso il centro, in cui si nota un vestigio di ventricolo.

In mezzo ai granuli, verso la base del cervelletto abbiamo detto farsi distinto un fascio di fibre (strato centrale); questo fascio è formato dalla convergenza di numerose fibre dello strato dei granuli, sia che prendano quivi un' origine indiretta, oppure abbiano un' origine diretta dal prolungamento nervoso di qualche cellula.

Valvola del cervelletto (Tav. II).

Questa parte dell' encefalo non è altro che un prolungamento del cervelletto diretto in avanti sotto il tetto ottico di cui occupa gran parte della cavità. Quivi (nei ciprinoidi) si rigonfia lateralmente e verso la superficie superiore le sue parti laterali si rivolgono in alto e si rovesciano poi all' indietro formando una specie di cappuccio alla parte ventrale. Gli autori antichi considerano quasi tutti questa parte come omologa ai tubercoli quadrigemelli. Fu primo Stieda a ravvisare in essa il *velum medullare anterius* (valvola di Vieussens) del cervelletto dei mammiferi, e la chiamò *valvula cerebelli*, omologia la quale ricevette la conferma degli studi posteriori.

In una sezione longitudinale paramediana si scorge molto bene la forma a cappuccio della valvola. Si osserva che la sostanza grigia è la continuazione dello strato corticale del cervelletto, la quale dapprima descrive una curva colla convessità all'in su, e poi rovesciandosi su se stessa, ne descrive un' altra colla concavità in basso. Questa zona nel primo tratto (ventrale) è molto inspessita, ma non così ben delimitata come nel cervelletto, vi ha cioè un graduale passaggio fra la medesima e lo strato granulare, mancando quivi la zona di confine. Nel secondo tratto (parte dorsale) è debole o mancante lo strato dei granuli (esiste solo nelle parti laterali, e quindi visibile solamente in sezioni trasverse), si discerne bene invece uno strato di fibre che sta fra il limite superiore della zona molecolare e la superficie libera.

Le cellule nervose nella *valvula cerebelli* si assomigliano a quelle dello strato molecolare del cervelletto, solo che esse sono molto più disordinatamente disposte, e le ramificazioni dei loro processi protoplasmatici hanno direzioni più strane. In generale quelli delle cellule del tratto ventrale sono volti all' in su, dove molti vanno a toccare la superficie libera terminando in un bottoncino; quelli del tratto dorsale sono volti all' in giù, sempre verso quella parte in cui non esistono fasci di fibre nervose. I processi nervosi sono invece rivolti; o vengono dopo un certo tratto a rivolgersi verso le parti opposte, cioè nella direzione dei fasci delle fibre nervose.

Oltre queste cellule, nella parte ventrale, e precisamente colà dove lo strato aumenta di spessore, vi sono cellule nervose poligonali più grosse delle antecedenti e provvedute di prolungamenti protoplasmatici relativamente corti. In questa stessa posizione la sostanza bianca ha uno spessore considerevole ed in essa, oltre a numerosi fasci di fibre che la percorrono, esiste un' intricatissima rete di fibrille, la quale per la sua stessa complessità non ho potuto analizzare.

Tetto Ottico (Tav. II).

Il tetto ottico è formato da due sottili gusci di sostanza nervosa costituenti la parete del lobo ottico, i quali in alto combaciandosi coi loro rispettivi margini formano un solco longitudinale mediano. Alla parte ventricolare di questo solco corrisponde un cercine longitudinale (*torus longitudinalis*).

Assai divergenti furono le opinioni degli autori circa la determinazione di questa parte. Fra gli autori antichi vi ha un gruppo che considera il tetto ottico od anche tutto il lobo ottico come omologo all'intero cervello dei vertebrati superiori o per lo

meno ad una sua parte (Haller, Camper, Cuvier, Philippeaux e Vulpian ecc.); un altro gruppo ravvisa in tutto il lobo ottico i tubercoli quadrigemelli (Carus, Arsaky, Tiedemann, Serres ecc.); un terzo gruppo infine basandosi su ricerche embriologiche ravvisò nel lobo ottico il mesencefalo ed il cervello intermediario riuniti (Baer, Müller ed altri). Vulpian [1] in seguito ritenne l'intero lobo ottico analogo ai turbercoli guadrigemini. Stieda seppe meglio differenziare le varie parti, anzi si può dire che la determinazione fatta da lui è sostanzialmente quella oggigiorno accettata; per esso il solo tetto del lobo ottico corrisponde al lobo bigemino dei vertebrati superiori, le altre parti o sono dipendenze del cervelletto (*valvula cerebelli*), o appartengono al cervello intermediario (talamo ottico, lobi inferiori).

Fra gli autori più moderni a proposito della determinazione delle omologie del tetto ottico s'impegnò una viva lotta. Da una parte sta specialmente Fritsch il quale ritiene che tale regione rappresenti il cervello intermediario, e che esso sia sviluppato in modo da fungere anche come corteccia cerebrale e precisamente come il mantello degli emisferi cerebrali (*pallium*). Contro questa speciale interpretazione si levarono Mayser, Ahlborn, Rabl-Rückhard ed altri, i quali fondandosi sullo sviluppo embrionale, sulle relazioni del tetto con altre parti dell'encefalo e sulla sua struttura a strati, ascrissero il tetto ottico al mesencefalo e più precisamente al paro anteriore dei tubercoli quadrigemelli dei mammiferi.

La stratificazione del tetto ottico venne rilevata fin dai primi osservatori, ma circa il numero degli strati gli autori discordano. Cuvier ed Haller distinguevano due strati, Serres [2] cinque, Stieda e Fritsch otto, Mayser sei, Bellonci quattordici [3].

Questa suddivisione di strati fatta dal Bellonci mi pare soverchia; io raggruppando in una sola alcune delle sue divisioni per la comodità dell'esposizione e per rispettar meglio i rapporti anatomici distinguo solo sette strati.

Partendo adunque dall'interno all'esterno si trova:

1° Uno strato comprendente l'epitelio cilindrico vibratile ed una formazione sotto epiteliare ricca di nevroglia e di vasi;

2° Uno strato granulare;

3° Uno strato contenente specialmente grosse cellule nervose e fasci di fibre midollari in varia direzione;

4° Un grande strato contenente cellule in prevalenza fusate od ovali;

5° Uno strato di fibre nervose midollari, parallele alla superficie del tetto ottico e, in gran numero, longitudinali;

6° Un sottile strato con qualche cellula nervosa globosa.

7° Uno strato più sottile ancora di tessuto connettivo vascolare posto immediatamente sotto la pia madre.

Primo strato. Tutta la superficie ventricolare del tetto ottico è tappezzata da un epitelio cilindrico. Il contegno degli elementi epiteliali per la sua singolarità merita

(1) Vulpian, *Leçon, sur la phisiologie générale et comparée du sistème nerveux.* Paris 1886.

(2) Serres, *Anatomie comparée du cerveau dans le quatre classes d'animaux* etc. Paris 1824.

(3) Bellonci, *Ricerche intorno all'intima tessitura del cervello dei Teleostei.* Memorie della R. Accademia dei Lincei, Vol. III, 1879, pag. 258.

qualche parola di descrizione. Dalla punta conica del corpo di queste cellule si diparte un prolungamento unico, abbastanza robusto, il quale decorre indiviso per un certo tratto, poi come da un ceppo unico, manda, specialmente verso la periferia, numerosissime ramificazioni, che alla loro volta emanano ancora uno o due rami secondarî, taluni dei quali raggiungono perfino il settimo strato. La disposizione regolarissima di queste cellule, la lunghezza del prolungamento che ne deriva, la quale dalla parte superiore del tetto ottico alle parti laterali va gradatamente crescendo, il modo di ramificazione uniforme, danno a questa formazione un aspetto elegante e caratteristico (Tav. III, 1).

Immediatamente sotto l'epitelio, interposto ai prolungamenti delle cellule epiteliali si trovano numerosissime cellule nevrogliche di forma molto irregolare. Queste coi loro prolungamenti formano un' intricata rete, la quale ravvolge da ogni parte i numerosi e grossi vasi che scorrono in questo strato. Molti prolungamenti, a guisa di quelli delle cellule epiteliali, attraversano verticalmente tutti gli altri strati.

Secondo strato. Corrisponde alla zona designata dagli autori col nome di strato dei granuli, ed è così chiamata perchè trattata coi comuni metodi, essa appare tutta cosparsa di granuli simili per forma e per aspetto a quelli dello strato omonimo del cervelletto, ma un po' più grossi. Circa alla interpretazione di questi granuli non posso nulla aggiungere a quanto fu detto fin quì sul medesimo oggetto (Stieda, Fritsch, Bellonci).

Questa zona è solcata da numerosi fasci di fibre scorrenti in senso trasversale parallelamente alla superficie libera. Su sezioni verticali cadenti nella parte posteriore del tetto, si possono anche vedere numerosissime fibre (corona raggiata di Gottsche) provenienti dal nastrino di Reil o dal *torus semicircularis* sottoposto, che si recano in questo strato, oppure attraversandolo obbliquamente si prolungano nella terza ed anche nella quarta zona.

Quivi la nevroglia è riccamente rappresentata: essa si offre specialmente sotto forma di cellule fusate col grande asse disposto in direzione perpendicolare alla superficie. I prolungamenti che ne derivano sono paralleli a quelli delle cellule epiteliali accennate nel primo strato, e come quelli concorrono a formare lo stroma di sostegno a tutto il tetto ottico.

Terzo strato. In questa zona sono disseminate cellule nervose piuttosto grosse (25-30μ), di forma per lo più triangolare. Dagli angoli superiori si staccano i prolungamenti protoplasmatici, i quali espandono all' in su e lateralmente le loro ramificazioni (Tav. I, fig. 7, 8); dall'angolo inferiore prende origine il processo nervoso di cui non ho potuto seguire che rare volte le sorti ulteriori. Nei casi constatati esso andava a mettersi in rapporto diretto colle fibre midollate esistenti nello strato. A lato di queste grandi cellule nervose se ne trovano molte altre piccole, globose o fusate.

Numerosissime sono le fibre nervose che vengono ad immettersi nello strato in discorso. Esse assumono varia direzione: antero-posteriore, obbliqua, trasversale. Le fibre trasversali sono interne alle longitudinali, e costituiscono un fascio tanto considerevole, che vari autori lo considerano come una zona particolare. L'avere io però trovato intercalate al medesimo molte cellule nervose simili a quelle che si trovano immediatamente sotto ed anche un po' al di sopra, mi ha fatto decidere a considerare

tanto i fasci nervosi come le cellule in una sola zona. Queste fibre trasversali sono formate in gran parte dalle fibre della corona raggiata. Il fascio longitudinale, meno ragguardevole, sarebbe dato da fibre provenienti verso l'avanti dal talamo ottico, ed anche secondo alcuni (Mayser) da fibre provenienti dal nervo ottico; io però non ho mai potuto constatare quest' ultimo fatto. I fasci obbliqui sono forniti dalle fibre della corona radiata che attraversano questo strato per recarsi in quello situato immediatamente più all' esterno.

Gran numero di fibre nervose e di fibrille secondarie distaccatesi da tutti questi fasci si distribuiscono fra le cellule nervose di questa zona ed alle zone vicine.

Quarto strato. Questa zona è la più considerevole, ed anche, parmi, la più importante. Essa contiene numerose forme cellulari nervose, ed una fitta rete di fibre nervose.

Sono prevalenti alcune forme cellulari nervose che ricordano davvicino quelle dello strato molecolare del cervelletto (Tav. I, fig. 4), ma sono più piccole di queste ultime, ed il corpo cellulare è anche più schiacciato e passa per varie gradazioni alla forma fusata munita di due prolungamenti protoplasmatici. Quando il prolungamento protoplasmatico è unico, esso è sempre diretto verso la periferia, quando è duplice, uno prende questa stessa direzione, l' altro si dirige dal lato opposto. Il prolungamento diretto verso la periferia d'ordinario non ramifica subito; solitamente è verso il limite periferico dello strato quando comincia a mandar rami, anzi talora attraversa tutta la zona, sorpassa anche il fascio delle fibre periferiche, e giunto nel sesto strato comincia solo allora a dividersi. Molti rami che ne derivano prendono poi una direzione parallela allo strato e dopo un certo tratto risalgono di nuovo mandando ulteriori divisioni, le cui estremità entrando anche nel settimo strato finiscono in parte col solito rigonfiamento. — I prolungamenti nervosi di queste cellule staccatisi dai poli inferiori delle medesime, prendono una direzione che può variare per ciascuna cellula. Il loro contegno ulteriore è duplice: alcuni si comportano come quelli delle cellule del primo tipo, altri come quelli delle cellule del secondo tipo. Circa quelli della prima serie in una piccola trota ho potuto constatarne uno, il quale entrato nelle fibre trasverse del terzo strato decorreva fra queste fino a raggiungere il *torus semicircularis.* Anche di quelli della seconda serie ho trovati esempi spiccatissimi, e di uno ho riportato il disegno sulla tavola I (fig. 5). I prolungamenti nervosi delle cellule del primo tipo avevano tutti la direzione in basso, ed entravano nello strato delle fibre interne, quelli della seconda serie non avevano direzione determinata; alcuni si volgevano all'interno, altri all'esterno, altri infine scorrevano longitudinalmente per lunghi tratti, tutti espandevano le loro ramificazioni nello spessore dello strato.

Oltre questa maniera di cellule, nello strato in discorso si trovano altre forme cellulari nervose, fusate od irregolari, un po' più grosse delle prime, provvedute di lunghi prolungamenti protoplasmatici estendentisi in direzioni diverse. Il contegno dei processi nervosi di queste cellule è uguale a quello delle cellule precedenti.

A comporre il notevole intreccio di fibrille nervose di questo strato entrano;

1° I prolungamenti nervosi delle cellule esistenti nella zona, i quali si dividono *in toto*;

2° I ramuscoli emanati dai prolungamenti nervosi delle cellule del primo tipo appartenenti allo strato;

3° I rami terminali delle fibre del secondo tipo appartenenti alla terza zona;

4° Le fibrille secondarie emanate da alcune fibre della stessa terza zona;

5° Le diramazioni terminali delle fibre provenienti dalla quinta zona.

Quinto strato. Le fibre componenti questa zona dalla maggior parte degli autori sono considerate come fibre d'origine del nervo ottico; il Bellonci anzi afferma che il nervo ottico origina esclusivamente da esse. I miei reperti concordano di più con quelli di Mayser, il quale constatò che il nervo ottico si divide in due fasci, uno esterno più considerevole che si immette nella quinta zona, l'altro interno più debole che va nel talamo ottico. Fritsch pure ammette questa divisione in due fasci, ed io conservo su tal proposito alcuni preparati molto dimostrativi.

Le fibre del quinto strato vanno ad irradiarsi in grande prevalenza nella quarta zona, dove, credo, terminano tutte dividendosi in totalità, poichè per nessuna di esse ho potuto constatare una continuazione diretta con un prolungamento nervoso. Questo irradiamento delle fibre nella quarta zona avviene specialmente verso la metà esterna di questa, motivo per cui questa metà ha un aspetto più chiaro che quella interna. Alcune fibre della quarta zona sono dirette anche nello strato più esterno.

Sesto strato. Quest'ultima zona nervosa è occupata in gran parte dall'intreccio dei rami protoplasmatici delle cellule del quinto strato. Si trovano qui sparse delle piccole cellule globose provvedute di 4-5 prolungamenti protoplasmatici, e di un prolungamento nervoso la cui sorte non ho potuto seguire.

Circa alle fibre nervose questo strato, oltre le poche che riceve da quello più interno, è fornito di un grosso fascio, il quale dopo avere attraversato la commessura che unisce i due tetti ottici si pone alla parte inferiore del terzo strato, e giunto a qualche distanza del *torus longitudinalis* attraversa in senso obliquo e dall'interno all'esterno gli altri strati per raggiungere il sesto. Quivi si divide in due rami: uno, più considerevole, va all'esterno ed al basso, l'altro ritorna in su e verso l'interno. Sembra che tutte le fibre componenti tali fasci si disperdano nello strato in discorso.

Data così la struttura anatomica del tetto dei lobi ottici, è dessa comparabile alla struttura delle eminenze bigemine anteriori dei mammiferi? Senz'altro si può dare una risposta affermativa. Fra la numerosa schiera di osservatori che si occuparono dello studio di questa parte trovasi Tartuferi (1) il quale appunto studiò le eminenze bigemine anteriori dell'uomo collo stesso metodo che io ho applicato al tetto ottico dei teleostei. Questo osservatore distingue nei tubercoli quadrigemelli anteriori sette strati, di cui due connettivi (primo ed ultimo), cinque nervosi, appunto come risulta dal mio studio. La disposizione però degli strati è diversa: nell'uomo la zona nervosa superficiale è quella data dalle fibre del nervo ottico, nei pesci lo strato nervoso più esterno è grigio; per compenso manca nei teleostei la così detta *cappa cinerea* la quale nell'uomo compone il 5° strato, non vi ha dunque che una semplice trasposizione di strati. Il 4° ed il 3° strato si corrispondono perfettamente, massime se si considera la derivazione delle rispettive fibre, il 2°

(1) F. Tartuferi, *Sull'anatomia minuta delle eminenze bigemine anteriori dell'uomo.* Milano, 1885.

strato « grigio centrale » è rappresentato nei pesci della zona dei granuli. Adunque anche il reperto istologico viene sempre più a confermare la dottrina che considera il tetto del lobo ottico dei pesci come omologo alle eminenze bigemine anteriori dei mammiferi.

Il professor Golgi nel suo lavoro sul sistema nervoso centrale, oltre aver fatta la distinzione delle cellule e delle fibre nervose nei due tipi che ho più volte ricordato, avanza anche la supposizione che le cellule del primo tipo, le quali colle fibre nervose sarebbero in rapporto diretto non isolato, siano di *natura motrice*, e che siano invece di *natura sensitiva* le cellule del secondo tipo, le quali colle fibre sarebbero in rapporto indiretto, e che quindi le *fibre motrici* avrebbero un'origine diretta non isolata, e le *fibre sensitive* un origine indiretta. Ora questa supposizione non è punto infirmata dai risultati delle presenti ricerche, anzi mi pare venga per questo ad avere un nuovo appoggio. Infatti le fibre nervose del quinto strato del tetto ottico, le quali costituiscono le fibre d'origine del nervo ottico, hanno, come fibre sensitive, alla lor volta un'origine indiretta del complicato intreccio di fibrille esistenti nello strato sottoposto.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Tav. I. — Varî tipi di cellule nervose a 100 diametri di ingrandimento:
Fig. 1-3. Cellule dei lobi anteriori e del talamo ottico;
» 4-8. Cellule del tetto ottico;
» 9-14. Cellule dello strato granulare del cervelletto (granuli);
» 15-17. Cellule dello strato molecolare del cervelletto;
» 18-19. Cellule della valvola del cervelletto;
» 20. Cellula del midollo allungato.

Tav. II. — Sezione sagittale paracentrale del cervelletto di *carassius* (ingrandimento 50 diametri).
A Cervelletto: 1. Zona corticale;
2. Zona di confine;
3. Zona dei granuli;
4. Fibre centrali.
B Valvola del cervelletto;
C Tetto del lobo ottico;
D Midollo allungato.

Tav. III. — Sezione trasversa del tetto ottico della tinca (80 diam.).
A Tetto ottico (gli strati sono indicati dai numeri);
B Ventricolo del lobo ottico;
C Torus semicircularis;
D Corona raggiata di Gottsche

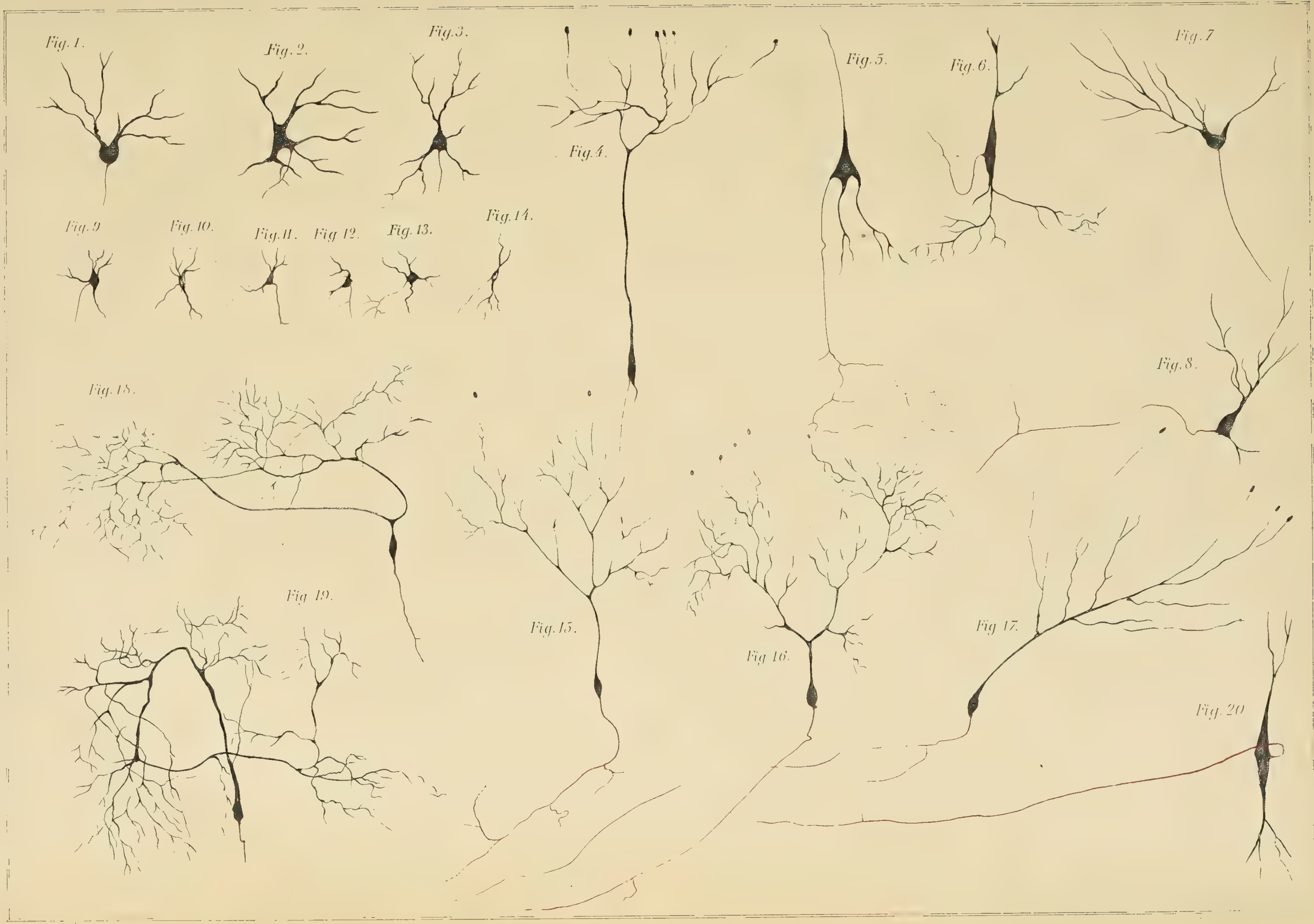
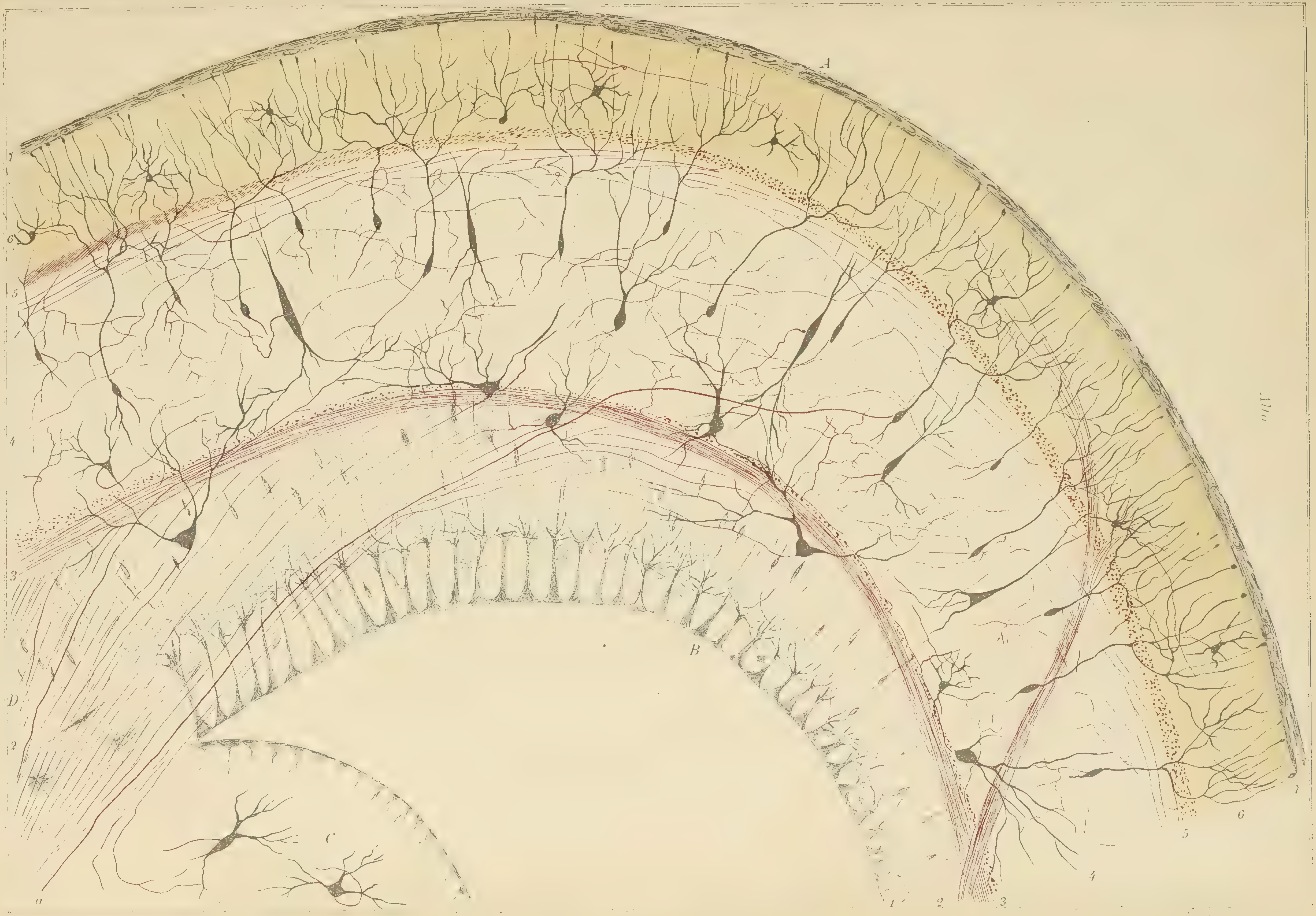


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7
Fig. 8.
Fig. 9
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig 16.
Fig 17.
Fig. 18.
Fig 19.
Fig. 20

A
B
C
D
1
2
3
4
5


A
B
C
D
a
1
2
3
4
5
6
7
Alto

Verbesserungen und Zusätze zu den Bemerkungen über die Laméschen Functionen.
(Collectanea mathematica in Memoriam D. CHELINI p. 277)

Memoria del Socio straniero LUDOVICO SCHLAEFLI

letta nella seduta del 1 maggio 1887.

Ein schwerer Irrthum ligt in den Worten (p. 277 unten) « ohne Hülfe bestimmter Integrale », und (p. 279, l. 16) « Weil a, b, c reell sind, so sind die imaginären Unbekannten paarweise conjugiert ». Denn dieser Schluss setzt voraus, dass im Polinome

$$Q = x^{\nu} - d_1 x^{\nu-1} + \cdots + (-1)^{\nu} d_{\nu}$$

die Constanten $d_1, d_2, \ldots, d_{\nu}$ alle reell seien, und das kann ich nur mit Hülfe eines bestimmten Integrales beweisen. Ich will zunächst diesen Fehlen verbessern.

Die Lamésche Function n^{ten} Grades sei

$$P(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}(x-c)^{\gamma} Q(x), \qquad n = 2(\nu+\alpha+\beta+\gamma).$$

Wenn ein Halbaxenquadrat negativ wird, z. B. $x-c$, so nehme ich $\log(x-c) = i\pi + \log(c-x)$ an und verstehe $\log(c-x)$ reell. Demnach bekommen dt, dt', dt'' nicht die selben Werthe als dort (p. 283), sondern die entgegengesetzten. Es ist bequemer, beim Ellipsoïde $\sqrt{ABC} = \sqrt{\Pi(x-a)}$ positiv zu verstehn; dann sind $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{ABC}}$, $\frac{dt'}{dx'}$, $\frac{dt''}{dx''}$ der Reihe nach positiv, südlich lateral, negativ. Die Function $P(x)$ ist durch die Gleichung

$$\frac{1}{P}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = n(n+1)x + E$$

definiert, wo

$$E = (4n-2)(d_1 + \alpha a + \beta b + \gamma c) - n^2(a+b+c).$$

Vermöge der dortigen Recursionsscale (3) erscheint d_{λ} als ganze Function λ^{ten} Grades von d_1 mit reellen Coëfficienten, und aus der Bedingung $d_{\nu+1} = 0$ geht endlich eine Gleichung (4) vom Grade $\lambda+1$ für die einzige Unbekannte d_1 hervor, in der alle Coëfficienten reell sind. Daraus folgt aber, dass allfällige imaginäre Wurzeln der Gl. (4) nur paarweise conjugiert vorkommen können. Wenn nun x nur reelle Werthe durchläuft, so sind auch die zu zweien conjugierten Wurzeln d_1 gehörenden Polinome Q mit einander conjugiert.

Es sollen nun (E, P), (E_1, P_1) zur selben Gruppe (n, α, β, γ), aber zu verschiedenen Wurzeln der Gl. (4) gehören. Aus der Differentialgleichung folgt dann

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(P\frac{\partial P_1}{\partial t} - P_1\frac{\partial P}{\partial t}\right) = (E_1 - E)\,PP_1\,;$$

wenn $\alpha = 0$, so sind P, P_1 in $x = a$ nicht null, aber $\frac{\partial P}{\partial t}, \frac{\partial P_1}{\partial t}$ verschwinden wie $\sqrt{x-a}$; wenn dagegen $\alpha = \frac{1}{2}$, so verschwinden hier P, P_1 wie $\sqrt{x-a}$, und $\frac{\partial P}{\partial t}, \frac{\partial P_1}{\partial t}$ bleiben endlich. Daher verschwindet $P\frac{\partial P_1}{\partial t} - P_1\frac{\partial P}{\partial t}$ in a, b, c. Von dem Unterschiede der zwei betreffenden Wurzeln der Gl. (4) unterscheidet sich aber $E_1 - E$ nur durch den Factor $4n - 2$ und kann daher nicht verschwinden. Desshalb sind

$$\int_{x=a}^{x=b} PP_1\,dt = 0\,, \qquad \int_{x=b}^{x=c} PP_1\,dt = 0\,;$$

und da diese Gleichungen für conjugierte Wurzeln d_1 unmöglich sind, so sind alle $\nu+1$ Wurzeln der Gleichung (4) reell. Jetzt erst gelten die auf p. 279 und p. 281 aus dem Systeme (2) gezogenen Schlüsse, die also auf das von *Lamé* gebrauchte Integral sich stützen.

Sonst sind noch folgende Druckfehler zu verbessern.

p. 279 unterste Zeile,	$(\varepsilon - \eta)^2$	statt	$(\varepsilon + \eta)^2$;
p. 281, l. 17.	$(X_1 - X_2)^2$	statt	$(X_1 - X_2)$;
p. 285, l. 16.	$I = 4i\pi N$	statt	$I = 4\pi N$;
in der letzten Zeile	γ_n^2	statt	γ_n .

Es war dort von der Entwicklung einer Function des Punktes (x', x'') der Oberfläche (x) des gegebenen Ellipsoïdes die Rede, und am Schlusse ward gesagt, dass der bei der Coëfficientenbestimmung auftretende Nenner

$$N = \frac{1}{4i\pi}\iint (x' - x'')\,P^2(x')\,P^2(x'')\,dt'\,dt'' \text{ (über die ganze Oberfläche)}$$

wahrscheinlich durch ein einziges Product dar gestellt werden könne. Ich gehe daran, dieses Product N aus den Bedingungen seines Verschwindens her zu stellen. Aus dem auf p. 285 gesagten geht hervor, dass N eine ganze Function von a, b, c, E, also eine nur von der Gl. (4) $(\nu+1)^{ten}$ Grades abhangende algebraische homogene Function der zwei Constanten $b - a$, $c - a$ ist, deren Ordnung in Bezug auf lineare Abmessungen $4n$ beträgt. $N = 0$ ist eine einzige Bedingung für die einzige Zahl $\frac{b-a}{c-a}$ (sei $= k^2$), und es ist klar, dass nur ein imaginärer Werth von k^2 die Bedingung erfüllen kann. Wenn daher auch scheinbar zwei Bedingungen an die Stelle von $N = 0$ gesetzt werden, so müssen diese zusammen für das selbe k^2 bestehn. Vorhin waren zwei Gleichungen

$$\int_{x=a}^{x=b} PP_1\,dt = 0\,, \quad \text{und} \quad \int_{x=b}^{x=c} PP_1\,dt = 0$$

zugleich erfüllt. Man braucht nun bloss die zwei betreffenden Wurzeln der Gleichung (4), nämlich E, E_1, zusammen fallen zu lassen, um die zwei mit einander verträglichen Gleichungen

$$\int_{x=b}^{x=c} P^2(x')\,dt' = 0\,, \qquad \int_{x=a}^{x=b} P^2(x'')\,dt'' = 0$$

zu erlangen, welche $N = 0$ bewirken. Es ist keine Anzeige vorhanden, dass bei der Annäherung N von einer andern Ordnung der Kleinheit als $E_1 - E$ sei. Darum muss N, wenn $P(x)$ zur Wurzel E gehört, und die übrigen Wurzeln der Gleichung (4) mit $E', E'', \ldots, E^{(\nu)}$ bezeichnet werden, durch $(E - E')(E - E'')\ldots(E - E^{(\nu)})$ theilbar sein. Dieser Ausdruck zählt 2ν in Bezug auf lineare Abmessungen.

N kann zweitens verschwinden, indem alle Elemente des Doppelintegrales verschwinden, folglich, indem entweder $P(x')$ in seinem ganzen Intervalle $b < x' < c$ verschwindet, oder indem $P(x'')$ im Intervalle $a < x'' < b$ verschwindet. Da eine algebraische Function von x nicht längs einer endlichen Strecke verschwinden kann, so wird die Sache erst durch das Verschwinden des betreffenden Intervalles möglich gemacht. Da beide Fälle, $c - b = 0$ und $b - a = 0$, algebraisch nicht verschieden sind, so genügt es, den zweiten Fall zu betrachten.

Im Folgenden soll $P^{(2\alpha)}(x)$ entweder $P(x)$ oder $\dfrac{\partial P(x)}{\partial t}$ bedeuten, je nachdem $2\alpha = 0$ oder $= 1$ ist. Wenn $b - a$ positiv unendlich klein wird, so ist man veranlasst,

$$a = 0, \qquad A' = x' = c\,\sin^2\theta\,, \qquad A'' = x'' = b\,\sin^2\varphi$$

zu setzen, so dass

$$dt' = \frac{-i}{\sqrt{c}}\,\frac{d\theta}{\sin\theta}\,, \qquad dt'' = -\frac{d\varphi}{\sqrt{c}}$$

werden. $\left(P(x'')\right)^2$ bekommt die Form

$$const. \times b^m\, c^{n-m} \cos^2(m\varphi - \alpha\pi),$$

während $\left(P(x')\right)^2$ endlich bleibt. ($m = 0, 1, 2, \ldots n$; wenn $m = 0$, so sind nothwendig $\alpha = 0$, $\beta = 0$). Daher ist N klein von der Ordnung b^m. Von der selben Ordnung der Kleinheit ist aber auch $P^{(2\alpha)}(a)\,P^{(2\beta)}(b)$, während $P^{(2\gamma)}(c)$ endlich bleibt. Nimmt man den Fall $c - b = 0$ hinzu, so kann man sagen, bei der zweiten Art des Verschwindens werde N immer klein von der selben Ordnung als $P^{(2\alpha)}(a)\,P^{(2\beta)}(b)\,P^{(2\gamma)}(c)$. Da $P^{(2\alpha)}(a)$ in Bezug auf lineare Abmessungen von der Ordnung $n + 2\alpha$ ist, so kommt dem Producte die Zahl

$$3n + 2(\alpha + \beta + \gamma) = 4n - 2\nu$$

zu. Der Ausdruck

$$\mathfrak{p} = (E - E')(E - E'')\ldots(E - E^{(\nu)})\,P^{(2\alpha)}(a)\,P^{(2\beta)}(b)\,P^{(2\gamma)}(c)$$

ist also in Bezug auf lineare Abmessungen von der Ordnung $4n$, ebenso wie N, und verschwindet als homogene algebraische Function der zwei Elemente $b - a$, $c - a$ nur zugleich mit N, und zwar so, dass sie von der selben Ordnung unendlich klein wird. Weil die Dimensionszahl $4n$ erschöpft ist, so ist es nicht wahrscheinlich, dass es noch

solche Fälle gebe, wo N verschwindet, jenes Product $\mathfrak{p}$ aber nicht; sondern beide werden sich nur durch einen numerischen Factor unterscheiden.

Es gilt, diesen Factor für den Fall, wo $b-a$ positiv unendlich klein wird, zu finden. Wenn $b < x' < c$, so kann man geradezu $a = b = 0$ setzen. Die Recursions-scale (3) wird

$$(\lambda+1)(2n-2\lambda-1)d_{\lambda+1} = \Big[(2n-1)d_1 + 2c\big(\lambda^2-(n-2\gamma)\lambda\big)\Big]d_\lambda.$$

Weil $d_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_\nu$, und weil die Wurzeln $x_1, x_2, \ldots$ der Gleichung $Q(x)=0$ sämmtlich zwischen 0 und c ligen, so ist d_1 positiv. Es seien

$$n-2\gamma = \varepsilon + \zeta, \quad \frac{2n-1}{2c}\,d_1 = \varepsilon\zeta;$$

ε, ζ sind entweder beide conjugiert, oder beide positiv;

$$\frac{d_{\lambda+1}}{d_\lambda} = -c\cdot\frac{(\lambda-\varepsilon)(\lambda-\zeta)}{(\lambda+1)(\lambda-n+\frac{1}{2})},$$

$$Q(x') = x'^{\nu}\,F\left(-\zeta, -\varepsilon, -n+\tfrac{1}{2}, \frac{c}{x'}\right)$$

soll eine ganze Function sein; also können ε, ζ nicht imaginär sein, sondern eine der zwei Zahlen muss ganz sein; dann ist es aber auch die andere. Es sei $\varepsilon \gtreqless \zeta$. Dann ist Q durch $x'^{\nu-\zeta}$ theilbar; der Quotient ist

$$R = x'^{\zeta}\,F\left(-\zeta, -n+2\gamma+\zeta, -n+\tfrac{1}{2}, \frac{c}{x'}\right).$$

Wendet man den Satz

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1-x)^{-\alpha}\,F\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \frac{x}{x-1}\right)$$

an und macht $x' = c\sin^2\theta$, $u = \cos\theta$, so ist

$$R = (-1)^{\zeta} c^{\zeta} u^{2\zeta}\,F\left(-\zeta, -\zeta-2\gamma+\tfrac{1}{2}, -n+\tfrac{1}{2}, \frac{1}{u^2}\right).$$

Weil $\nu-\zeta$ nicht negativ werden darf, so kann ζ nur die Werthe $0, 1, 2, \ldots, \nu$ durchlaufen. Setzt man

$$m = \varepsilon - \zeta = n - 2\gamma - 2\zeta = 2(\nu - \zeta + \alpha + \beta),$$

so kann man m nur für $\zeta = \nu$ null werden lassen, also nur, indem $\alpha = \beta = 0$; und man hat

$$\zeta = \frac{n-m}{2} - \gamma, \; \varepsilon = \frac{n+m}{2} - \gamma, \; \zeta + 2\gamma - \tfrac{1}{2} = \frac{n-m}{2} + \gamma - \tfrac{1}{2}.$$

Wenn m ein geführt ist, so tauschen die zwei obern Parameter der letzten Function F bloss mit einander, mag $\gamma = 0$ oder $= \frac{1}{2}$ sein. Also ist

$$Q(x') = (-1)^{\zeta} c^{\nu} (1-u^2)^{\nu-\zeta} u^{2\zeta}\,F\left(-\frac{n-m}{2}, -\frac{n-m-1}{2}, -n+\tfrac{1}{2}, \frac{1}{u^2}\right).$$

Weil $P(x') = i^{2\gamma} c^{\alpha+\beta+\gamma} (1-u^2)^{\alpha+\beta} u^{2\gamma} Q(x')$, so ergibt sich

$$P(x') = i^{n-m} c^{\frac{n}{2}} (1-u^2)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{(n-m)!}{(2n)!} \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^{n+m} (u^2-1)^n. \tag{1}$$

Weil $dt' = \frac{-i}{\sqrt{c}} \frac{d\theta}{\sin\theta} = \frac{i}{\sqrt{c}} \frac{du}{1-u^2}$, so findet man

$$P^{(2\gamma)}(c) = 2^{2\gamma} \frac{n!\,(n+m)!\,(n-m)!}{(2n)! \left(\frac{n+m}{2}-\gamma\right)! \left(\frac{n-m}{2}-\gamma\right)!} c^{\frac{n}{2}+\gamma} \tag{2}$$

Die Gleichungen (1), (2) gelten für alle Werthe von m.

Hier kann sich sogleich die Berechnung von

$$p = (E-E')(E-E'')\cdots(E-E^{(\nu)})$$

an reihen. Weil

$$E - E' = (4n-2)(d_1 - d'_1), \quad (4n-2)\, d_1 = 4c\zeta(n-2\gamma-\zeta),$$

so ist, wenn man $(4n-2)\, d'_1 = 4c\lambda(n-2\gamma-\lambda)$ setzt,

$$E - E' = 4c(\zeta-\lambda)(\varepsilon-\lambda);$$

dieser Ausdruck ist über $\lambda = 0, 1, \ldots, \nu$ mit Ausnahme von $\lambda = \zeta$ zu multiplicieren. In dem besonders zu betrachtenden Falle, wenn $m = \varepsilon - \zeta = 0$, also $\zeta = \nu$, ist

$$p = 2^{2\nu} c^{\nu} \prod_{\lambda=0}^{\lambda=\nu-1} (\nu-\lambda)^2 = 2^{2\nu} c^{\nu} (\nu!)^2 = 2^{n-2\gamma} \left[\left(\frac{n}{2}-\gamma\right)!\right]^2 c^{\frac{n}{2}-\gamma}.$$

Im allgemeinen Falle ist

$$p = (-1)^{\nu-\zeta} \frac{1}{m} \frac{(\nu-\zeta)!}{(\varepsilon-\nu-1)!} \varepsilon!\,\zeta!\,2^{2\nu} c^{\nu}$$

$$= i^{m-2\alpha-2\beta}\, 2^{n-2\gamma-1} \left(\frac{1}{m}\right)^{2\alpha+2\beta} \left(\frac{n+m}{2}-\gamma\right)! \left(\frac{n-m}{2}-\gamma\right)! \, c^{\frac{n}{2}-\alpha-\beta-\gamma};$$

nur, wenn $m=0$, folglich $\alpha=0$, $\beta=0$, ist die unbestimmt werdende Zahl $\left(\frac{1}{m}\right)^{2\alpha+2\beta}$ durch 2 zu ersetzen. Wenn $\nu=0$, so ist $p=1$; (schon im Vorigen enthalten). Man hat nun im allgemeinen

$$pP^{(2\gamma)}(c) = i^{m-2\alpha-2\beta}\, 2^{n-1} \left(\frac{1}{m}\right)^{2\alpha+2\beta} \frac{n!\,(n+m)!\,(n-m)!}{(2n)!} c^{\frac{n}{2}-\alpha-\beta}, \tag{3}$$

wo, für $m=0$, $\left(\frac{1}{m}\right)^{2\alpha+2\beta} = 2$ sein soll.

Nun soll die ganze Function $Q(x'')$ dargestellt werden, wo $x'' = b\sin^2\varphi$, b positiv sehr klein. Wenn man dasjenige weglässt, was die Ordnung b übersteigt, so wird die Recursionsscale (3) p. 280 zu

$$(\lambda+1)(\lambda-n+\tfrac{1}{3})\frac{d_{\lambda+1}}{c} + \left[\lambda^2 - (n-2\gamma)\lambda + \frac{2n-1}{2c} d_1 + \frac{b}{c}\lambda(\lambda-n+2\beta)\right] d_\lambda$$
$$+ (\nu-\lambda+1)(\nu-\lambda+2\alpha+\tfrac{1}{2})\, b d_{\lambda-1} = 0. \tag{4}$$

Wenn, wie vorher, ζ eine der Zahlen 0, 1, 2, ..., ν bedeutet, so muss

$$\frac{(2n-)d_1}{2c} - \zeta(n-2\gamma-\zeta)$$

mit b von der selben Ordnung der Kleinheit sein, und $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_\zeta$ werden von den früher angegebenen endlichen Werthen nur um ein kleines von der Ordnung b ab weichen. Namentlich ist

$$d_\zeta = \frac{\varepsilon!}{m!}\,\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2}-\zeta)}{\Gamma(n+\frac{1}{2})}\,c^\zeta = 2^{2\zeta}\frac{\varepsilon!}{(n-\zeta)!}\,\frac{n!(2n-2\zeta)!}{m!(2n)!}\,c^\zeta$$

$$= 2^{n-m}\left(\frac{\left(\frac{n+m}{2}-\gamma\right)!}{\left(\frac{n+m}{2}+\gamma\right)!}\,\frac{(n+m+2\gamma)!}{2^{2\gamma}}\right)\frac{n!}{m!(2n)!}\,c^{\frac{n-m}{2}-\gamma};$$

also, weil $(\cdots)=(n+m)!$, mag $\gamma=0$ oder $=\frac{1}{2}$ sein, ist $d_\zeta = 2^{n-m}\dfrac{n!(n+m)!}{m!(2n)!}\,c^{\frac{n-m}{2}-\gamma}$ mit einem Fehler von der Ordnung b. Im Ausdrucke für $Q(x'')$ sind alle dem Terme $(-1)^\zeta d_\zeta x''^{\nu-\zeta}$ vorangehenden Terme als klein höherer Ordnung zu vernachlässigen.

Setzt man in (4) $\lambda=\nu$, so erkennt man, weil $d_{\nu+1}=0$ sein muss, dass $bd_{\nu-1}$ klein von derselben Ordnung mit d_ν ist. Bei $\lambda=\nu-1$ fällt d_ν als klein höherer Ordnung neben $d_{\nu-1}$ und $bd_{\nu-2}$ weg, und man sieht, dass d_ν, $bd_{\nu-1}$, $b^2d_{\nu-2}$ klein von der selben Ordnung sind. Fährt man so fort, so ergeben sich

$$d_\nu,\ bd_{\nu-1},\ b^2d_{\nu-2},\ b^3d_{\nu-3},\ \ldots,\ b^{\nu-\zeta}d_\zeta$$

als klein von der selben Ordnung. Die Gleichung (4) verliert den ersten Term und wird, indem man $\nu-\lambda$ statt λ schreibt,

$$\frac{b^{\lambda+1}d_{\nu-\lambda-1}}{b^\lambda d_{\nu-\lambda}} = \frac{(\lambda+\varepsilon-\nu)(\nu-\zeta-\lambda)}{(\lambda+1)(\lambda+2\alpha+\frac{1}{2})},$$

gibt also

$$Q(x'') = (-1)^\nu F(-(\nu-\zeta),\ \varepsilon-\nu,\ 2\alpha+\tfrac{1}{2},\ \sin^2\varphi), \tag{5}$$

$$\left(\text{für } m=0 \text{ ist } Q(x'')=(-1)^\nu d_\nu = i^{n-2\gamma}\,2^n\frac{n!\,n!}{(2n)!}\,c^{\frac{n}{2}-\gamma}\right)$$

und

$$b^{\nu-\zeta}d_\zeta = \frac{(\varepsilon-\nu)(\varepsilon-\nu+1)\cdots(m-1)}{(2\alpha+\frac{1}{2})(2\alpha+\frac{3}{2})\cdots(\nu-\zeta+2\alpha-\frac{1}{2})}\,d_\nu,$$

endlich

$$d_\nu = 2^{n-2m-1}\,m^{2\alpha}\,\frac{n!(n+m)!}{m!(2n)!}\,b^{\frac{m}{2}-\alpha-\beta}\,c^{\frac{n-m}{2}-\gamma};$$

aber für $m=0$ ist $m^{2\alpha}$ durch $\frac{1}{2}$ zu ersetzen. Weil der Factor

$$x''^\alpha(x''-b)^\beta(x''-c)^\gamma = i^{2\beta+2\gamma}\,b^{\alpha+\beta}\,c^\gamma\,\sin^{2\alpha}\varphi\,\cos^{2\beta}\varphi$$

wird, so ist, wenn man der Kürze wegen

$$g = 2^{n-2m+1}\,\frac{n!(n+m)!}{m!(2n)!}\,b^{\frac{m}{2}}\,c^{\frac{n-m}{2}}$$

setzt,

$$P(x'') = i^{n-2\alpha}\,m^{2\alpha}\,g\,\sin^{2\alpha}\varphi\,\cos^{2\beta}\varphi\times$$

$$\times F\left(-\left(\frac{m}{2}-\alpha-\beta\right),\ \frac{m}{2}+\alpha+\beta,\ 2\alpha+\tfrac{1}{2},\ \sin^2\varphi\right),$$

also vermöge bekannter Sätze

$$P(x'') = i^{n-2\alpha}\, g \cos(m\varphi - \alpha\pi), \quad (\text{halb für } m = 0). \qquad (6)$$

Hieraus ergeben sich

$$P^{(2\alpha)}(a) = i^{n+2\alpha}\, m^{2\alpha}\, c^{\alpha} g, \quad P^{(2\beta)}(c) = i^{n-m+2\beta}\, m^{2\beta}\, c^{\beta} g;$$

für $m = 0$ sind $m^{2\alpha}$, $m^{2\beta}$ durch $\frac{1}{2}$ zu ersetzen;

$$P^{(2\alpha)}(a)\, P^{(2\beta)}(b) = i^{2n-m+2\alpha+2\beta}\, m^{2\alpha+2\beta}\, c^{\alpha+\beta} g^2, \qquad (7)$$

für $m = 0$ ist $m^{2(\alpha+\beta)}$ durch $\frac{1}{4}$ zu ersetzen.

Multipliciert man die Gleichungen (3) und (7) mit einander, so bekommt man

$$\mathfrak{p} = (-1)^n\, 2^{3n-4m+1} \left(\frac{n!\,(n+m)!}{(2n)!}\right)^3 \frac{(n-m)!}{(m!)^2}\, b^m\, c^{2n-m}, \quad (\text{halb für } m=0).$$

Jetzt soll

$$N = \frac{1}{4i\pi} \int\!\!\int (x'-x'')\, P^2(x')\, P^2(x'')\, dt'\, dt'' \quad (\text{über die ganze Oberfläche})$$

berechnet werden. Weil

$$(x'-x'')\, dt' = i\sqrt{c}\,.\,du, \quad (u \text{ sinkt von 1 auf } -1 \text{ herab}),$$

$$dt'' = -\frac{d\varphi}{\sqrt{c}}, \quad (\varphi \text{ wächst von 0 bis zu } 2\pi),$$

so kann man $(x'-x'')\, dt'\, dt''$ durch $idud\varphi$ ersetzen, wenn man beide, u und φ, wachsen lässt. Die Gleichungen (1) und (6) geben

$$\int_{-1}^{1} P^2(x')\, du = (-1)^n c^n \frac{(n+m)!\,(n-m)!}{\big((2n)!\big)^2} \int_{-1}^{1} \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^{n-m} (u^2-1)^n . \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^{n+m} (u^2-1)^n . du$$

$$= (-1)^{n-m}\, 2^{2n+1}\, \frac{(n!)^2\,(n+m)!\,(n-m)!}{(2n)!\,(2n+1)!}\, c^n,$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} P^2(x'')\, d\varphi = (-1)^{n-2\alpha}\, 2^{2n-4m} \left(\frac{n!\,(n+m)!}{m!\,(2n)!}\right)^2 b^m\, c^{n-m}, \quad (\text{halb für } m=0).$$

Das Product ist, wenn man $m - 2\alpha = 2(\nu - \zeta) + 2\beta$ beachtet,

$$N = (-1)^{2\beta}\, 2^{4n-4m+1}\, \frac{(n!)^4 \big((n+m)!\big)^3 (n-m)!}{\big((2n)!\big)^3 (2n+1)!\,(m!)^2}\, b^m\, c^{2n-m}, \quad (\text{halb für } m=0);$$

$\dfrac{N}{\mathfrak{p}} = (-1)^{n-2\beta} \dfrac{2^n\, n!}{(2n+1)!}$ (auch für $m = 0$) ist also der gesuchte numerische Factor, der für beliebige positive Werthe von $b - a$, $c - b$ gilt.

Wenn $\qquad f(X) = (X - E)(X - E')\cdots(X - E^{(\nu)})$

Polinom der Gleichung $(\nu+1)^{ten}$ Grades ist, durch welche die Constante E in der Definitionsgleichung

$$\frac{1}{P}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}=n(n+1)x+E$$

bestimmt wird, so ist

$$\frac{1}{4i\pi}\int\int(x'-x'')P^2(x')P^2(x'')\,dt'\,dt'' \text{ (über das ganze Ellipsoid ausgedehnt)}$$

$$=\frac{(-1)^{n-2\beta}}{1.3,5\ldots(2n+1)}f'(E).P^{(2\alpha)}(a)P^{(2\beta)}(b)P^{(2\gamma)}(c), \quad \text{(ohne Ausnahme).}$$

Diese Formel hat sich für alle 25 ersten Laméschen Functionen $(n=0, 1, 2, 3, 4)$ als richtig bewährt.

RELAZIONE

letta dal Socio Blaserna, relatore, a nome anche del Socio Cantoni, nella seduta del 12 giugno 1887, sopra la Memoria del dott. Giovan Pietro Grimaldi, intitolata: *Sulla resistenza elettrica delle amalgame di sodio e di potassio.*

« L'autore si propone di studiare a diverse temperature comprese, fra 0° e 230°, la resistenza elettrica degli amalgami di sodio e di potassio. Egli si è servito del ponte di Wheatstone, adoperato con molta cautela e con molta precisione. Egli ha esaminato dapprima due amalgami liquidi, contenenti piccole ma diverse quantità di sodio, che presentarono una resistenza sensibilmente eguale e maggiore di quella del mercurio puro. Quando nell' amalgama cresce la quantità di sodio, la resistenza a 0° diventa inferiore a quella corrispondente del mercurio: riscaldato e riportato alla temperatura primitiva aumenta di resistenza, e tale aumento nei successivi riscaldamenti diventa sempre più piccolo. Il sodio amalgamato si comporta quindi in modo analogo a quello trovato dal Weber per lo stagno.

« L'autore ha trovato un amalgama solido, cristallizzato, a cui assegna la formula $Hg_{10}\,Na_2$ e che è probabilmente lo stesso trovato da Kraut e Popp e segnato da questi con $Hg_{12}Na_2$. Esso presenta una resistenza molto inferiore a quella di altri amalgami liquidi, e tende a separarsi e a galleggiare su questi.

« Anche per il potassio l'autore trova un amalgama consimile, a cui assegna la formola $Hg_{20}K_2$, mentre Kraut e Popp gli diedero la formola $Hg_{24}K_2$. La sua resistenza varia molto colla temperatura e presenta altre varietà rimarchevoli.

« Il lavoro è condotto con cura e contiene molti fatti nuovi e interessanti. Per cui la Commissione propone, che la presente Memoria venga inserita integralmente negli Atti ».

Sulla resistenza elettrica delle amalgame di sodio e di potassio.

Memoria del dott. GIOVAN PIETRO GRIMALDI [1].

(Con due tavole).

1. Le variazioni nella resistenza elettrica del mercurio, prodotta dall'aggiunta in esso di metalli estranei, è stato oggetto di studio da parte di parecchi sperimentatori. Essi hanno però trovato fenomeni complicatissimi e di difficile spiegazione, sicchè si possono dire finora sconosciute le relazioni che legano la resistenza elettrica e la costituzione chimica delle amalgame.

Io ho tentato con il presente lavoro di recare un contributo alla ricerca di tali relazioni, e di determinare nel medesimo tempo fino a qual punto la misura della resistenza elettrica possa giovare allo studio di queste combinazioni imperfette, che coi metodi chimici non sono state finora interamente determinate.

Per parecchie ragioni ho cominciato le mie ricerche dalle amalgame dei metalli alcalini (potassio e sodio):

1°) Perchè non è a mia cognizione che si conoscano dati sulle resistenze elettriche delle amalgame dei detti metalli, essendo esse state soltanto cimentate dal Michaelis, il quale, come egli stesso dichiara, non ha potuto eliminare tutte le cause di errore in modo da ottenere risultati attendibili;

2°) Perchè fra le amalgame di potassio e di sodio esistono due composti definiti (uno per ognuno dei due metalli) dei quali si conosce la costituzione chimica, ciò che semplifica la ricerca delle relazioni sopra accennate;

3°) Perchè si conoscono alcuni dati termochimici sulle amalgame suddette, ai quali i risultati ottenuti per via elettrica possono essere paragonati.

Metodo sperimentale.

2. Per la misura delle resistenze elettriche adoperai il metodo del ponte di Wheatstone e quello del Kirchhoff. Nell'impiego del primo metodo mi son servito di due diversi apparecchi: un ponte dell'Edelmann che io dovetti alquanto modificare, ed uno costruito dietro le mie indicazioni nel laboratorio di Fisica della R. U. di Palermo. Descriverò quindi successivamente i tre diversi apparecchi, nello stesso ordine nel quale furono adoperati.

(1) Questo lavoro è stato eseguito nei laboratorî di Fisica diretti dal prof. Damiano Macaluso, il quale ne ha posto a mia disposizione tutte le risorse, aiutandomi spesso coi suoi utili consigli. Sento quindi il dovere di manifestare al mio maestro i sensi della mia riconoscenza.

3. *Ponte Edelmann.* Questo ponte del modello descritto dal Wiedemann (¹), disegnato schematicamente nella fig. 1 tav. I, aveva il filo *m* lungo circa 120^{cm} di platino iridato, tenuto disteso da due parallelepipedi rettangolari di ottone *a* ed *a'*, e stretto da viti di pressione. Due archi di rame *d* e *d'* mettevano in comunicazione elettrica le estremità del filo con due vaschette di ferro *b*, *b'* accanto alle quali erano altre due simili *c*, *c'* riunite per mezzo di una grossa lamina di rame *l*.

Il ponte venne da me adoperato collocando la resistenza a misurare X fra le vaschette *b* e *c* e la resistenza campione R fra *b'* e *c'*. I fili che conducevano al galvanometro vennero immersi nelle vaschette *b* e *b'*; quelli della pila attaccati in *f* ed in *q*.

4. Bentosto però in alcune esperienze preliminari mi accorsi che le misure che io dovevo fare richiedevano una grande precisione, onde il filo era di lunghezza insufficiente allo scopo. Per tale motivo aggiunsi al circuito quattro resistenze A, B, A_1, B_1, collocate le prime due in *d* le altre in *d'* al posto degli archi di rame. Esse furono costruite con filo di argentana rivestito di seta avvolto intorno a rocchetti di legno e ricoperto da un grosso strato di paraffina. Alle estremità del filo erano saldati grossi fili di rame che pescavano in vaschette piene di mercurio adoperate per stabilire i contatti. A ed A_1 poco differenti fra di loro avevano resistenza alquanto inferiore a quella dell'intiero filo; B e B_1 poco minore del doppio. Ognuna di queste resistenze poteva essere tolta dal circuito e sostituita con un grosso filo di rame.

Con questo apparecchio adoperai, come galvanoscopio, una bussola del Wiedemann grande modello Edelmann a specchio e le letture venivano fatte con cannocchiale e scala divisa in millimetri collocata a 2^{m} circa di distanza dallo specchio. La corrente mi venne fornita da una pila Bunsen ad acidi deboli nel circuito della quale intercalavo una resistenza grande che facevo variare in modo da avere la medesima sensibilità in tutte le ricerche: riducevo l'intensità della corrente ad essere tale da ottenere uno spostamento di 2^{mm} della scala quando il corsoio del ponte veniva spostato di 1^{mm}, essendo intercalate nel circuito le resistenze A, A_1, B, B_1.

Un interruttore nel circuito del galvanometro mi permetteva di accorgermi se si sviluppassero correnti termoelettriche. Il circuito della pila veniva chiuso solo per pochi istanti per evitare riscaldamento nel filo.

5. Per potere eseguire misure attendibili col ponte modificato in tal modo dovetti fare le seguenti operazioni:

1°) Calibrazione del filo *m*.

2°) Determinazione delle resistenze dei contatti *a* ed *a'*, che non erano affatto trascurabili.

3°) Misura delle resistenze A, A_1, B, B_1 in funzione di quella del filo.

Per calibrare il filo adottai il metodo di Strouhal e Barus (²) dividendo il filo in 5 tratti e sciegliendo resistenze di confronto tali che la loro somma fosse quasi eguale alla resistenza di esso. Ripetei parecchie volte le misure ottenendo risultati concordanti. Con i valori così avuti si costruì una curva dalla quale si ricavò la tabella che dava la resistenza di ogni decimetro del filo, riferita a quella del primo decimetro

(¹) Die Lehre von der Elektricität. Band I, pag. 448.
(²) Wied. Ann., X, 1880 pag. 326.

(supposto questo calibro) presa come unità. La lunghezza dell'intiero filo ridotta con la suddetta tavola di calibrazione fu $l = 1206^{mm},3$.

Per eseguire la determinazione 2) costruii con filo di argentana saldato a grossi fili di rame tre resistenze M, N, P di circa 4^{ohm} ognuno che differivano fra di loro meno di $\frac{1}{1000}$ e tali che si aveva rigorosamente

$$\frac{M}{N} = \frac{N}{P}.$$

Ciò si ottenne mettendo nel ponte in $b'c'$ una resistenza di 4^{ohm} circa come campione e paragonando ad essa M, N, P che venivano successivamente poste in bc. Avevo intenzione di ridurre per tentativi tali resistenze ad essere perfettamente eguali fra di loro, ma ciò riuscendomi assai difficile mi limitai ad avere l'eguaglianza su accennata dei due rapporti, che era esatta fino ai decimillesimi. Dalla medesima si ricava, essendo $\frac{M}{N}$ assai vicino ad 1 (¹).

$$N = \frac{M + P}{2}.$$

Avute le resistenze suddette si collocò N in bc ed $M + P$ in $b'c'$; vennero poscia scambiate e fatte le relative letture.

Chiamando x ed x' le resistenze dei contatti a e b, n ed n' le letture delle posizioni d'equilibrio del corsoio nei due casi (quando cioè il galvanometro non dà alcuna deviazione) avremo

$$\frac{N}{M + P} = \frac{n + x}{l - n + x'}$$

$$\frac{M + P}{N} = \frac{n' + x}{l - n' + x'}$$

le quali risolte ci danno n ed n' in funzione del primo decimetro del filo.

Ebbi così

$$x = 2^{mm},4\,; \qquad x' = 6^{mm},2\,.$$

Per eseguire l'operazione 3) poste in bc e $b'c'$ rispettivamente le resistenze M ed N si trovò la posizione d'equilibrio n del corsoio, quando le resistenze A, A_1, B, B_1 erano state tolte; poi posta in ab la resistenza A si fece la nuova lettura n'.

Chiamando y la resistenza di A in funzione di quella del primo decimetro del filo si ha

$$\frac{M}{N} = \frac{n}{l - n}$$

$$\frac{M}{N} = \frac{y + n'}{l - n'}$$

dalle quali si può ricavare y.

(¹) Durante questa determinazione per avere maggiore sensibilità furono introdotte le resistenze $A, B, A_1 B_1$; esse poi furono tolte dal circuito.

Simile determinazione si fece collocando A in in $a'b'$; due analoghe misure si fecero con A_1. Per determinare B si collocò A in ab e B in $a'b'$ e poi viceversa e si ripetè l'operazione sostituendo A ad A_1; lo stesso si praticò con B_1.

Si ebbero così due valori di A e due di A_1, e quattro valori di B e quattro di di B_1 la cui coincidenza garentiva della esattezza delle precedenti operazioni.

I valori medii furono

$$
\begin{aligned}
A &= 952^{mm},4 \quad \pm 0^{mm},05\\
A_1 &= 933^{mm},0 \quad \pm 0^{mm},05\\
B &= 1842^{mm},4 \quad \pm 2^{mm},0\\
B_1 &= 1864^{mm},6 \quad \pm 2^{mm},7\,.
\end{aligned}
$$

Chiamando X ed R la resistenza da misurare e quella campione, ed n la lettura in millimetri della posizione d'equilibrio del corsoio si ha per le determinazioni precedenti:

$$\frac{X}{R} = \frac{2797,2 + a}{4010,1 - a}$$

formola che mi servì per calcolare le misure fatte con questo apparecchio.

6. *Metodo di Kirchhoff* [1]. Come è noto, questo metodo richiede l'impiego di un galvanometro differenziale G fig. 2 (tav. I) i rocchetti $a\,a'$ del quale fanno parte di due derivazioni A R B, C R′ D (la cui resistenza per mezzo dei reostati R ed R′ può farsi variare di quantità note), inserite alle due estremità A, B, e C, D delle due resistenze x ed m da paragonare, che sono successivamente percorse dalla corrente. Il rapporto di queste è eguale a quello della variazione delle resistenze dei circuiti derivati, necessarie per ricondurre allo 0° il galvanometro. Descriverò brevemente le diverse parti dell'apparecchio.

Il galvanometro differenziale G era una bussola del Wiedemann, grande modello Edelmann a specchio e scala e portava da un lato un rocchetto a' a molti giri e dall'altro un rocchetto simile a ed uno b a pochissimi giri, di quelli che ordinariamente vengono adoperati per le scariche elettriche: la corrente passava prima in a' e poi in senso inverso successivamente in a e b. a ed a' vennero posti a contatto fra di loro, vicinissimi all'ago: la posizione di b venne stabilita facendo passare una corrente sufficientemente intensa (una pila Bunsen con 50^{ohm} di resistenza nel circuito) nei rocchetti e spostando b fino a che il galvanometro non dasse alcuna deviazione.

A dire il vero un piccolo movimento dell'ago si aveva sempre, forse dovuto alla magnetizzazione del ferro contenuto nel filo di rame dei rocchetti, ma tale movimento si poteva ridurre piccolissimo e quasi trascurabile.

Regolata nel modo anzidetto la posizione di a, a' e b essa rimase invariata per tutto il corso delle esperienze.

La resistenza R′ consisteva di un rocchetto di filo di rame di pochi giri e di una unità Siemens che si poteva togliere dal circuito sostituendola con un grosso arco di rame. La resistenza R (non avendo a mia disposizione alcun reostato a slitta) era formata da due apparecchi diversi: una cassetta di resistenze, graduata in ohm,

(1) Wied. Ann. XI, 1880 pag. 801. Vedasi anche Journal de Physique 2me série, I, pag. 89, 1880.

della quale mi ero assicurato che i multipli da me adoperati erano sufficientemente esatti, ed un reostato a mercurio (tav. I, fig. 3) che io stesso costruii. Esso consisteva in un sottile filo di platino *f* lungo 60^{cm} circa, teso fra due turaccioli dentro un tubo verticale di vetro di 12^{mm} circa di diametro e comunicante per la parte inferiore, mediante un tubo di gomma, con un pallone M pieno di mercurio, che poteva essere portato a diverse altezze. Il tubo portava incollata una lista di carta millimetrata. Con questo apparecchio si poteva leggere, mediante precauzioni speciali fino al millimetro, ed un ohm corrispondeva a 309^{mm} del filo.

La pila P, era una coppia Bunsen, Y un reostata di Hipp che permetteva d'introdurre nel circuito una resistenza variabile, sempre molto grande, in modo da avere in ogni misura la medesima sensibilità. Quando l'apparecchio fu regolato, il galvanometro deviava di 1^{mm} della scala per uno spostamento di 1^{mm} del mercurio del tubo. Un interruttore a molla I permetteva di tenere chiuso il circuito per brevissimi istanti.

Con questo apparecchio erano apprezzabili i millesimi delle piccole resistenze misurate.

7. *Ponte Bartolini.* Avendo dovuto interrompere le ricerche in parola, cominciate nel laboratorio di fisica della R. U. di Catania per poscia riprenderle in quello di Palermo, non potei utilizzare un compensatore di Beetz di quasto laboratorio, perchè assai poco accuratamente eseguito e feci costruire un nuovo ponte (¹).

In esso cercai di evitare i piccoli inconvenienti che avevo osservato sperimentando col ponte dell'Edelmann.

La fig. 4 (tav. I) dà l'insieme dell'apparecchio. Il filo *f* di lega platino-argento, lungo 104^{cm} circa, venne teso orizzontalmente sopra una lamina di ebanite. La fig. 5 (tav. I) rappresenta uno degli apparecchi che servono a stringere le estremità del filo. Un dado M fissato solidamente sul sostegno L (fig. 4) ed isolato da una lamina di ebanite ha un foro cilindrico dentro cui passa il pezzo N che termina all'estremità con una vite *v*: un pernio che scorre in una scannellatura del foro ne impedisce la rotazione, la madrevite V permette di spostarlo a poco a poco, e la vite V′ lo fissa fortemente sul dado. Il pezzo N ha la estremità interna *k* foggiata a tronco di cono ed a vite; questa ha un taglio longitudinale da *k* fino ad *n* e nell'asse del cono tronco è forato un canale di diametro alquanto più piccolo di quello del filo. Questo viene introdotto nel suddetto canale, ed il dado a vite *u*, stringendo fortemente le due parti di *k* fra di loro, stabilisce un contatto perfetto fra il filo ed il pezzo N. Con questa disposizione il contatto fra il filo ed il sostegno avviene proprio all'estremità di esso, mentre non è certo che ciò accada per i parallelepipedi *a a′* (fig. 1) del ponte Edelmann. Il filo in essi può venire stretto, a seconda della pressione che si esercita sulle viti, lungi dell'estremità interna, ciò che può aumentare sensibilmente la lunghezza del filo; tale aumento si manifesta come una resistenza dovuta ai contatti. La vaschetta *b* saldata al pezzo N permette di stabilire la comunicazione fra il filo ed il rimanente dell'apparecchio.

Il corsoio, mobile sopra un' asta di ottone graduata in millimetri colla macchina divisoria e sostenuta sopra 5 colonnine pure di ottone, ha un prolungamento anteriore *h*;

(¹) Esso fu molto abilmente eseguito dal sig. Alfonso Bartolini meccanico di questo laboratorio.

in un foro quadrato e verticale *c* di esso scorre a sfregamento dolce un prisma che sostiene il coltello. Questo è formato da un cuneo verticale di ottone ad angolo acutissimo ed è tenuto innalzato da una spirale.

Il sostegno L ha due prolungamenti laterali, all'estremità dei quali è fissata con viti un' asta di ottone *l* che porta quattro anelli m', m'', m''', m'''', equidistanti fra di loro, che sostengono dei turaccioli di sughero con le resistenze elettriche. In m' ed m'''' collocate le resistenze I_s, II_s, I_d, II_d, che tengono il posto delle A, B, A_1, B_1 del ponte Edelmann, in m'' la resistenza da misurare, in m''' la resistenza campione. Le resistenze I_s, II_s, I_d, II_d, sono formate con fili d'argentana introdotti dentro tubi di vetro, piegati ad *u*, che terminano superiormente in vaschette piene di mercurio. Il fondo di ogni vaschetta è chiuso da un piccolo tappo di sughero traversato da un pezzetto di filo di rame amalgamato saldato ad un estremo del filo d'argentana. Archi di fili di rame *i* di 12^{mm} di diametro sostenuti da colonnine di ebanite, riuniscono rispettivamente *b* con m', m' con m'', m'' con m''', m''' con m'''', m'''' con b'. Piccoli archi di rame in m' ed m'''' permettono d'introdurre o togliere dal circuito le resistenze I_s, II_s. I_d, II_d, in tutto od in parte.

Dei vasi di zinco bucherati, che si possono sospendere in m', m'', m''', m'''', permettono di tenere a 0° le diverse resistenze.

I fili che conducono al galvanometro sono attaccati mediante viti agli archi di rame in *d* e *d'*. I fili della pila sono riuniti uno in *q* e l'altro nell'asta *t*.

Adoperando queste precauzioni io ebbi un ponte sensibile quanto il primo ma molto più esatto. Credo che con questo apparecchio tenendo, come feci sempre, le relistenze m' ed m'''' e la resistenza campione nella neve fondente, non si possa sbagliare più di un decimillesimo nelle misure.

Oltre ciò questo ponte presentava il vantaggio che, attesa la piccolezza della resistenza degli archi di rame e la bontà dei contatti, con un galvanometro molto sensibile, si possono misurare con grande esattezza resistenze anche piccole.

8. Il filo di quest'apparecchio venne calibrato nel modo già accennato, adoperato per il ponte Edelmann; la lunghezza di esso corretta alla tavola di calibrazione fu $1047^{mm},2$. Lo stesso metodo adoperato prima si impiegò per determinare la resistenza dei contatti i quali, come si prevedeva, per la disposizione impiegata a fissare il filo, furono trovati di valore inferiore ad 1 decimo di millimetro e per ciò trascurate.

I valori medii delle resistenze I_s, II_s, I_d, II_d a 0° riferite a quelle del primo decimetro del filo alla temperatura ambiente (16°), determinati al modo sopra riferito furono:

$$I_s = 851^{mm},5 \quad \pm 0^{mm},2$$
$$II_s = 1528^{mm},0 \quad \pm 0^{mm},7$$
$$I_d = 850^{mm},9 \quad \pm 0^{mm},2$$
$$II_d = 1566^{mm},1 \quad \pm 0^{mm},4$$

La formola impiegata per calcolare il rapporto della resistenza X collocata in m'' ed R collocata in m''' fu

$$\frac{X}{R} = \frac{2379,5 + a}{3464,2 - a}$$

dove a è la lettura corretta della posizione d'equilibrio del corsoio, espressa in millimetri.

In alcune misure nelle quali si dovette togliere dal circuito la resistenza I_d si impiegò invece la formola

$$\frac{X}{R} = \frac{2379,5 + a}{2613,3 - a}.$$

Il galvanometro adoperato con questo ponte fu la bussola Edelmann grande modello già descritta; la pila una coppia Leclanché od una Bunsen ad acidi deboli con una resistenza nel circuito esterno che si faceva variare in modo da ottenere sempre la stessa sensibilità avuta sperimentando con il ponte Edelmann. Onde adoperare una corrente più debole il galvanometro venne alquanto astatizzato.

9. Veniamo ora a descrivere le altre disposizioni sperimentali.

Le amalgame vennero preparate gettando il metallo in pezzetti sopra il mercurio leggermente riscaldato in un crogiuolo di porcellana od in una capsula della stessa sostanza ricoperta da un vetro. Una parte del metallo a causa del forte sviluppo di calore bruciava, ed una parte soltanto si univa al mercurio.

Terminata l'operazione si agitava fortemente l'amalgama ancora calda per renderla omogenea, e quindi si versava in una boccetta precedentemente disseccata con molta cura e fortemente riscaldata.

10. Le amalgame così preparate venivano analizzate misurando l'idrogeno sviluppato quando erano trattate con l'acido cloridrico per mezzo dell'apparecchio fig. 6 (tav. I). La campanella graduata A alta 65^{cm} circa veniva capovolta e riempita di acqua, poi vi si introduceva l'amalgama e, chiusa rapidamente col turacciolo f, veniva raddrizzata e collocata in un bicchiere pieno di acqua. Il turacciolo f, a due fori, portava un tubo diritto i ed un tubo m piegato ad U terminante con un imbuto L. Da questo imbuto si versava l'acido cloridrico; l'idrogeno si raccoglieva nella campanella e l'acqua usciva dal tubo i. Terminata la reazione, dopo che l'apparecchio era messo in equilibrio di temperatura con l'ambiente, si misurava la temperatura, la pressione, il dislivello dell'acqua della campanella e del bicchiere e poscia, capovolta la prima, si raccoglieva il mercurio rimasto, che veniva asciugato e pesato (1).

La campanella era stata graduata in millimetri con la macchina divisoria e calibrata accuratamente col metodo di Bunsen: il volume della estremità emisferica al disopra delle graduazioni era stato determinato accuratamente.

Nei calcoli inerenti a questo metodo d'analisi si teneva conto, oltrechè della tensione del vapore acqueo, anche dell'idrogeno sciolto nell'acqua.

Per quest'ultima correzione che è del resto abbastanza piccola, si ammetteva che soltanto tutta l'acqua contenuta nella campanella al principio dell'esperienza fosse saturata d'idrogeno, ritenendo essere trascurabile la quantità di gas diffusa nell'acqua del bicchiere attraverso il piccolo orificio del tubo i per tutta la durata delle esperienze, che non superava la mezz'ora.

(1) Trattando l'acqua acidulata rimasta nella campanella con l'acido solfidrico, essa non diede alcun precipitato, sicchè nè l'acido cloroidrico, nè le traccie di cloro, che esso potesse per avventura contenere, attaccavano sensibilmente il mercurio.

Per ogni amalgama si facevano parecchie analisi che in generale non differivano fra di loro di più di $^1/_{100}$: qualche rara volta al massimo di $^1/_{50}$ (1): se ne prendeva la media.

11. Per misurare la resistenza elettrica delle amalgame venivano riempiti con le stesse dei tubi di vetro della forma disegnata nella fig. 7: essi erano formati di un tratto *b* capillare, un tratto *c c'* di 3^{mm} di diametro ed una parte larga *d d'* di 12^{mm} di diametro circa.

Questi tubi venivano prima riempiti con mercurio purissimo (distillato nel vuoto) e ne veniva misurata la resistenza a 0° riferendola alla resistenza costante R, che funzionava come resistenza campione (2). Nelle esperienze eseguite col ponte Edelmann la R fu costruita con un pezzo di filo di argentana all'incirca della stessa resistenza elettrica del tubo B quando era pieno di mercurio. Esso era circondato da uno strato di paraffina di 8^{cm} di spessore e le estremità erano saldate a grossi fili di rame, non disegnati nella figura 1, che pescavano nelle vaschette *b' c'*. Nelle estremità *d* e *d'* del tubo B (fig. 7) si immergevano pure due grossi fili di rame lunghi 15^{cm} circa i quali stabilivano la comunicazione con le vaschette *b* e *c*.

Nelle esperienze fatte con il ponte Bartolini la resistenza campione fu fatta con un tubo simile a quello della fig. 7, pieno di mercurio distillato, che veniva tenuto nella neve fondente per tutta la durata delle esperienze. Negli imbuti dei due tubi, collocati in *m''* e *m'''*, pescavano direttamente gli archi di rame del ponte.

Nelle misure fatte con il metodo di Kirchhoff le amalgame erano contenute in un tubo B' fig. 8 (tav. I) lungo 15^{cm} di 3^{mm} di diametro e terminante con due imbuti cilindrici molto larghi. I contatti erano stabiliti mediante fili di platino saldati all'estremità di tubi di vetro *c c'* pieni di mercurio, ed in questo s'immergevano i diversi reofori. Questi tubi erano fissati invariabilmente a dei turaccioli conici di sughero che venivano sempre collocati nella medesima posizione. In un foro fatto nel centro di ognuno dei due turaccioli passava un tubicino di vetro *d* che veniva chiuso con un piccolo tappo di gomma. Il tubo B venne al solito riempito dapprima con mercurio puro e se ne determinò la resistenza paragonandola a quella campione *m* (fig. 2) costruita con filo d'argentana di resistenza quasi quadrupla di quella del mercurio contenuto nel tubo suddetto.

12. Il riempimento dei tubi con le amalgame fu forse la parte più difficile di queste ricerche. Le amalgame in parola difatti si decompongono facilmente in presenza dell'umidità e, se il tubo non è perfettamente disseccato, appariscono delle bollicine d'idrogeno aderenti alla pareti, a causa delle quali la resistenza viene alterata. Il riscaldamento aumenta notevolmente questa causa di errore.

Fu questa difficoltà sperimentale che impedì al Michaelis (3) di ottenere risultati attendibili nella misura della resistenza elettrica delle amalgame dei metalli alcalini.

(1) In tal caso si eseguiva un numero maggiore d'analisi.

(2) Tale misura veniva ripetuta di tanto in tanto nel corso delle esperienze fatte con uno stesso tubo.

(3) Beiblätter, 9, 1885, pag. 267.

Dopo molti tentativi infruttuosi, durante i quali quasi disperai della riuscita, adottai la seguente disposizione. Il tubo B (fig. 7) venne racchiuso in un bagno di aria a doppia parete e scaldato a temperature che variavano da 300° ai 340°: un' estremo *d* era messo in comunicazione con una buona macchina pneumatica; dall' altro *d'* entrava l'aria dopo avere attraversato prima un rubinetto, poi due tubi a cloruro di calcio preparato di fresco ed introdotto ancor rovente nei tubi, ed infine un tubo lungo 1^m pieno di pezzetti di vetro ed anidride fosforica.

Disposto l'apparecchio nel modo anzidetto si faceva per parecchie ore passare nel tubo riscaldato una corrente di aria secca, quindi chiudendo il rubinetto sopra cennato si faceva il vuoto, lasciando così l'apparecchio per qualche tempo, affinchè dal tubo privo di aria ad elevata temperatura si distaccasse qualsiasi traccia di vapore acqueo.

Per introdurre l'amalgama, si collocava in *d'* (fig. 7), in sostituzione dei tubi a disseccare, l'apparecchio disegnato nella fig. 9 (tav. I). L'amalgama già introdotta nella bolla *d* veniva riscaldata fin verso 150°, mentre si faceva il vuoto. Girando il tubo *f* di 90° attorno a *g* ed aprendo il rubinetto *m*, che aveva all'estremità un foro capillare l'amalgama passava nel tubo B, dopo di che s'interrompeva bruscamente la comunicazione con la macchina pneumatica.

Durante il riempimento il tubo B era mantenuto a 160° circa poichè a temperature più alte l'amalgama attaccava il vetro.

In alcune esperienze riempii il tubo, disseccato dapprima nel modo anzidetto, versandovi direttamente l'amalgama preventivamente riscaldata a 150° in un recipiente chiuso dentro una stufa: le amalgame che io cimentavo erano ossidabili in diverso grado sicchè a seconda di quella con la quale si aveva da fare si poteva adoperare l'uno o l'altro metodo di riempimento.

Procedendo nel modo anzi descritto potei riempire dei tubi dentro i quali l'amalgama presentava una superficie perfettamente brillante ed omogenea come se fosse mercurio distillato, e che si manteneva anche tale dopo essere stata riscaldata talvolta fino a 230°. Le esperienze nelle quali ciò non avveniva e la superficie non era più speculare a causa delle piccole bollicine di idrogeno interposte fra l'amalgama ed il vetro (ciò che accadde spesso in principio delle esperienze e qualche volta anche in seguito) venivano rigettate senz'altro.

Riempito il tubo si introducevano in *d* e *d'* le estremità dei fili di rame di comunicazione avendo cura che l'amalgama giungesse allo stesso livello al quale era giunto il mercurio; le estremità del tubo venivano chiuse ermeticamente.

13. Per misurare la resistenza delle amalgame a 0° il tubo B veniva collocato dentro un recipiente bucherato pieno di neve fondente; per le misure a diverse temperature veniva circondato da una stufa ad aria a triplice involucro ricoperta esternamente da parecchi strati di cartone d'amianto.

Nelle esperienze fatte con il ponte Edelmann la stufa veniva collocata a sinistra del ponte, il centro della prima distante circa 25^{cm} dall'estremità del secondo. Un diaframma di cartone molto grande a due pareti, separate da bambagia, serviva ad impedire l'irradiamento del calore nel ponte. La temperatura dall'altro lato del diaframma,

che veniva sempre misurata non cresceva mai più di 2° o 3°, anche quando il bagno veniva portato a 230°. La variazione che questo leggero aumento di temperatura poteva produrre nella resistenza dei rocchetti A e B doveva essere trascurabile a causa dello spesso strato di paraffina con cui essi erano rivestiti, come del pari trascurabile senza dubbio era l'influenza che tale aumento produceva nella resistenza del filo teso.

Nelle esperienze fatte col ponte Bartolini la stufa circondava l'anello m''. Due diaframmi uno di latta a due pareti riflettenti separate da bambagia, ed uno di cartone pure a due pareti, separate allo stesso modo, impedivano qualsiasi riscaldamento del filo, ciò che venne costatato direttamente con un termometro posto accanto allo stesso: due fessure nei diaframmi permettevano di leggere i termometri che indicavano la temperatura del bagno.

Per fare una determinazione ad una certa temperatura si cominciava col riscaldare il bagno con una o più lampade o con un fornello, a seconda della temperatura, fino a che i termometri, ne segnassero una inferiore di parecchi gradi a quella voluta. Si diminuivano allora le fiamme: i termometri continuavano a salire, raggiungevano un massimo, rimanevano stazionarî per alcuni minuti e poi si abbassavano. Contemporaneamente, spostando il corsoio, si misurava la resistenza elettrica dell'amalgama che seguiva un andamento consimile e si notava il massimo raggiunto dai termometri e quello della resistenza elettrica.

Nelle esperienze fatte col ponte Edelmann la stufa essendo lontana dal corsoio occorrevano due osservatori per fare le determinazioni: nelle esperienze fatte col ponte Bartolini potei da me solo eseguire l'una e l'altra misura.

La stufa ad aria è di un impiego assai comodo in questo genere di ricerche; in essa però la temperatura qualche volta non è costante da un punto all'altro dell'involucro interno e le differenze possono ascendere a qualche grado.

Per rimediare a tale inconveniente adoperai tre termometri che collocai vicinissimi al tubo contenente l'amalgama e presi la media delle indicazioni di essi. Le maggiori divergenze si verificarono fra 60° e 100°: a temperature più elevate le differenze fra le indicazioni dei termometri essendo soltanto di qualche decimo di grado.

I termometri furono: due del Müller a 360° divisi in gradi interi ed uno del Golaz diviso in quinti. Se ne determinava lo zero prima di cominciare ogni serie di osservazioni e quando la colonna di mercurio sporgeva dal bagno, si faceva la relativa correzione.

Risultati.

14. Cominciai col determinare la resistenza del mercurio a diverse temperature, sia per provare se il mio apparecchio dasse risultati concordanti con quelli degli altri sperimentori, sia perchè nel paragonare la resistenza del mercurio e delle amalgame fossero entrambe determinate nelle medesime condizioni. Feci due serie di esperienze che riporto nella seguente tabella: in essa la resistenza del mercurio a 0° è fatta eguale ad 1.

I

Numero della serie	Tempera-tura	Resistenza	Numero della serie	Tempera-tura	Resistenza
	0°	1,0000	I	120°,9	1,1191
II	10,9	1,0106	II	144,3	1,1448
II	58,8	1,0548	I	181,6	1,1885
I	72,9	1,0724	II	202,3	1,2122
II	107,4	1,1073	I	222,0	1,2360

Con i valori sopra notati si costruì una curva di grandi dimensioni dalla quale si ricavarono i valori della resistenza elettrica del mercurio di 25° in 25°, che sono riportati nella seguente tabella a confronto con quelli di altri sperimentatori (1). La curva suddetta è stata riprodotta in piccolo in AB fig. 1, tav. II.

II

Tempera-tura	Resistenza del mercurio secondo					
	Grimaldi	Rinck	Siesnens	Van der Kolk	Lenz	Benoit
0°	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
25	1,0235	—	—	—	—	—
50	1,0475	1,0479	1,0492	1,0430	1,0451	1,0469
75	1,0723	—	—	—	—	—
100	1,0982	1,0989	1,0985	1,0860	1,0947	1,0996
125	1,1245	—	—	—	—	—
150	1,1523	—	—	—	—	1,1579
175	1,1808	—	—	—	—	—
200	1,2083	—	—	—	—	1,2220
225	1,2393	—	—	—	—	—

(1) Non abbiamo riportato nella tabella II le determinazioni fatte dal Müller (a 100°, 1,1118) e del Becquerel (a 100°, 1,1040) perchè dimostrate troppo grandi dalle misure posteriori e più accurate. I valori della tabella sono stati ricavati dalle formole: $1+0,000985\,t$ Siemens (Pogg. Ann. 113,1861); $1+0,000860\,t$ Schröder Van der Kolk (Pogg. Ann. 110,1860); $1+0,000929\,t+0,0000006\,t^2$ Rinck (Beiblätter 2,1878); $1+0,000882\,t+0,00000114\,t^2$ Benoit (Comptes rendus, 76,1873); $1+0,0008577\,t+0,000000897\,t^2$ Lenz. (Wied. op. cit. Band IV, pag. 1228). Due altre serie che per brevità non riporto da me fatte posteriormente riempendo il tubo come faceva il Lenz si avvicinano di più ai valori di questo sperimentatore. Egli attribuisce all'aver scacciato completamente l'aria nei tubi, quando v'introduceva il mercurio, la piccolezza dei suoi risultati. Le sue ricerche sono accuratissime.

L'accordo è soddisfacente, se si considera che i valori sopra riferiti dipendono dal coefficiente di dilatazione del vetro e dai termometri adoperati, che specialmente alle alte temperature possono presentare divergenze sensibili.

15. Passando quindi allo studio delle amalgame ho voluto anzitutto vedere se quelle liquide dei metalli alcalini, presentassero i fenomeni che diversi sperimentatori [1] avevano trovato con altri metalli e cominciai le mie esperienze con il sodio.

Preparai due amalgame che chiamerò A e B, la prima con 3^{gr} di sodio ed 850^{gr} di mercurio e la seconda con 6^{gr} di sodio e la stessa quantità di mercurio.

Entrambe erano perfettamente liquide e brillanti, e non avevano affatto l'aspetto caratteristico di mercurio sporco che piccole traccie di stagno o piombo bastano a dare al mercurio puro. Esposte all'aria si decomponevano rapidamente presentando sulla loro superficie dei movimenti rapidi e vorticosi come fa il sodio sull'acqua, poi si coprivano di uno strato di umidità condensata. Esse presentavano però in grado diverso questo fenomeno.

Conservate in boccette smerigliate per lungo tempo, il vetro della boccetta veniva leggermente attaccato; in seguito a ciò esse aderivano al vetro e lo bagnavano perfettamente nei punti attaccati.

L'analisi diede i seguenti risultati:

Amalgama A (media di 4 analisi) 0,209 per cento di sodio.

Amalgama B (media di 2 analisi) 0,486 per cento di sodio.

16. Le resistenze elettriche r alle diverse temperature t sono riportate nelle seguenti tavole dove è presa come 1 la resistenza del mercurio a 0°. Scegliendo tale

(1) Ricerche complete ed esatte su questo argomento, come si è accennato in principio del lavoro, furono intraprese da Matthiessen e Vogt (Pogg. Ann. 116, 1862, pag. 369). La resistenza delle amalgame era misurata, col metodo del ponte di Wheatstone, in un tubo orizzontale capillare alle cui estremità erano saldati due grossi tubi piegati verticalmente. Le misure furono fatte alla sola temperatura di 13°. Le amalgame venivano preparate nel tubo stesso; si versava in esso la quantità di mercurio necessario, poi il metallo, e si scaldava per $^1/_4$ d'ora facendo scorrere l'amalgama dall'uno all'altro lato e prendendo cura che il tubo capillare rimanesse sempre pieno.

I detti sperimentatori cimentarono in tal modo i seguenti metalli: piombo, stagno, zinco, oro, argento, bismuto.

Per i primi tre le misure arrivarono fino al 4 % di metalli aggiunti, per gli altri tre soltanto fino all' 1 % poichè appena le amalgame presentavano tendenza a solidificare non fu possibile ottenere risultati costanti.

I risultamenti delle suddette ricerche sono i seguenti:

a) Tutte le amalgame studiate possiedono una resistenza minore di quella del mercurio puro, anche quando il metallo aggiunto (bismuto) conduce l'elettricità meno del mercurio.

b) Se si paragonano le conducibilità osservate con quelle calcolate dal rapporto dei volumi relativi del mercurio e del metallo solido, si hanno tra i valori osservati e calcolati differenze notevoli. Queste differenze sono positive e crescenti con la quantità di metallo aggiunto per il bismuto: negative e crescenti per lo zinco, oro, ed argento; per il piombo e stagno le differenze positive e crescenti nelle amalgame povere diventano negative in quelle più ricche.

I risultati delle ricerche del Michaelis (Beiblatter, 9, 1885 pag. 267) coincidono con quelle del Matthiessen: solamente per il bismuto le differenze, delle quali si è parlato, invece di essere sempre crescenti con la quantità di metallo aggiunto, raggiungerebbero secondo il Michaelis un massimo per l'amalgama contenente il 2 % di bismuto; per amalgame più ricche tornerebbero a diminuire.

unità di misura i valori suddetti rappresentano in U, S la resistenza di una colonna di amalgama lunga 1^m e di 1^{mm} quadrato di sezione. Alla stessa unità di misura sono riferiti tutti i valori delle resistenze che daremo in seguito.

III.

Amalgama A

t	r
0°	1,00779
13,8	1,01972
63,1	1,06930
125,2	1,13363

IV.

Amalgama B

t	r
0°	1,00749
11,7	1,01923
15,2	1,02183
16,9	1,02245
55,2	1,05817
58,7	1,06412
107,0	1,11372
130,8	1,14095

Portate a 0° dopo essere state riscaldate esse presentarono sensibilmente la stessa resistenza di prima. Altre serie di esperienze che per brevità non riporto diedero risultati concordantissimi.

I punti ottenuti coi valori della tabella III sono segnati graficamente con piccole croci nella fig. 1 (tav. II), quelli della tabella IV con piccoli cerchietti: sì gli uni che gli altri risultarono allineati sopra una medesima curva C, D che ha un andamento parallelo a quella del mercurio puro.

Abbiamo adunque per le amalgame liquide contenenti piccole quantità di sodio i seguenti risultati:

a) Esse presentano una resistenza maggiore di quella del mercurio puro, quantunque il sodio conduca l'elettricità meglio del mercurio.

b) La resistenza è sensibilmente eguale per due amalgame di cui l'una contiene più del doppio di sodio dell'altra.

c) Il coefficiente di variazione della resistenza elettrica con la temperatura è uguale a quello del mercurio.

Questo comportamento è interamente diverso da quello delle amalgame degli altri metalli.

17. Passai quindi allo studio di amalgame più ricche di sodio, che presentassero tendenza a solidificarsi, le quali studiate dal Matthiessen per gli altri metalli avevano dato risultati incostanti ed esaminate più completamente dal Weber avevano presentato un comportamento assai strano ed interessante.

Il Weber (1) impiegò per la misura delle resistenze il metodo di Kohlrausch (2)

(1) Wied. Ann. 23, 1884, pag. 447.
(2) Wied. Ann. 20, 1883, pag. 76.

è quello del Kirchhoff, cimentando amalgame di stagno che contenevano fino al 12 % di questo metallo.

La forma del tubo dove veniva misurata la resistenza ed il metodo di preparazione delle amalgame erano identici di quelli impiegati dal Matthiessen. Le amalgame contenenti meno dell' 1, 5 % di stagno presentavano un comportamento regolare e simile a quello delle esperienze di questo sperimentatore: per amalgame più ricche cominciarono però le irregolarità. Esse non davano valori costanti quantunque presentassero quasi tutte fra 60° e 85° una variazione brusca di resistenza; oltre ciò subivano col riscaldamento un' alterazione permanente, che in generale era un aumento. In questa alterazione influiva il modo con cui l' amalgama riscaldata si raffreddava; p. es. la resistenza di un' amalgama di stagno al 2 % era a 15°,7 — 0,8634, dopo portata a 90° e raffreddata, a 34°,8 — 0,8961; raffreddata bruscamente da 34°,8 con l' immergere il tubo in un bagno freddo la resistenza fu a 16°,1 — 0,8924; dopo 20 ore lasciata alla temperatura ambiente a 17° — 0,8801.

Un altro esempio si ebbe nelle seguenti determinazioni fatte con un' amalgama al 12 % nella quale i numeri rappresentano le letture l del reostato, che sono proporzionali alle resistenze, e t le temperature: $t = 17°,0$ $l = 163,9$; $t = 93°,8$, $l = 187,7$; $t = 17°,2$, $l = 170,4$; $t = 91°,8$, $l = 194,4$; $t = 16°,0$, $l = 183,8$. Queste variazioni non tendevano a diminuire con i ripetuti riscaldamenti; bastava che la lega rimanesse per parecchi giorni a temperatura ordinaria perchè esse nuovamente si presentassero.

Per quanto riguarda la spiegazione di questi complicati fenomeni l' autore crede che verso la temperatura di 80°, alla quale si mostra la variazione brusca di resistenza, che diventa poi regolare al di sotto e al di sopra di questa temperatura, si formi un composto definito dello stagno col mercurio, la cui resistenza elettrica differisca notevolmente da quella dei componenti. L' autore però non afferma risolùtamente che ciò sia il caso, vista l' impossibilità di ottenere risultati costanti; nemmeno egli dà spiegazione precisa delle variazioni permanenti di resistenza, subìte dalle amalgame per il riscaldamento.

18. Per vedere se lo strano comportamento delle amalgame di stagno avesse riscontro in quelle di sodio, io ne preparai una che chiamerò C con 7 grammi di sodio e 500 gr. di mercurio. L' amalgama così preparata quando si lasciava raffreddare in riposo solidificava. Però se si agitava dentro la boccetta, sia scuotendola, sia con l' introduzione di una bacchetta di vetro bene asciutta, essa diventava scorrevole come se fosse perfettamente liquida. Per averla di nuovo solida bastava qualche volta lasciarla un giorno o due in quiete; si otteneva con certezza tale risultato scaldandola in una stufa a 150° e lasciandola raffreddare in riposo. Col riscaldamento solo (senza agitazione) diventava perfettamente liquida verso i 145° e portata a questa temperatura, se si faceva raffreddare agitandola, potevasi conservare liquida fino a 15°.

Quest' amalgama sembrava meno ossidabile di quelle liquide A e B; analizzata risultò che conteneva 0,963 per cento di sodio (media di 3 analisi).

Nella seguente tavola sono registrati i risultati di una serie di misure di resistenza elettrica fatte con l' amalgama C.

V.

t	r	t	r
0°	0,9616	78,6°	1,0711
15,4	0,9803	99,3	1,0899
lasciata in riposo alla temperatura ambiente, dopo 16 ore		103,8	1,0959
0°	0,9613	115,4	1,1077
15,3	0,9798	122,7	1,1154
31,4	1,0017	141,8	1,1368
47,8	1,0238	raffreddata lentamente fino alla temperatura ambiente	
64,8	1,0472	0°	0,9780

Dall' esame della superiore tabella si hanno i seguenti risultati:

a) L' amalgama C presenta una resistenza minore di quella del mercurio puro.

b) Riscaldando l' amalgama e poi facendola nuovamente raffreddare fino alla temperatura primitiva la resistenza si trova variata; tale variazione è abbastanza notevole: $> \text{di } \frac{1}{50}$.

La durata del riscaldamento in questa serie di esperienze fu di 5 ore. L' amalgama dentro il tubo aveva un aspetto perfettamente speculare, che rimase anche tale dopo il riscaldamento, ciò che eliminò il dubbio che la variazione in parola dovesse attribuirsi allo sviluppo di bollicine di idrogeno sulle pareti del tubo.

19. Poichè con le amalgame del sodio avviene lo stesso fenomeno osservato dal Weber con le amalgame di stagno, mi proposi di studiarlo distesamente nello scopo di poterne dare una spiegazione. Cercai anzitutto di vedere se con successivi riscaldamenti l' aumento permanente di resistenza a 0° raggiungesse un limite e se le curve ottenute nei diversi casi avessero andamento differente.

Nella seguente tabella è riportata una estesa serie di osservazioni fatte riempendo nuovamente il tubo con la medesima amalgama C.

VI.

t	r	t	r	t	r	t	r
0°	0,9660	76,3°	1,0694	161,3°	1,1623*	15,0°	1.0161
17,2	0,9872	98,0	1,0910	189,0	1,1907*	15,0	1,0510
37,4	1,0144	126,6	1,1203	231,8	1,2432*	84,6	1,0847
0	0,9660*	145,3	1,1404	0	0,9894	120,0	1,1219
18,2	0,9872*	0	0,9808	18,0	1,0126	168,9	1,1748
36,7	1,0129*	lasciata in riposo alla temperatura ambiente per 16 ore		24,9	1,0206	213,9	1,2275
45,8	1,0264*	0°	0,9814*	30,5	1,0264	0	1,0014*
59,8	1,0466*	15,8	1,0012*	49,3	1,0457	16,4	1,0179*
69,2	1,0588*	33,5	1,0245*	86,4	1,0820	57,2	1,0566*
88,4	1,0777*	36,0	1,0285*	131,9	1,1267	115,9	1,1170*
0	0,9724	41,6	1,0348*	192,7	1,1966	166,9	1,1673*
17,3	0,9952	45,1	1,0388*	232,5	1,2377	170,8	1,1711*
28,4	1,0107	60,4	1,0547*	0	0,9960	224,9	1,2324*
39,4	1,0255	82,2	1,0764*	lasciata alla temperatura ambiente per 40 ore		0	1.0017
56,5	1,0479	113,8	1,1088*	0°	1,0008	—	—

Coi valori della superiore tabella segnati con asterisco si sono costruite le tre curve *l m n* (fig. I tav. II); gli altri non sono stati rappresentati graficamente per non complicare troppo la figura.

Dalla tabella suddetta si vede che riscaldando l' amalgama e riportandola alla temperatura primitiva si ha un aumento permanente di resistenza, ch' è tanto maggiore quanto più elevata è la temperatura alla quale l' amalgama venne portata. Quando quest' aumento ha raggiunto un certo valore la resistenza non rimane più costante ma, lasciato l' amalgama in riposo alla temperatura ambiente, va lentamente aumentando fino ad arrivare ad un limite raggiunto il quale i riscaldamenti non hanno più che piccola influenza.

La resistenza a 0° dell' amalgama C (prima di essere riscaldata) è alquanto diverso nelle due serie riportate nelle tabelle V e VI e differenze simili si vedranno anche in seguito; si hanno quindi col sodio valori della resistenza elettrica non perfettamente costanti nelle diverse serie di esperienze, ciò che il Weber ed il Matthiessen avevano osservato per lo stagno.

Siccome la durata del riscaldamento, come vedremo in seguito, influisce sulla variazione permanente di resistenza darò nella seguente tabella il tempo T impiegato, nella precedente serie di esperienze, a portare egni volta il tubo da 0° a *t*.

t	T	*t*	T
37°,4	$0^h,50^m$	232°,5	$3^h,5^m$
88°,4	$1^h,50^m$	213°,9	$1^h,50^m$
145°,3	$2^h,30^m$	224°,9	$1^h,40^m$
231°'8	$3^h,15^m$		

20. In seguito feci una serie prima ascendente e poi discendente di misure per vedere se le curve ottenute nei due casi avessero qualche tratto comune o fossero interamente distinte. Siccome però avevo già esaurito l' amalgama C, preparai l' amalgama C_1 impiegando le stesse proporzioni di sodio e di mercurio, e versandola appena preparata in diversi recipienti alcuni dei quali poi vennero chiusi alla lampada. La reazione però questa volta fu meno viva sicchè l' amalgama risultò più ricca di sodio della precedente. A causa di ciò essa presentava una tendenza molto più forte a solidificare e la liquefazione mediante l' agitazione meccanica avveniva più difficilmente.

L'analisi dimostrò che essa conteneva 1,091 per cento di sodio.

Nella tabella seguente sono riportate le misure fatte con questa serie:

VII.

t	*r*	*t*	*r*	*t*	*r*
0°	0,9521	16°,8	0,9735*	130°,5	1,1294*
lasciata alla temperat. ambiente per 16 ore		34,5	0,9953*	113,9	1,1120*
0°	0,9521	73,2	1,0502*	102,9	1,1005*
18,0	0,9745	108,8	1,0914*	75,7	1,0748*
37,0	0,9995	117,6	1,1011*	57,2	1,0565*
60,2	1,0315	155,5	1,1380*	32,5	1,0250*
89,9	1,0757	203,5	1,1898*	18,5	1,0037*
0	0,9524	230,7	1,2176*	0	0,9734*
lasciata alla temperat. ambiente per 16 ore		206,8	1,2069*	—	—
0°	0,9528*	149,8	1,1493*	—	—

Il tempo impiegato per portare il tubo da 0° a 89°,9 fu di $0^h 55^m$; per portarlo da 0° a 230°,7 fu $2^h,5^m$ e da 230°,7 a 0° $4^h,25^m$.

Il riscaldamento ad 89°,9 non produsse in questa serie che una debolissima variazione permanente di resistenza, mentre con l'amalgama C si aveva avuta notevole portandola ad 88°,4. Ciò probabilmente dipende dalla durata del riscaldamento che fu di $0^h,55^m$ con l'amalgama C_1, e di $1^h,50^m$ con la C. Il portare l'amalgama ad 89°,9 fu sufficiente però a produrre in essa la tendenza ad una piccola variazione spontanea. Infatti prima del riscaldamento l'amalgama lasciata in riposo alla temperatura ambiente per 16 ore presentò una resistenza costante ed eguale a 0,9521, mentre dopo trattata allo stesso modo passò da 0,9524 a 0,9528.

I valori delle resistenze segnati con asterisco sono stati riprodotti graficamente nella fig. 2 (tav. II) dove A, B è la curva che si riferisce al mercurio puro: *ce* rappresenta i valori ottenuti duranti il riscaldamento e *df* quelli avuti durante il raffreddamento.

Dall' insieme di queste curve pare che la variazione permanente di resistenza avvenga in modo continuo tanto nel riscaldare quanto nel raffreddare il tubo; fra i punti *ed* della curva non potei fare misure ma mi accorsi che la resistenza andava crescendo quando rimaneva costante la temperatura, cosicchè è molto probabile che le due curve debbano essere riunite dalla linea spezzata *e*, *g*, *d*.

21. Siccome le amalgame C e C_1 oltre che col riscaldamento si liquefacevano meccanicamente con l'agitazione e le liquide presentavano maggiore resistenza elettrica delle solide volli vedere se agitando l'amalgama solida fino a farla diventare liquida si avesse un aumento di resistenza a temperatura costante.

Fu allora che adoperai il metodo di Kirchhoff, il quale permettendo di misurare resistenze piccolissime rese possibile l'operare su tubi larghi abbastanza da introdurvi un filo di platino.

Il tubo adoperato in tal caso fu già descritto ed è disegnato nella fig. 8 (tav. I). Il filo di platino per l'agitazione veniva introdotto dai fori centrali *d* dèi turaccioli ed abbassato ed innalzato parecchie volte: esso era stato prima arroventato sicchè l'amalgama vi aderiva perfettamente; ciò impediva che esso trasportasse con sè delle bollicine di aria nell'interno del tubo, il quale, del resto, rimaneva dopo l'agitazione speculare come prima. Le determinazioni furono fatte a 0°.

Passo a riferire una serie di misure eseguite con la stessa amalgama C_1.

Resistenza a 0_0 . . . . $r = 0{,}9611$

Agitata l'amalgama nel modo anzidetto diventa . . . . . . $r = 0{,}9832$

Lasciata in riposo nella neve fondente la resistenza va continuamente aumentando finchè dopo 4 ore circa diventa costante . . . . $r = 0{,}9960$

Lasciata per 20 ore in riposo alla temperatura ambiente la resistenza non varia; dopo una nuova agitazione si ha . . . . $r = 1{,}0100$

L'agitazione adunque produce l'aumento permanente di resistenza e la tendenza all'aumento spontaneo allo stesso modo e ad un dipresso con la stessa intensità dell'elevazione di temperatura.

22. Nelle misure delle variazioni permanenti di resistenza ottenute precedentemente, le amalgame essendo state riscaldate per un tempo piuttosto lungo, necessario a fare le diverse determinazioni, ho voluto vedere se la durata del riscaldamento

influisse sulle variazioni in parola. Per ciò fare riempii nuovamente il tubo con la stessa amalgama C_1 e ne misurai la resistenza a 0°.

Ebbi $r = 0,9655$.

Poscia avendo riscaldato una stufa ad aria alla temperatura di 145°, vi collocai il tubo verticalmente, e lo tenni a tale temperatura per 10^m. Riportato in seguito di nuovo a 0° si ebbe $r = 0,9663$ valore di poco superiore a quello precedentemente ottenuto. Riportai quindi il tubo nella stufa scaldata a 70° e lo lasciai per $2^h, 35^m$ a questa temperatura. Misurata di nuovo la resistenza a 0° risultò $r = 1,0033$.

Un nuovo riscaldamento a 145° per 10^m non fece variare sensibilmente la detta resistenza.

23. Pare adunque che piuttosto al riscaldamento prolungato anzichè alla elevazione di temperatura si debba attribuire la variazione permanente di resistenza. Affichè però essa avvenga, abbisogna che l'amalgama sia riscaldata nel tubo stesso in cui si misura la resistenza, poichè la stessa amalgama C_1 riscaldata per 9 ore in una boccetta (riempendo poi al solito il tubo) diede una resistenza di poco superiore a quella che aveva dato precedentemente senza il riscaldamento preventivo.

24. Volli esaminare del pari se il riscaldamento facesse variare la concentrazione dell'amalgama contenuta nella parte sottile del tubo B′ fig. 9 (tav. I): per ciò fare dopo misurata la resistenza del tubo lasciato per $2^h, 35^m$ a 70° (quando si ottenne il valore sopra riportato $r = 1,0033$) portai via, tenendo sempre il tubo verticale, l'amalgama contenuta negli imbuti M, e, raccolta diligentemente quella del tubo *b b*, la analizzai.

L'analisi diede 0,629 per cento di sodio, mentre l'amalgama C_1 che avevo introdotta nel tubo ne conteneva 1,091 per cento.

25. Questo fatto mi fece nascere il dubbio che io avessi da fare, invece che con un solo corpo, con un miscuglio di due amalgame distinte.

Tale ipotesi veniva confermata dal fatto che in un tubo pieno di amalgama C_1 e chiuso alla lampada s'erano visti comparire nella parte superiore alcuni cristallini, mentre non se ne vedevano nella parte inferiore.

Un'altra esperienza era conforme pure a tal modo di vedere. Un tubo da saggio ben chiuso contenente dell'amalgama C_1, riscaldato per lungo tempo in una stufa a 160° e lasciato lentamente raffreddare, mostrava alla parte superiore una rete di piccoli cristallini ed inferiormente una parte liquida che poteva essere separata capovolgendo delicatamente il tubo; bastava agitarla leggermente perchè i cristallini, infranti, sparsi dentro il liquido non fossero più visibili, ed il tutto diventasse perfettamente scorrevole come il mercurio puro.

26. Tentai la separazione delle due parti dell'amalgama C_1 con la disposizione sperimentale rappresentata dalla fig. 10 (tav. I). L'amalgama C_1, introdotta nel tubo A che termina in punta affilata, venne fusa, riscaldata per lungo tempo e fatta raffreddare lentamente. Poscia dopo averla lasciata per qualche ora in riposo si adattò al tubo A il tubo B, si ruppe la punta affilata *b* e si aspirò in *c* con la macchina pneumatica, mentre si faceva comunicare *d* con *i* tubi da disseccamento. A misura che effluiva in *b* la parte liquida comparivano nel tubo A dei magnifici cristalli a forma di lunghi aghi che ne tappezzavano tutte le pareti.

Sottoposi ad analisi le amalgame contenute nei tubi A e B e, senza fare tutte le correzioni inerenti alle medesime, calcolai il rapporto k fra l' idrogeno sviluppato ed il mercurio rimasto in ogni analisi, tenendo conto dell'idrogeno disciolto nell'acqua della campanella. Tale rapporto, essendo la temperatura e la pressione rimaste sensibilmente costanti nelle diverse analisi, è proporzionale alla quantità di sodio contenuto nelle amalgame. Esso fu di 9,53 per quella del tubo A e di 3,64 per quella del tubo B.

La parte solida cristallizzata era adunque assai più ricca di sodio della liquida [1].

27. Constatato così che l'amalgama C_1 era composta di due parti distinte feci la seguente esperienza per accertarmi se dentro il tubo in cui misuravo la resistenza elettrica avvenisse a causa del riscaldamento una separazione delle due parti suddette.

Presi un tubo di 3^{mm} di diametro interno, lungo 20^{cm} e ripiegato ad U e lo riempii di amalgama C_1 ben agitata affinchè fosse perfettamente omogenea: poscia lo collocai verticalmente dentro una stufa a 100° e ve lo tenni per 3 ore. Dopo che fu perfettamente raffreddato, tagliandolo, raccolsi l' amalgama contenuta nelle due estremità superiori di esso e quella della curvatura inferiore e le analizzai separamente. Il rapporto k fra l' idrogeno sviluppato ed il mercurio rimasto fu di 6,03 per l' amalgama contenuta nella parte superiore e 5,22 per quella contenuta nella parte inferiore. Una seconda esperienza, simile alla precedente, diede rispettivamente 6,54 e 5,60.

Pare adunque accertata la separazione delle due amalgame per effetto del riscaldamento. Essa basta a spiegare alcuni fenomeni da noi osservati, cioè la variazione permanente di resistenza e la liquefazione meccanica. Difatti se il riscaldamento fa salire porzione dell' amalgama solida ricca di sodio nella parte superiore del tubo, dove la sezione è molto grande e la resistenza trascurabile, le misure che vengono fatte di poi si riferiscono ad amalgame meno ricche che, come noi abbiamo visto e vedremo meglio in seguito, presentano maggiore resistenza.

La liquefazione meccanica delle amalgame parmi si possa spiegare con la rottura dei cristallini di amalgama solida, che prima dell' agitazione aderiscono fra di loro ed alle pareti del tubo formando una specie di tessuto che impedisce a quella liquida di scorrere. Tali cristallini essendo molto fragili, l' agitazione li riduce in piccolissimi frammenti che, mescolati alla massa liquida, diventano del tutto invisibili.

Riesce infine chiara la causa dell' aumento di resistenza dell' amalgama C_1, avvenuto dopo l' agitazione col filo di platino, il quale, riducendo in piccoli frammenti i cristallini suddetti, ne facilita il passaggio, che avviene probabilmente per differenza di densità, dal tubo *b b* agli imbuti M (fig. 8).

28. La spiegazione suddetta ed i fatti che la confermano parmi che possano rendere ragione dei fenomeni trovati dal Weber per le amalgame di stagno, quantunque a prima vista sembri difficile che la separazione di due amalgame di diversa concentrazione possa avvenire dentro un tubo orizzontale come era quello adoperato dal

[1] Non misurai le densità delle due amalgame, ma la solida era certamente meno densa della liquida e del mercurio, poichè gettandone alcuni cristallini sopra questi liquidi prima di sciogliersi rimanevano per qualche tempo galleggianti alla superficie.

detto sperimentatore. Bisogna però osservare che al tubo orizzontale di piccolo diametro dell' apparecchio del Weber erano saldati due grossi tubi verticali dove la separazione in parola doveva probabilmente avvenire in modo molto notevole. L' amalgama contenuta nel tubo orizzontale si sarebbe trovata così alle estremità in contatto con amalgame di diversa concentrazione ed è assai probabile che in tale caso si fossero presentati dei fenomeni di diffusione tali da produrre le variazioni permanenti di resistenza.

Io posso dire a questo proposito che avendo, in un' esperienza preliminare, riempito il mio tubo di un' amalgama ricca di sodio e gli imbuti superiori con mercurio puro, vidi che anche a 0° la resistenza non era costante, ma andava variando rapidamente a misura che il mercurio si diffondeva nel tubo: bastò pochissimo tempo parchè l' amalgama, che prima era solida, diventasse perfettamente liquida.

La variazione di resistenza, osservata dal Weber quando portò il tubo dal bagno a 30° in un altro pieno di acqua fredda, si spiega molto facilmente secondo il suddetto modo di vedere. Difatti è assai naturale il ritenere che, nel trasportarlo, il tubo sia stato alcun poco inclinato, ciò che avrà facilitato la diffusione suddetta. Del resto nella Memoria del Weber non è detto che si siano prese delle precauzioni speciali per collocare il tubo esattamente orizzontale ed una piccola inclinazione può agevolare il fenomeno in parola.

La stessa spiegazione io credo che possa rendere ragione di alcune variazioni permanenti di resistenza per la fusione, trovate dal Righi [1] col bismuto commerciale, che è una lega di bismuto, arsenico e stagno.

La contemporanea formazione di parecchie leghe di diversa concentrazione quando si uniscono direttamente due metalli è stata ammessa da E. Wiedemann [2] nel suo lavoro *Sulle variazioni di volume dei metalli e delle leghe con la fusione.* Parmi che le mie esperienze la dimostrino sperimentalmente nel caso del mercurio e del sodio.

29. La separazione delle due amalgame con l' apparecchio della fig. 10 avveniva in modo alquanto incompleto. La parte liquida dopo qualche tempo si rivestiva alla superficie di una crosta solida, probabilmente formata da piccoli cristallini trasportati in frantumi e che, lasciati in riposo, pare che abbiano come il ghiaccio la proprietà di saldarsi fra di loro: la parte solida fortemente strofinata fra le dita, o meglio fra due fogli di carta, dopo qualche tempo diventava scorrevole come se fosse liquida, probabilmente perchè i cristalli si riducevano in polvere, e l'amalgama liquida ancora contenuta fra di essi venendo fuori, li bagnava completamente.

Dovetti rinunziare all' idea di isolare perfettamente l'amalgama liquida (la quale probabilmente componevasi in parte di una dissoluzione dell' amalgama cristallizzata nell' eccesso di mercurio ed in parte forse di un composto liquido di sodio e mercurio del quale parleremo in seguito) perchè non mi riuscì di separarla dai fragili cristallini solidi dei quali sopra ho parlato.

Riescii però nella separazione dell' amalgama solida, impiegando due metodi diversi:

I) Collocandola in un tubo di forma simile al tubo A (fig. 10) legato ad una lunga corda che feci ruotare velocemente per molto tempo.

(1) R. Accad. dei Lincei XIX, 1883-84.

(2) Wied. Ann. 3, 1878, pag. 327.

II) Stringendola fortemente dentro un pezzo di fitta tela, fra due robuste lamine di ferro, dentro una morsa da fabbro ferraio.

Sì nell' uno che nell' altro caso operai con 1500 grammi di amalgama preparata con le stesse proporzioni della C_1 e dalla quale, dopo un prolungato riscaldamento, avevo separato con un apparecchio simile a quello della fig. 10 la maggior parte dell' amalgama liquida. Chiamerò S ed S_1 le due amalgame solide così ottenute: in esse, specialmente nella prima, la liquefazione meccanica mediante lo strofinio avveniva assai difficilmente cosicchè, se è probabile che ancora contenga dell' amalgama liquida, questa sarà certo in quantità molto piccola.

Il punto di fusione era di 145°.

L' analisi diede i seguenti risultati: Amalgama S 2,109 per cento di sodio (media di 2 analisi).

Amalgama S_1 2,012 per cento di sodio (media di 4 analisi).

La differenza fra i risultati delle analisi delle due amalgame S ed S_1 deve essere attribuita alla presenza dell' amalgama liquida. È probabile che se si trovasse un mezzo per separare completamente le due amalgame, la solida sarebbe alquanto più ricca di sodio della S.

30. L' amalgama cristallizzata sia per la forma dei cristalli, sia per la composizione, sembra il composto definito ottenuto da Löwig (1) e studiato poscia da Kraut e Popp (2).

Kraut e Popp la preparano lasciando per alcuni giorni dell' amalgama 3 % di sodio in contatto con non molta acqua, o con una soluzione di un composto non acido di sodio: dopo qualche tempo si vedono apparire dei cristallini che vengono separati per pressione dal rimanente mercurio.

I suddetti sperimentatori danno l' analisi delle differenti amalgame cristallizzate che essi preparavano impiegando diverse soluzioni alcaline: i valori da loro trovati oscillano fra 1,81 ed 1,87 % di sodio.

Preoccupato della differenza fra i risultati dell' analisi dell' amalgama da me preparata e quelli di Kraut e Poppio ho voluto seguire il loro metodo di preparazione.

Trattando per alcuni giorni l' amalgama 3 % (ottenuta al solito modo per azione diretta dei metalli) con acqua distillata ebbi l' amalgama cristallizzata che separai dal rimanente mercurio stringendola alla morsa: la chiamerò S_2. Quantunque durante l' operazione l' amalgama, rimasta un poco umida, si ossidasse alquanto alla superficie, sottoposta ad analisi risultò contenere (media di due misure) 2,003 % di sodio vale a dire una quantità superiore di quella trovata da Kraut e Popp. Ciò non pertanto essa si liquefaceva dopo uno strofinio prolungato, il che dimostrava come non fosse interamente priva di amalgama liquida.

Mi pare da queste esperienze di poter concludere che la formola $Na^2 Hg^{12}$ proposta da Kraut e Popp, corrispondente ad 1,88 % di sodio in peso, non sia esatta, e che il sodio contenuto nell' amalgama cristallizzata è certamente superiore al 2 %. Sembra invece che si debba adottare la formola $Na^2 Hg^{10}$ che corrisponde al 2,25 %.

(1) Jahrberichte für 1860.

(2) Ann. der. Chem. und. Pharm. 159, 1871, pag. 188.

I risultati di Kraut e Popp dipendono probabilmente da una incompleta separazione del mercurio: io ho dovuto infatti adoperare cure grandissime per ottenere i risultati sopra descritti.

31. Ho determinato la resistenza elettrica delle amalgame S, S_1 S_2 impiegando in tali misure il ponte di Wheatstone costruito dal sig. Bartolini.

I valori ottenuti sono riportati nelle seguenti tabelle:

VIII.

t	*r*
0°	0,9025
13,5	0,9165
48,5	0,9541
82,0	0,9968
115,7	1,0459

IX.

t	*r*	*t*	*r*
0°	0,9006	49°,7	0,9561
14,0	0,9144	29,1	0,9291
37,7	0,9404	21,5	0,9218
69,0	0,9768	108,5	1,0368
95,8	1,0129	153,0	1,1327 (1)
111,9	1,0409	207,7	1,1820
72,2	0,9842	0	0,9125
58,2	0,9641	—	—

X.

t	*r*	*t*	*r*
0°	0,9029	146°,0	1,1167
109,0	1,0413	148,0	1,1182
119,5	1,0565	155,0	1,1256
123,5	1,0635	169,0	1,1399
125,2	1,0653	190,5	1,1569
128,0	1,0720	0	0,9110
135,0	1,0908	—	—

XI.

t	*r*
0°	0,9068
34,8	0,9422
84,0	1,0014
119,0	1,0589
174,0	1,1545
0	0,9195

Le tabelle VIII, IX, X contengono tre serie di misure fatte riempendo tre volte il medesimo tubo con l' amalgama S: la tavola XI contiene una serie di misure fatte con l'amalgama S_1: le diverse serie della prima amalgama sono abbastanza concordanti fra di loro ed anche le due amalgame S ed S_1 presentano sensibilmente la medesima resistenza. Dell' amalgama S_2 si misurò la resistenza a 0° e trovatala $r = 0,9091$ valore poco differente dei precedenti, si credette inutile fare misure a diverse temperature.

(1) Questo valore è evidentemente troppo grande, a causa, probabilmente, di qualche errore di lettura.

È da notare che l' amalgama S, che l' analisi e la molto difficile liquefazione meccanica dimostrarono contenere minor quantità di amalgama liquida, presentò la minima resistenza elettrica; la massima resistenza presentò invece l' amalgama S_2 per la quale l' analisi dimostrò il contrario. Se si potesse avere perfettamente pura, l' amalgama cristallizzata di sodio presenterebbe probabilmente una resistenza alcun poco inferiore a quella dell' amalgama S_2.

La variazione permanente di resistenza fu solo di $^1/_{100}$ circa nelle serie riportate nelle tabelle IX e X, malgrado il riscaldamento fosse durato in entrambe moltissimo: essa fu alquanto maggiore per l' amalgama S_1 che, come dicemmo sopra, contiene maggior quantità di amalgama liquida, alla presenza della quale deve naturalmente attribuirsi tale variazione. È assai probabile che l' amalgama pura non la presenti, o, se ciò avvenga, sia in modo poco sensibile e spiegabile con le modificazioni di aggregamento molecolare che la fusione produce nei corpi a struttura cristallina.

Con i valori delle tabelle VIII, IX, e X si è disegnata una curva di grandi dimensioni dalla quale si sono ricavate le resistenze dell' amalgama cristallizzata di sodio di 25° in 25° che sono riportate nella seguente tabella.

XII.

t	*r*	*t*	*r*
0°	0,9016	130°	1,0775
25	0,9269	135	1,0905
50	0,9558	140	1,1040
75	0,9862	145	1,1152
100	1,0206	150	1,1205
125	1,0655	175	1,1449
—	—	200	1,1706

La curva sopra accennata è riprodotta in piccolo in *k l'* fig. 1 (tav. II); essa ha una inflessione verso la temperatura di fusione delle amalgame.

32. Volendo in seguito passare ad uno studio più completo delle amalgame liquide, ho disciolto l' amalgama S in diverse quantità di mercurio ed ho misurato la resistenza elettrica dei composti così ottenuti. Ho preparato in tal modo le seguenti amalgame liquide:

Amalgama D, con 1 parte di amalgama S e 5 parti di mercurio; contiene quindi 0,353 per cento di sodio;

Amalgama F, con 1 parte di amalgama D e 2 parti di mercurio; contiene quindi 0,118 per cento di sodio;

Amalgama E, con 1 parte di amalgama D e 9 parti di mercurio; contiene quindi 0,035 per cento di sodio.

Nel preparare le amalgame, dopo mescolate esse venivano riscaldate nella stufa fino a 160° e bene agitate fino a che diventassero completamente omogenee:

Nella seguente tabella sono riportati i valori ottenuti alla temperatura di 0°:

Amalgama	Composizione espressa in diecimillesimi di sodio contenuto	r
D	35,3	1,00839
F	11,8	1,00370
E	3,5	1,00129

Come si vede dalla superiore tabella la resistenza diminuisce con il diminuire della quantità di sodio che esse contengono ed all' incirca proporzionalmente a questa.

Il Berthelot [1] avendo misurato il calorico sviluppato attaccando con l' acido cloridrico diverse soluzioni di amalgame solide di sodio nel mercurio viene al seguente risultato: « Io credo di poter concludere che la dissoluzione delle amalgame definite « in una quantità considerevole e crescente di mercurio assorbe una quantità di ca- « lorico che tende a divenire sensibilmente costante, quando la proporzione del dis- « solvente è molto grande, precisamente come la dissoluzione dei sali nell' acqua ».

La stessa analogia fra le soluzioni e le amalgame sembra si presenti per la resistenza elettrica quando si tenga conto della diversa conducibilità dei solventi. Ciò accade però allorchè si scioglie il composto definito in diverse quantità di mercurio come si fece per le amalgame D, E, F, mentre risultati notevolmente diversi si hanno unendo direttamente i due metalli come nel caso delle amalgame A e B (Vedasi § 16, *b*).

33. Ho misurato pure la resistenza delle amalgame D ed F alle diverse temperature.

I risultati sono riferiti nelle seguenti tabelle:

XIV.
Amalgama D

t	r
0°	1,00839
82 6	1,08997
142,5	1.15892
213,0	1,24966
0	1,00839

XV.
Amalgama F

t	r
0°	1,00370
65,3	1,00685
108,6	1,11476
157,5	1,16876
209,0	1,23103

Con i valori della tabella XIV si è costruita la curva MN fig. 2 (tav. II).

(1) Annales de Chimie et de Physique 5me serie, tome XVIII (1879) pag. 433, 442.

I valori della tabella XV che danno una curva intermedia fra M N ed A B del mercurio puro non sono stati riportati graficamente per non complicare la figura.

34. La differenza fra il comportamento delle amalgame liquide A,B e D, E, F, vale a dire che in queste la resistenza diminuisce col diminuire della quantità di sodio che esse contengono, mentre in quelle resta costante, mi ha fatto nascere il dubbio che quando si combini direttamente il sodio in piccole proporzioni con il mercurio, oltre alla formazione del composto definito, il quale poi si scioglie nell'eccesso di mercurio (come i sali nell' acqua) si formi qualche composto liquido che presenti una resistenza elettrica notevolmente diversa. Le amalgame A e B in tal caso anzichè una dissoluzione diversamente concentrata del composto definito nel mercurio sarebbero un miscuglio in diverse proporzioni di tale dissoluzione e del composto liquido, ciò che spiegherebbe come esse possano, pur contenendo diverse quantità di sodio, avere sensibilmente la medesima resistenza elettrica.

Per confermare possibilmente questa ipotesi ho cercato di preparare due amalgame aventi la medesima concentrazione, ma però l' uno G contenente la più piccola quantità possibile dell' amalgama liquida di cui sospettavo l' esistenza e l' altro G_1 che ne contenesse la maggior quantità possibile.

Per preparare G disciolsi l' amalgama S_1 (avendo esaurito tutto l' amalgama S) nel mercurio fino ad avere una dissoluzione che contenesse il $^1/_2$ per cento circa di sodio.

Preparai l' amalgama G_1 unendo direttamente il sodio al mercurio alla più bassa temperatura alla quale la combinazione possa avvenire. Ciò ottenni mettendo il sodio nel mercurio quando questo era freddo e riscaldando dopo lentamente in un bagno di sabbia: in questo caso la quantità di sodio bruciata fu minima.

Per ridurre le amalgame G e G_1 alla stessa concentrazione le analizzai successivamente, a breve distanza di tempo l' una dall' altra, e calcolando il solito rapporto k fra l' idrogeno sviluppato ed il mercurio rimasto aggiunsi alla più ricca (G_1) tanto mercurio quanto era necessario affinchè avessero entrambe la identica composizione. Una nuova analisi di ambedue eseguita come verifica mi accertò che esse contenevano la medesima quantità di sodio.

Misurate le resistenze a 0°, di G e di G_1 vidi come mi attendevo che esse avevano una conducibilità elettrica notevolmente diversa.

I risultati ottenuti sono i seguenti:

XVI.

Amalgama	r
G	1,00879
G_1	1,01460

La differenza come si vede è notevolissima e fa ritenere probabile l'esistenza di un amalgama definito liquido contenente poco sodio.

35. I dati termochimici sono incompleti, su questo riguardo il Berthelot essendosi più specialmente occupato delle amalgame ricche di sodio, le quali per il loro alto punto di fusione difficilmente si prestano ad uno studio completo della resistenza elettrica. Io ho voluto vedere se qualche risultato termochimico potesse confermare l'ipotesi dell'esistenza di un composto liquido. Ho costruito perciò un apparecchino fig. 11 (tav. I) che mi avesse potuto servire da calorimetro differenziale. A A′ erano due tubi cilindrici riuniti per mezzo delle smerigliature *b b′* ad un tubo capillare orizzontale *a* pieno di acido solforico che si elevava fino in *c* dove era segnata una graduazione; alla estremità superiore di A erano masticiati ermeticamente due provini B B′ fatti dalla stessa porzione di una canna di vetro. In B e B′ si versavano le amalgame da paragonare, prese in quantità eguali mediante una misuretta Bunsen, e contemporaneamente la medesima quantità di acido cloroidrico diluito.

Questo apparecchio però non mi diede risultati tali da poter venire ad una conclusione precisa.

Nelle molte serie di misure fatte si avevano sempre piccoli spostamenti in vario senso del livello *c* dell'acido solforico, sia se si mettesse in entrambe le provette la stessa amalgama G o G_1, sia che si versasse G in B e G_1 in B^1 o viceversa.

Questo risultato negativo fino ad un certo punto può spiegarsi con la poca sensibilità delle misure calorimetriche che, eseguite nel modo anzidetto, riescono alquanto grossolane in confronto alla estrema sensibilità delle misure di resistenza elettrica, che svelano le più piccole differenze di struttura dei corpi.

36. *Amalgama di potassio.* Senza ripetere col potassio la lunga serie di esperienze fatte col sodio mi limitai alla preparazione dell'amalgama cristallizzata di potassio già scoperta da Berzelius ed alla quale Kraut e Popp, partendo dall'amalgama doppia di potassio e sodio, ottenuta facendo agire lentamente l'amalgama di sodio con una soluzione di sale potassico, assegnano la formola $Hg_{24}K_2$ (1) (1,59 $^0/_0$ di potassio).

Io ho ottenuto l'amalgama cristallizzata nel seguente modo:

Con 18 grammi di potassio e 1000 grammi di mercurio preparai in un crogiuolo coperto un' amalgama empirica operando allo stesso modo da me praticato per il sodio. Essa cristallizzò col raffreddamento e stretta nella morsa al modo già descritto venne separata dall'eccesso di mercurio. Questa amalgama presentava il fenomeno della liquefazione meccanica, sicchè credetti che contenesse ancora del mercurio. Per depurarla viemmaggiormente la fusi dentro un tubo lungo della forma del tubo A fig. 10 (tav. I) circondato da un altro tubo pieno con paraffina e la lasciai raffreddare completamente in riposo. L'indomani ruppi la punta del tubo sottile e feci uscire il mercurio, mentre dalla parte superiore estrassi dei cristalli di forma cubica, fra i quali alcuni molto belli, che sembravano quasi interamente privi di mercurio. Questi cristalli avevano l'aspetto ed il colore dell'antimonio; fondevano a 60° circa: analizzati dimostrarono contenere 1,854 per cento di potassio, quantità superiore a quella corrispondente alla formola di Kraut e Popp, probabilmente per la ragione enunciata nel caso del sodio. Di quest' amalgama venne misurata la resistenza elettrica nel solito modo.

(1) Crookwitt (Jahrberichte für 1847-48) aveva preparato con la fusione contemporanea dei due metalli due amalgame che corrispondevano alle formole $Hg_{25}K_2$ ed $Hg_{20}K_2$.

Nella seguente tabella sono riportati i risultati ottenuti:

XVII.

t	r	t	r
0°	0,7609	0°	0,7641
18,6	0,8094	62,8	1,0495
28,7	0,8439	67,2	1,2341
37,2	0,8729	75,3	1,3447
47,2	0,9092	80,4	1,3598
51,4	0,9327	96,0	1,3838
55,4	0,9569	123,8	1,4306
60,6	1,0054	145,8	1,4676
71,0	1,3134	190,5	1,5373
71,9	1,3171	—	—

Si hanno valori notevolmente diversi, a temperature di poco inferiori a quella di fusione, facendo raffreddare lentamente l'amalgama precedentemente fusa. Essi sono riprodotti nella seguente tabella:

XVIII.

t	r
72°,1	1,3228
60,3	1,2541
57,1	1,2409
55,1	1,2323
49,8	0,9464

Fra 55°,1 e 49°,8 non si potè fare alcuna misura, tanto era rapida la diminuzione di resistenza. Evidentemente ciò deve attribuirsi ad un fenomeno di surfusione.

La variazione permanente di resistenza a 0° fu piccolissima quando l'amalgama era stata riscaldata sino a 70°, temperatura abbastanza elevata se si considera il basso punto di fusione dell'amalgama in parola.

Con i valori delle tabelle XVII e XVIII si sono costruite le curve UDCV e DEC (fig. 3) che mostrano la variazione della resistenza elettrica con la temperatura. Abbastanza grande a 0°, essa diventa grandissima in vicinanza del punto di fusione dell'amalgama, e rimane anche considerevole per l'amalgama fusa. La parte CED della curva si riferisce ai valori della tabella XVIII.

La grandezza dell'aumento della resistenza con la temperatura non riesce evidente nella fig. 3 dove per far rientrare la curva nel foglio le ordinate sono state

costruite di dimensioni metà di quelle analoghe del sodio. Si sono perciò disegnate in piccolo nella fig. 4 le resistenze del mercurio e delle amalgame cristallizzate di sodio e di potassio alle diverse temperature, con la medesima scala: in essa si vede il diverso comportamento dei tre corpi.

Nella tavola seguente sono riportate di 25° in 25° le resistenze dell'amalgama cristallizzata di potassio ricavate da una curva di grandi dimensioni costruita accuratamente con i valori della tavola XVII.

XIX.

t	*r*	*t*	*r*
0°	0,7609	70°	1,3030
25	0,8300	75	1,3420
50	0,9235	80	1,3582
55	0,9510	100	1,3930
60	0,9948	125	1,4340
62,5	1,0460	150	1,4758
65	1,1500	175	1,5142
67,5	1,2490	200	1,5540

Conclusioni.

37. Riassumerò nelle seguenti proposizioni, le conclusioni alle quali sono arrivato nel presente lavoro:

1° Le amalgame liquide contenenti piccole quantità di sodio, preparate per unione diretta dei due metalli, presentano una resistenza superiore a quella del mercurio puro: questa resistenza è sensibilmente la stessa per due amalgame delle quali l'una contiene più del doppio di sodio dell'altra.

2° Le amalgame più ricche di sodio che solidificano, presentano una resistenza minore di quella del mercurio puro; però la resistenza a 0°, quando si riscalda l'amalgama e poscia si riporta nuovamente a 0°, si trova aumentata.

3° Tale aumento permanente di resistenza a 0°, per effetto del riscaldamento precedente, è tanto maggiore quanto più elevata è la temperatura alla quale l'amalgama venne portata. Quando quest' aumento ha raggiunto un certo valore, la resistenza non rimane più costante, ma, lasciando l'amalgama in riposo alla temperatura ambiente, va lentamente aumentando fino ad arrivare un limite, raggiunto il quale i riscaldamenti non hanno più che piccola influenza.

4° Questi fatti sembrano dovuti a ciò che le amalgame suddette, sono costituite di due parti distinte le quali col riscaldamento tendono a separarsi.

5° La formola $Na^2 Hg^{12}$ assegnata da Kraut e Popp al composto solido definito di sodio e mercurio pare debba essere sostituita con l'altra $Na^2 Hg^{10}$.

6° Le amalgame liquide formate disciogliendo diverse quantità di amalgama cristallizzata nel mercurio, presentano resistenze tanto più piccole, quanto minore è la quantità di sodio in esse contenuta.

7° La differenza di comportamento fra le amalgame liquide contenenti piccole quantità di sodio, preparate dall'unione diretta dei due metalli e quelle ottenute disciogliendo l'amalgama cristallizzata nel mercurio fa supporre l'esistenza di un composto definito liquido di mercurio e di sodio contenente piccole quantità di questo ultimo. Il fatto che due amalgame liquide di identica concentrazione preparate in modo diverso presentano resistenza elettrica differente tenderebbe a confermare la detta ipotesi.

8° Sembra che all'amalgama cristallizzata di potassio si debba assegnare la formola $Hg^{20}K^2$ anzichè l'altra $Hg^{24}K^2$ data da Kraut e Popp. La detta amalgama presenta un grandissimo coefficiente di variazione di resistenza elettrica con la temperatura.

Fig. 1.

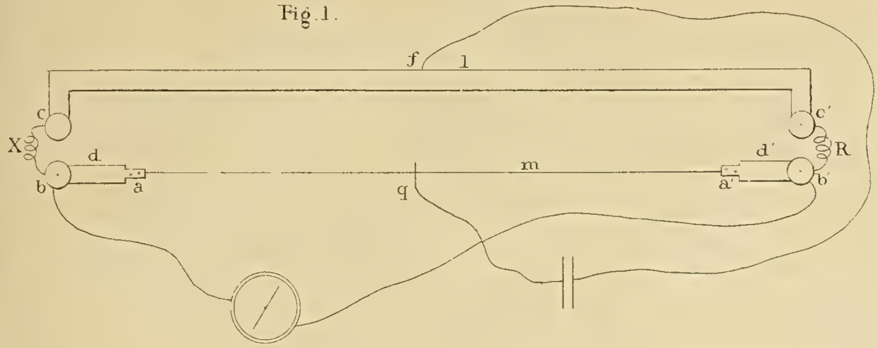


Fig. 3.

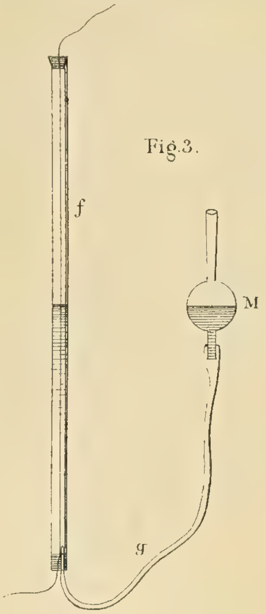


Fig. 4.

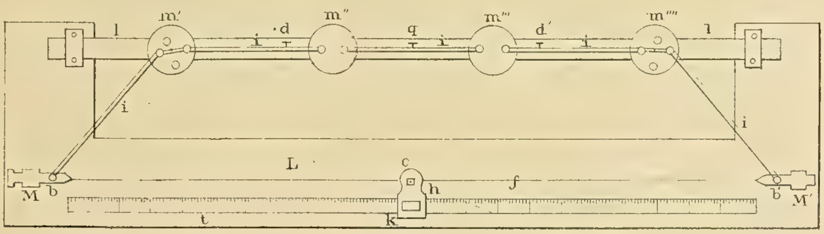


Fig. 2.

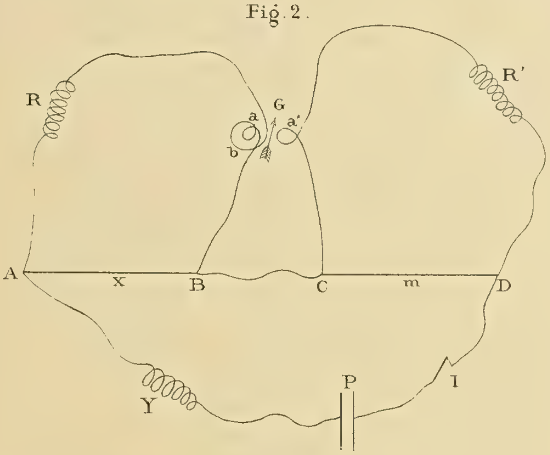


Fig. 10.

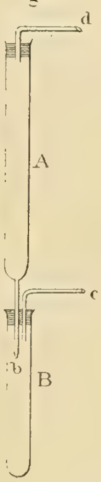


Fig. 11.

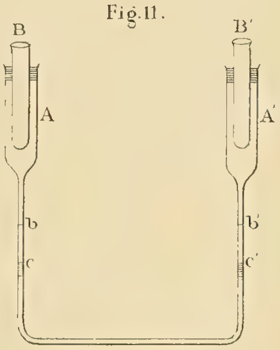


Fig. 5.

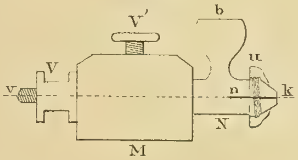


Fig. 7.

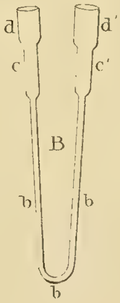


Fig. 8.

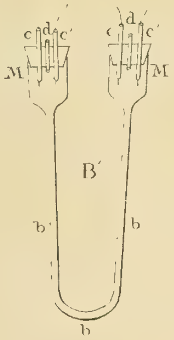


Fig. 6

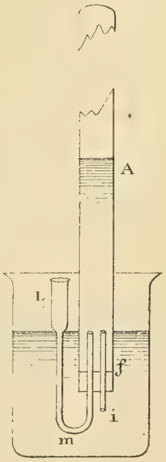
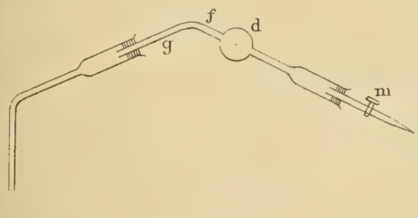
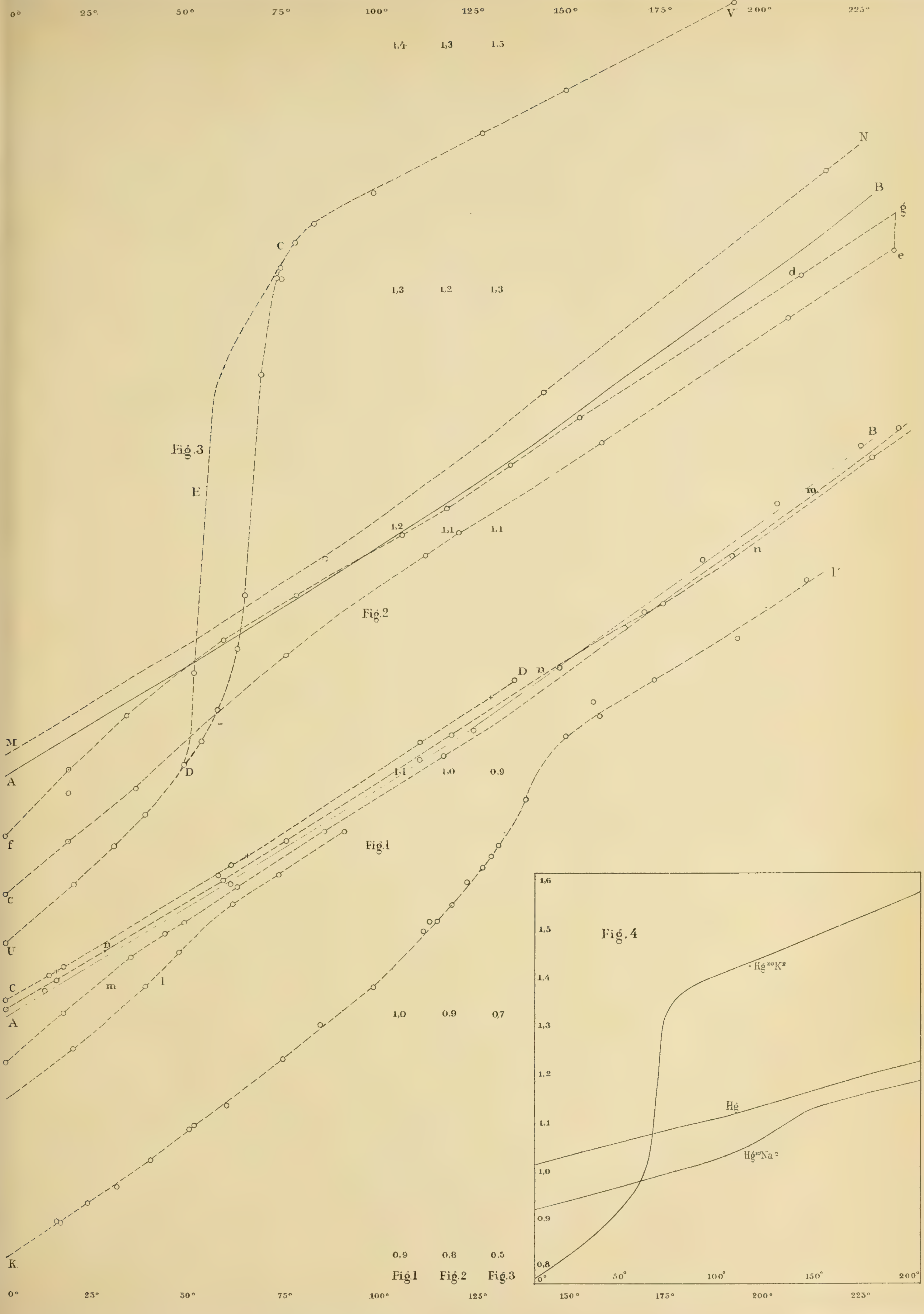


Fig. 9.





Lit. Bruno e Salomone, Roma

RELAZIONE

letta dal Socio Struever, relatore, a nome anche del Socio Cossa, nella seduta del 9 gennaio 1887, sulla Memoria del sig. Ettore Artini intitolata: *Natrolite della Regione Veneta.*

« Il sig. Ettore Artini ha intrapreso lo studio delle varietà di Natrolite che s'incontrano in parecchie località del Veneto. Ai pochi giacimenti sino ad ora conosciuti (Monte Baldo, Montecchio Maggiore, Altavilla, Val de' Zuccanti) egli aggiunge parecchie nuove, cioè S. Pietro di Lugo, Salcedo, Brendola, Recoaro, Tretto, Bassano e Breganze.

« In pochi soltanto di questi luoghi si trovano cristalli misurabili, a Monte Baldo, Montecchio Maggiore, S. Pietro di Lugo e Salcedo, e precisamente a questi cristalli si riferiscono a preferenza le osservazioni istituite dall' autore. Per le tre prime località egli potè procurarsi un numero sufficiente di cristalli bene sviluppati e determinarne le principali proprietà fisiche e le costanti cristallografiche dedotte da numerose misure col metodo dei minimi quadrati. Un solo cristallo di Salcedo permise esatte misure, dalle quali risulterebbero costanti molto vicine a quelle determinate per la varietà di S. Pietro di Lugo. Sul minerale di Monte Baldo si trovarono anche due forme nuove per la Natrolite.

« È interessante ancora il confronto che l' autore istituisce fra le costanti da lui trovate e quelle determinate da altri sovra cristalli della stessa Natrolite provenienti da giacimenti esteri, non che il fatto che quelle deviazioni dal tipo trimetrico, incontrate da altri autori in qualche natrolite estera non esistono nei cristalli del Veneto, i quali invece anche per le proprietà ottiche corrispondono esattamente alla simmetria del sistema trimetrico.

« Lieti di veder sorgere nel nostro paese un altro giovane mineralista, il quale non solo osserva e sperimenta con cura, ma applica alle sue osservazioni metodi esatti di calcolo e le espone in modo chiaro e conciso, proponiamo all' Accademia l' inserzione nei suoi Atti della Memoria del sig. Artini ».

Natrolite della Regione Veneta.

Memoria di ETTORE ARTINI

Numerosissime sono le località della Regione Veneta in cui si trova la Natrolite; alcune anzi sono in grande rinomanza per la copia di bei cristallini: e io ne ho potuto fare uno studio abbastanza esatto e completo, per la grande quantità di materiale che possiede il nostro museo.

Però credei bene non parlare della Natrolite che si trova in *Val di Fassa*, e per essere questa già stata descritta e analizzata [1], e per il fatto che non ne vidi mai in cristalli distinti, misurabili colla dovuta esattezza. Quanto alla così detta *Natrolite rossa* di *Val dei Zuccanti* di cui parla lo Zepharowich [2], la farò, in breve, oggetto di una memoria speciale.

Monte Baldo.

Studio cristallografico.

Forme osservate (110), (111), (100), (010), (210), (310). (Vedi la fig. 1).

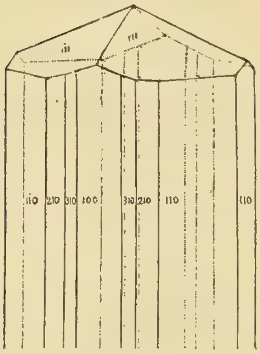


Fig. 1.

Le due ultime sono nuove per la natrolite.

Le facce della forma (110) sono raramente solcate o rigate, generalmente piane, ampie, splendenti. Quelle della forma (111) sono generalmente splendenti, qualche volta piane, talora spezzate o contorte; spesso una o due facce della piramide prendono uno sviluppo assai maggiore delle altre, dando così al cristallo una certa apparenza di monoclino. Le facce della (100) sono presenti quasi sempre, generalmente ampie; talora opache e con una forte deviazione dalla zona $[110 . 1\bar{1}0]$, talora, e specialmente nei cristallini che presentano le forme (210), (310), piane, splendenti, perfettamente in zona. Quelle di (010) sono un poco meno comuni, spesso opache, splendenti in alcuni come quelle di (100); talvolta con deviazione di zona, e sono quasi sempre più strette delle precedenti.

Facce della forma (210) compaiono solo alcune volte, ma sono sempre splendenti e piane, benchè alquanto strette. Facce di (310) compaiono ancora con minore frequenza,

(1) Fuchs, Journal de Schweigger, VIII 353; XVIII 1.

(2) *Mineralogisches Lexicon für das Kaiserthum Oesterreich.*

strette, ma pure splendenti e piane, ben visibili con una lente di ingrandimento, come del resto tutte le altre.

Nessuna traccia di facce vicinali ben definite.

I cristalli, numerosi, sono liberi ad una sola estremità, come al solito, e raggiungono in larghezza e grossezza perfino due mm. essendo lunghi talora anche un paio di centimetri.

Ne misurai quattro, perfetti e splendidissimi.

Calcolo delle costanti col metodo dei minimi quadrati.

I

$a_{,}:b_{,}:c_{,} = 0,97984:1:0,34564$.

Angoli	Misurati	Calcolati (1)	$+d_{,}$ (2)	$-d_{,}$	$d_{,}^2$
110 . 1$\bar{1}$0	* 88°.50′	—	—	—	—
110 . 111	* 63.43	—	—	—	—
111 . 1$\bar{1}$1	36.40	36°. 6′.30″	2010	—	4 040 100
111 . $\bar{1}$11	37.42	36.52.40	2960	—	8 761 600
111 . $\bar{1}\bar{1}$1	52.49	52.34	900	—	810 000
					$\Sigma d_{,}^2 = 13\ 611\ 700$

(3) $\mu' = 22'.40''$.

II

$a_{,,}:b_{,}:c_{,} = 0,97934:1:0,34564$.

Angoli	Misurati	Calcolati	$+d_{,,}$	$-d_{,,}$	$d_{,,}^2$
110 . 1$\bar{1}$0	88°.50′	88°.48′.10″	110	—	12 100
110 . 111	63.43	63.42.40	20	—	400
111 . 1$\bar{1}$1	36.40	36. 6.20	2020	—	4 080 400
111 . $\bar{1}$11	37.42	36.53.40	2900	—	8 410 000
111 . $\bar{1}\bar{1}$1	52.49	52.34.40	860	—	739 600
					$\Sigma d_{,,}^2 = 13\ 242\ 500$

$\mu'' = 22'.27''$.

(1) Coll'approssimazione di 10″.

(2) La differenza è data in secondi.

(3) $\mu_{,}$ errore medio $= \sqrt{\dfrac{\Sigma\varepsilon^2}{n-\omega}}$.

III

$a_{,}:b_{,}:c_{,,} = 0{,}97984:1:0{,}34594$.

Angoli	Misurati	Calcolati	$+d_{///}$	$-d_{///}$	$d_{///}^2$
110 . 1$\bar{1}$0	88°.50′	88°.50′.00″	—	—	—
110 . 111	63.43	63.41.50	70	—	4 900
111 . 1$\bar{1}$1	36.40	36. 8	1920	—	3 686 400
111 . $\bar{1}$11	37.42	36.54.10	2870	—	8 236 900
111 . $\bar{1}\bar{1}$1	52.49	52.36.20	760	—	577 600
					$\Sigma d_{///}^2 = 12\,505\,800$

$\mu''' = 21'.50''$.

IV

$a:b:c = 0{,}97962:1:0{,}34991$.

Angoli	Misurati Medie	Limiti	n	P (¹)	Calcolati	$+d$	$-d$	d^2
110 . 1$\bar{1}$0	88°.50′	88°.36′ — 89°. 2′	10	21	88°.49′.10″	50	—	2 500
110 . 111	63.43	62.55 — 64. 7	8	16	63.26	1020	—	1 040 400
111 . 1$\bar{1}$1	36.40	36.26 — 36.50	3	9	36.28.40	690	—	476 100
111 . $\bar{1}$11	37.42	37 20 — 37.52	4	11	37.15.50	1570	—	2 464 900
111 . $\bar{1}\bar{1}$1	52.49	52. 6 — 53.23	4	7	53. 8	—	1140	1299 600
								$\Sigma d^2 = 5\,283\,500$
310 . 100 (²)	18.17	17.59 — 18.35	4	7	18. 4.50			
210 . 310	8.24	8.21 — 8.27	2	3	8. 0.40			
110 . 210	17.44	17.25 — 18.13	3	5	18.18.50			

$\mu = 15'.59''$.

Quindi resta stabilito che il rapporto più probabile dei parametri fondamentali è

$$a:b:c = 0{,}97962:1:0{,}34991.$$

Studio fisico.

Ha sfaldatura perfetta secondo (110).

È trasparente, incolora; ha lucentezza vitrea.

(¹) $P = \Sigma p$, ove p (= ad 1, 2, o 3) è il peso di ciascun angolo misurato.

(²) Questi tre ultimi angoli vennero esclusi dal calcolo dei minimi quadrati, non potendo essi migliorare in alcun modo i risultati finali.

Il piano degli assi ottici è parallelo a (010). La bisettrice acuta, positiva, è parallela a [110 . 1$\bar{1}$0].

Due lamine tagliate nello stesso cristallo normalmente alle due bisettrici, mi diedero, nell' olio

$$2Ha = 62^\circ.30' \text{ (Na)}$$
$$2Ho = 119^\circ.53' \text{ (Na)};$$

dai quali si calcola

$$2V = 61^\circ.52' \text{ (Na)}.$$

Questa bellissima natrolite si trova a *Tierno*, presso *Mori*, alle radici settentrionali del *Monte Baldo*, racchiusa in grosse geodi di una brecciola o tufo basaltico, di colore giallastro o brunastro.

Spesso i bei cristalli, specialmente i più limpidi, che presentano le forme (210), (310), sono impiantati profondamente nella apofillite (100) (001) (111), e ne sporgono solo per una porzione della estremità terminata. L'apofillite è lattea, in cristalli grossi opachi, già in parte decomposti, e che perciò fanno una lieve effervescenza cogli acidi.

Talora i cristalli non sono distinti, e allora il minerale prende un aspetto fibroso raggiato, di colore bianco di latte.

Montecchio Maggiore.

Studio cristallografico.

Forme osservate (110), (111), (100), (010), (11. 10. 11).

Le facce della forma (110) sono generalmente solcate e rigate parallelamente allo spigolo [110 . 1$\bar{1}$0], talora però liscie; sempre splendenti. Le facce di (111) sono liscie, ma talora spezzate e contorte, e qualche volta di assai diverso sviluppo, come in quella del M. Baldo. Quelle della forma (100) sono presenti spesso, splendenti e liscie, ma per lo più strettissime. La forma (010) è poco comune, e le sue facce sono straordinariamente strette. Facce della (11 . 10 . 11) si trovarono raramente, ma assai nette e distinte.

Nessuna traccia di facce vicinali ben definite; però notai una fortissima oscillazione nei valori degli angoli da cristallo a cristallo, così che per ottenere costanti molto probabili, dovetti misurarne non meno di dodici, dei migliori e più splendidi, scelti tra parecchie centinaia.

Faccio osservare adesso che determinato il rapporto dei parametri fondamentali sopra un cristallo in cui l'angolo 111 . 110 sia uguale a 64°.32', e l'angolo 1$\bar{1}$0 . 110 di 88°.29, rispetto a questi parametri le altre forme simili che in un altro cristallo fanno con (110) angoli di 62°.45', 89°.32' (1), avrebbero, volendo ritrarneli, simboli per lo meno tanto elevati, quanto quelli che il sig. Palla (2) si diede premura di calcolarci.

Se ora supponiamo coesistere in uno stesso cristallo tutte le quattro forme anzidette, noi avremo che due delle quattro saranno facce vicinali rispetto alle altre due, prese

(1) Questi valori angolari sono desunti dal quadro n. IV.

(2) *Ueber die vicinalen Pyramidenflächen am Natrolith* Z. für Kryst. IX. 386.

per (111), (110). Pure, trovandosi isolate in due cristalli diversi, nessuno vorrebbe dire che non sono tutte rappresentanti della stessa piramide, e dello stesso prisma fondamentali.

Con questa osservazione, mentre spiego i limiti piuttosto larghi entro ai quali oscillano gli angoli misurati da me, esprimo l'opinione che se è cosa utile osservare l'esistenza di facce vicinali, non sia del pari buon consiglio voler rendere quasi illusoria la legge di razionalità degli indici, dando a dette forme dei simboli i quali riescono poi soverchiamente complicati, specialmente in un minerale così povero di forme come la Natrolite; e nella più parte dei casi mi sembra manchino di quella solida base di osservazioni, più volte, e con esito costante ripetute, la quale è necessaria per potere affermare un fatto simile con sicurezza, e mal s'accordino colla mancanza di assoluta teoretica esattezza che si riscontra nelle nostre misure.

I cristalli, limpidi, sono in media di circa un cm. di lunghezza, e variano dalla grossezza di 1 ½ mm. ad una sottigliezza estrema.

Calcolo delle costanti col metodo dei minimi quadrati.

I

$a_{,}:b_{,}:c_{,} = 0,98246:1:0,35196$.

Angoli	Misurati	Calcolati	$+d_{,}$	$-d_{,}$	$d_{,}^2$
110 . 1$\bar{1}$0	* 88°.59′	—	—	—	—
110 . 111	* 63.20	—	—	—	—
111 . 1$\bar{1}$1	36.34	36°.39′.50″	—	350	122 500
111 . $\bar{1}$11	37.48	37.20.20	1660	—	2 755 600
111 . $\bar{1}\bar{1}$1	53.42	53.20	1320	—	1 742 400
					$\Sigma d_{,}^2 = 4\,620\,500$

$\mu_{,}' = 14'.8''$.

II

$a_{,,}:b_{,}:c_{,} = 0,98206:1:0,35196$.

Angoli	Misurati	Calcolati	$+d_{,,}$	$-d_{,,}$	$d_{,,}^2$
110 . 1$\bar{1}$0	88°.59′	88°.57′.40″	80	—	6 400
110 . 111	63.20	63.19.40	20	—	400
111 . 1$\bar{1}$1	36.34	36.39.40	—	340	115 600
111 . $\bar{1}$11	37.48	37.21.30	1590	—	2 528 100
111 . $\bar{1}\bar{1}$1	53.42	53.20.30	1290	—	1 664 100
					$\Sigma d_{,,}^2 = 4\,314\,600$

$\mu_{,}'' = 13'.41''$.

III

$a_{,}:b_{,}:c_{,,} = 0,98246:1:0,35246$.

Angoli	Misurati	Calcolati	$+ d_{,,,}$	$- d_{,,,}$	$d_{,,,}^2$
	° ′	° ′ ″			
110 . 1$\bar{1}$0	88.59	88.59.00	—	—	—
110 . 111	63.20	63.18	120	—	14 400
111 . 1$\bar{1}$1	36.34	36.42.30	—	510	260 000
111 . $\bar{1}$11	37.48	37.23.10	1490	—	2 220 100
111 . $\bar{1}\bar{1}$1	53.42	53.23.50	1090	—	1 188 100
					$\Sigma d_{,,,}^2 = 3\,682\,700$

$\mu''' = 12'.33''$.

IV

$a:b:c = 0,98051:1:0,35359$.

Angoli	Misurati Medie	Limiti	n	P	Calcolati	$+ d$	$- d$	d^2
	° ′	° ′ ° ′			° ′ ″			
110 . 1$\bar{1}$0	88.59	88.29 — 89.32	14	25	88.52.20	400	—	160 000
110 . 111	63.20	62.45 — 64.32	14	30	63.12.10	470	—	220 900
111 . 1$\bar{1}$1	36.34	35. 4 — 37. 1	8	13	36.47.50	—	830	688 900
111 . $\bar{1}$11	37.48	37.18 — 38.56	7	14	37.33.20	880	—	774 400
111 . $\bar{1}\bar{1}$1	53.42	52.20 — 55.18	9	17	53.35.40	380	—	144 400
								$\Sigma d^2 = 1\,988\,600$

$\mu = 9'.54''$.

Quindi il rapporto più probabile dei parametri fondamentali è

$$a:b:c = 0,98051:1:0,35359.$$

Studio fisico.

Ha sfaldatura perfetta secondo (110).

È trasparente, per lo più incolora; ha lucentezza vitrea quando è in cristalli; quando è fibrosa, anche sericea.

Il piano degli assi ottici è parallelo a (010). La bisettrice acuta, positiva, è parallela a [110 . 1$\bar{1}$0].

Due lamine tagliate nello stesso cristallo, normalmente alle due bisettrici, mi diedero, nell' olio

$$2Ha = 62°.1' \quad (Na)$$
$$2Ho = 119°.49' \quad (Na);$$

dai quali si calcola

$$2V = 61°.32' \quad (Na).$$

Questa natrolite si trova a *Montecchio Maggiore* presso *Vicenza*, nella cavità di un basalte amigdaloide, che talora è nero e poco decomposto, spesso è profondamente alterato, di colore grigiastro e qualche volta rossastro; nelle amigdale, di varia grossezza, si trovano in numerosi ed eleganti gruppetti i cristalli di Natrolite, insieme con celestina (1), analcime limpido, calcite pure limpidissima, apofillite (2), gmelinite carnea, chabazite e celadonite. Spesso è fibrosa-compatta, di colore bianco, lucentezza vitrea; qualche volta a fibre sottilissime, con lucentezza sericea, di colore bianco di latte o roseo languido, nelle amigdale dello stesso basalte.

Cristallini incolori, ma coperti da bitume, con piccoli analcimi e calciti, coperti del pari da bitume, si trovano qualche volta nelle cavità di un tufo basaltico dal colore grigio oscuro.

S. Pietro di Lugo.

Studio cristallografico.

Forme osservate (110), (100), (010), (111).

Le facce della forma (110) sono di sufficente larghezza, ben liscie e assai splendenti. Quelle di (111) sono piane, piccole, e talora splendenti, ma spesso alquanto opache. Le facce di (100) sono presenti sempre, sempre larghe, ampie, lucenti, spesso hanno una sensibile deviazione dalla zona $[110 . 1\bar{1}0]$, qualche volta sono solcate poco profondamente parallelamente a $[110 . 111]$. Quelle di (010) sono pure quasi sempre presenti, liscie, lucenti, ma assai più strette di quelle della forma precedente.

Di facce vicinali nessuna traccia.

I cristalli sono limpidi, della grossezza variabile da poco meno di un mm. o $\frac{1}{4}$ di mm., lunghi da uno a due cm.

Calcolo delle costanti col metodo dei minimi quadrati.

I

$$a_{,} : b_{,} : c_{,} = 0{,}98127 : 1 : 0{,}34590 .$$

Angoli	Misurati	Calcolati	$+ d_{,}$	$- d_{,}$	$d_{,}^{2}$
$110 . 1\bar{1}0$	* 88°55′	—	—	—	—
$110 . 111$	* 63.43	—	—	—	—
$111 . 1\bar{1}1$	36.24	36° 8′10″	950	—	902 500
$111 . \bar{1}11$	37.20	36.51	1740	—	3 027 600
$111 . \bar{1}\bar{1}1$	52.49	52.34	900	—	810 000
					$\Sigma d_{,}^{2} = 4\,740\,100$

$$\mu' = 13'.40''.$$

(1) Panebianco, *Celestina del Vicentino.* — G. Bettanini, *Celestina di Montecchio Maggiore.*

(2) G. Negri, *Nota cristallografica sulla Apofillite.*

II

$a_{,,}:b_{,}:c_{,} = 0,98077:1:0,34590.$

Angoli	Misurati	Calcolati	$+d_{,,}$	$-d_{,,}$	$d_{,,}^2$
110 . 1$\bar{1}$0	88°.55′	88°.53′.10″	110	—	12 100
110 . 111	63.43	63.42.40	20	—	400
111 . 1$\bar{1}$1	36.24	36. 8	960	—	921 600
111 . $\bar{1}$11	37.20	36.52	1680	—	2 822 400
111 . $\bar{1}\bar{1}$1	52.49	52.34.40	860	—	739 600
					$\Sigma d_{,,}^2 = 4\,496\,100$

$\mu'' = 13'.19''.$

III

$a_{,}:b_{,}:c_{,,} = 0.98127:1:0,34640.$

Angoli	Misurati	Calcolati	$+d_{,,,}$	$-d_{,,,}$	$d_{,,,}^2$
110 . 1$\bar{1}$0	88°.55′	88°.55′.00″	—	—	—
110 . 111	63.43	63.41	120	—	144 000
111 . 1$\bar{1}$1	36.24	36.10.40	800	—	640 000
111 . $\bar{1}$11	37.20	36.53.40	1580	—	2 496 400
111 . $\bar{1}\bar{1}$1	52.49	52.38	660	—	435 600
					$\Sigma d_{,,,}^2 = 3\,716\,000$

$\mu''' = 12'.2''.$

IV

$a:b:c = 0,98094:1:0,34840.$

Angoli	Misurati Medie	Limiti	n	P	Calcolati	$+d$	$-d$	d^2
110 . 1$\bar{1}$0	88°.55′	88°.34′ — 89°.13′	11	23	88°.53′.50″	70	—	4 900
110 . 111	63.43	63.30 — 63.56	3	7	63.33	600	—	360 000
111 . 1$\bar{1}$1	36.24	35.36 — 36.40	2	4	36.21	180	—	32 400
111 . $\bar{1}$11	37.20	37. 2 — 38. 4	3	7	37. 5	900	—	810 000
111 . $\bar{1}\bar{1}$1	52.49	52.36 — 53. 5	4	8	52.54.10	—	310	96 100
								$\Sigma d^2 = 1\,303\,400$

$\mu = 7'.17''.$

Quindi il rapporto più probabile dei parametri fondamentali

$$a:b:c = 0,98094:1:0,34840.$$

Studio fisico.

Ha sfaldatura perfetta secondo (110).

È trasparente, incolora. Ha lucentezza vitrea; talora sericea, quando è compatta.

Il piano degli assi ottici è parallelo a (010). La bisettrice acuta, positiva, è parallela a [110 . 1$\bar{1}$0].

Due lamine tagliate nello stesso cristallo, normalmente alle due bisettrici, mi diedero, nell' olio

$$2Ha = 63°.3' \quad (Na)$$
$$2Ho = 119°.25' \quad (Na);$$

da questi si calcola

$$2V = 62°.24' \quad (Na).$$

Questa natrolite, la quale non è nominata da alcun mineralista, si trova in aggregati raggiati di lunghi cristallini, in grosse geodi nel basalte di *S. Pietro di Lugo presso Vicenza*. Si trova pure compatta in noduli fibroso-raggiati dalla lucentezza sericea, dal colore bianco ceruleo, in un tufo basaltico di colore verde-nerastro, in contatto col sopradetto basalte.

Sul medesimo tufo basaltico, della stessa località, si vedono delle incrostazioni biancastre, sottili, che sono formate pure da microscopici aghetti di natrolite con poca calcite concrezionata.

Salcedo.

Forme osservate. (110), (111), (100), (010).

Un solo cristallino trovai, perfettamente terminato, e abbastanza ben misurabile, ma per la piccolezza estrema delle facce della forma (111) non potei ottenere con sufficiente esattezza che queste quattro misure

Angoli	Misurati	Medie
110 . 1$\bar{1}$0	88°.51'	88°.52'
»	88.53	
110 . 111	63.48	63°.46'.30"
»	63.45	

Questi angoli corrispondono ad un rapporto di parametri

$$a:b:c = 0,98041:1:0,34486,$$

dal quale si calcolano gli altri tre angoli principali

111 . 1$\bar{1}$1	36°.3'
111 . $\bar{1}$11	36°.47'
111 . $\bar{1}\bar{1}$1	52°.27'.

Come si vede, questa natrolite sembra avvicinarsi abbastanza per gli angoli a quella di S. Pietro di Lugo. Ma sono ben lungi dal voler dare questi risultati come

esatti, e se in avvenire potrò avere una sufficiente quantità di cristalli di questa località, mi affretterò a pubblicare i risultati dello studio completo, in appendice a questo lavoro.

Questa natrolite si trova in assai grosse geodi nel basalte, alla *contrà Gnatta* presso *Salcedo* (*Marostica*), in cristallini raramente terminati, colle forme (110), (100), (010) abbastanza bene sviluppate, incolori, e di colore bianchiccio, giallo, o rossiccio.

Questa località pure è nuova per la mineralogia.

Altavilla.

Nel basalte di *Altavilla* presso *Vicenza*, si conosce già da un pezzo l' esistenza della natrolite; in grosse geodi si trovano abbondanti noduli emisferici a struttura radiata, formati da numerosissimi ed esilissimi aghetti (110) (111), liberi alla periferia, e uniti al centro in massa compatta. Se ne trova di incolora, di bianca, di gialliccia, di rossa e di grigia.

Per quanti tentativi facessi per misurare almeno l' angolo 110 . 1$\bar{1}$0, tutti andarono a vuoto per la soverchia sottigliezza dei cristallini.

Brendola.

A Brendola, non molto lungi dalla precedente località, si trova un basalte assai profondamente decomposto, nel quale si osservano numerosissimi noduletti sferici, del diametro medio di circa 6-7 mm. di colore grigiastro, talora a zone concentriche di tinta diversa, formati da natrolite raggiata compatta. Questi noduli sono tanto fitti ed abbondanti, da potersi credere che la natrolite formi almeno una quarta parte del volume del basalte stesso. Nessun autore a me noto scrisse di questa natrolite.

Recoaro.

Alla *Fongara*, presso *Recoaro*, nelle fessure di un basalte spesso alquanto decomposto, si trovano numerosi noduli emisferici di natrolite bianca a struttura radiata, terminati alla periferia da esilissimi cristallini, nei quali non si può ben riconoscere alcuna forma. Questa pure è una località nuova per la natrolite.

Tretto.

Nella roccia verde decomposta del *Tretto*, analoga a quella della *Val di Fassa* e dei *Zuccanti*, insieme con calcite, analcimi rossi, ecc., si trovano raramente cristalli di natrolite allungati, contorti, opachi, di colore carnicino, piantati per lo più nella calcite, e che presentano la sola forma (110) con le sue facce striate e solcate assai profondamente. Anche questa è una località nuova per la natrolite.

Bassano.

A *Lavacile*, presso *Bassano*, in un basalte assai ricco di Olivina, si trovano pure noduli raggiati di natrolite compatta, bianca o azzurrina, talora a zone concentriche, insieme con steatite proveniente dalla decomposizione della Olivina sopra menzionata.

Natrolite fibrosa compatta bianca nelle amigdale del basalte si trova anche in *Valle del Momin*, e a *S. Michele.* pure presso *Bassano*. Anche queste tre località sono nuove per la natrolite.

Breganze.

A *Breganze* presso *Vicenza*, si trovarono solo una volta nel basalte alcuni minutissimi cristallini (110) (111) incolori, ma troppo pochi finora per meritare uno studio cristallografico.

Anche quest' ultima località è nuova.

RIASSUNTO

Dopo aver descritte partitamente le singole natroliti della Regione Veneta da me conosciute, non credo sia superfluo, per facilitare ad altri il confronto tra le nostrali e quelle d' altri paesi, dare un breve riassunto di quanto altri hanno trovato sulle natroliti forestiere e metterle a riscontro coi risultati delle mie ricerche.

Elenco delle forme.

Autore	Simboli di Miller (1)	Simboli di Naumann	Simboli di Lévy	Simboli di Weiss
Haüy (2)	110	∞P	m	$a:b:\infty c$
"	100	$\infty \bar{P} \infty$	h′	$a:\infty b:\infty c$
"	010	$\infty \breve{P} \infty$	g′	$\infty a:b:\infty c$
"	111	P	$b^{\frac{1}{2}}$	$a:b:c$
Phillips	11 . 10 . 11	$\bar{P}\frac{11}{10}$	$b' \, b^{\frac{1}{21}} \, h^{\frac{1}{11}}$	$a:\frac{11}{10}b:c$
G. Rose	131	$3\breve{P}3$	$b^{\frac{1}{2}} \, b^{\frac{1}{4}} \, g'$	$3a:b:3c$
Lévy	21 . 19 . 21	$\bar{P}\frac{21}{19}$	$b^{\frac{1}{2}} \, b^{\frac{1}{40}} \, h^{\frac{1}{21}}$	$a:\frac{21}{19}b:c$
Dufrenoy	221	2P	$b^{\frac{1}{4}}$	$a:b:2c$
Kenngott	011	$\breve{P}\infty$	e′	$\infty a:b:c$
Von Lang	120	$\infty\breve{P}2$	g^3	$2a:b:\infty c$
"	331	3P	$b^{\frac{1}{6}}$	$a:b:3c$
"	391	$9\breve{P}3$	$b^{\frac{1}{6}} \, b^{\frac{1}{12}} \, g'$	$3a:b:9c$
"	031	$3\breve{P}\infty$	$e^{\frac{1}{3}}$	$\infty a:b:3c$
"	301	$3\bar{P}\infty$	$a^{\frac{1}{3}}$	$a:\infty b:3c$
Seligmann	601	$6\bar{P}\infty$	$a^{\frac{1}{6}}$	$a:\infty b:6c$
"	311 (?)	$3\bar{P}3$	$b^{\frac{1}{2}} \, b^{\frac{1}{4}} \, h'$	$a:3b:3c$

(1) Invertiti i due primi assi.

(2) Il Seligmann (Mineral. Notiz. Z. für. Kryst. I, 338) attribuisce le forme (110), (111), (100) al Dufrenoy, e la (010) al Kenngott, mentre erano già state descritte da Haüy (Traitè de Mineralogie 1801, III, 154).

Elenco delle forme.

Autore	Simboli di Miller (¹)	Simboli di Naumann	Simboli di Lévy	Simboli di Weiss
Brögger	610	$\infty\bar{P}6$	$h^{\frac{7}{5}}$	$a:6b:\infty c$
"	21 . 20 . 21	$\bar{P}\frac{21}{20}$	$b' b^{\frac{1}{41}} h^{\frac{1}{21}}$	$a:\frac{21}{20}b:c$
Palla	31 . 30 . 0	$\infty\bar{P}\frac{31}{30}$	h^{61}	$a:\frac{31}{30}b:\infty c$
"	12 . 12 . 5	$\frac{12}{5}P$	$b^{\frac{5}{24}}$	$a:b:\frac{12}{5}c$
"	31 . 31 . 30	$\frac{31}{30}P$	$b^{\frac{15}{31}}$	$a:b:\frac{31}{30}c$
"	44 . 40 . 43	$\frac{44}{43}\bar{P}\frac{11}{10}$	$b^{\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{84}} h^{\frac{1}{43}}$	$a:\frac{11}{10}b:\frac{44}{43}c$
"	54 . 50 . 54	$\bar{P}\frac{27}{25}$	$b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{47}} h^{\frac{1}{27}}$	$a:\frac{27}{25}b:c$
Artini	210	$\infty\bar{P}2$	h^3	$a:2b:\infty c$
"	310	$\infty\bar{P}3$	h^2	$a:3b:\infty c$

Ed ecco gli angoli principali secondo i varî autori più recenti:

Angoli	v. Lang. (²)	Seligmann (³)	Brögger (⁴)	Palla (⁵)	Artini		
					M. Baldo	Montecchio	S. P. Lugo
110 . 1$\bar{1}$0	89°00′	88°.47′	88°.45′.30″	88°.58	88°.49′.10″	88°.52′.20″	88°.53′.50″
110 . 111	63.20	63°.16′.15″	63.10.31	63.17	63.26	63.12.10	63.33
111 . 1$\bar{1}$1	36.40	36°.40′	36.47.30	36°.43′.20″	36.28.40	36.47.50	36.21
111 . $\bar{1}$11	37.20	37.29	37.37.45	37°.35′	37.15.50	37.33.20	37.5
111 . $\bar{1}\bar{1}$1	53.20	53°.27′.30″	53 39	53.26	53.8	53.35.40	52.54.10

Il rapporto dei parametri fondamentali sarebbe quindi secondo:

	v. Lang.	0,9827 :1:0,3521	(⁶)
	Seligmann.	0,97897:1:0,35215	
	Brögger	0,97856:1:0,353628	(⁷)
	Palla	0,98213:1:0,35267	
Artini	(M. Baldo)	0,97962:1:0,34991	
	(Montecchio M.) . .	0,98051:1:0,35359	
	(S. P. di Lugo) . .	0,98094:1:0,34840.	

(¹) Invertiti i due primi assi.
(²) *Philosophical Magazine.* Ian. 1863.
(³) *Mineralogische Notizen.* Z. für Kryst. I. 338.
(⁴) *Untersuchungen norwegischer Mineralien.* Z. für. Kryst. III, 478, 487.
(⁵) *Ueber die vicinalen Pyramidenflächen am Natrolith.* Z. für Kryst. IX, 386.
(⁶) Accettato dal Descloizeaux: Manual de Mineralogie, 1862. I.
(⁷) Accettato dal Groth in Tabellarische Uebersicht der Mineralien. 1882.

Quanto ai caratteri ottici, generalmente è trimetrica. Però il Lüdecke (1) ne fa una varietà monoclina, avendo osservato in alcuni cristalli di Aussig e Salesl una deviazione di 5°-6° della direzione di estinzione dalla direzione dello spigolo [$110.1\bar{1}0$]. Tale varietà è accettata dal Groth (2) e A. von Lasaulx (3) tendeva a credere in un lento passaggio, per via di miscele isomorfe, dalla natrolite trimetrica alle scoleciti, per mezzo delle mesoliti con calce e soda variabili, e differenti valori per la inclinazione di estinzione sull' asse verticale.

Ma non ci fermeremo su questi particolari, non avendo notato mai, nei numerosissimi cristalli osservati, la più lieve deviazione della direzione di estinzione.

L' angolo degli assi ottici è secondo

	Descloizeaux (4) . . .	2V (5) =	59°.29′	(raggi rossi)
	Brögger.	2V (6) =	61°.3′	(Li)
			62°.9′.40″	(Na)
			62°.19′	(Tl)
	Brögger.	2V (7) =	61°.56′	(Li)
			62°.15′	(Na)
			62°.34′	(Tl)
Artini	M. Baldo.	2V (7) =	61°.52′	(Na)
	Montecchio M.	2V (7) =	61°.32′	(Na)
	S. Pietro di Lugo . .	2V (7) =	62°.24′	(Na)

(1) *Mesolith und Skolezit.* Iahrbuch für Min. Geol. und Pal. 1881. II. 1.

(2) *Tabellarische Uebersicht* ecc. loc. cit.

(3) *Ueber einige ätnäische Mineralien.* Z. für Kryst. V. 334.

(4) Loc. cit. 382.

(5) Calcolato dai valori di α, β, γ.

(6) Pure da α, β, γ, ma, per confessione dell' autore, non sullo stesso cristallo.

(7) Calcolato da 2Ha, 2Ho.

RELAZIONE

letta dal Socio STRUEVER, relatore, a nome anche del Socio CANNIZZARO, nella seduta del 1 maggio 1887, sulla Memoria del dott. ETTORE ARTINI, intitolata: *Contribuzioni alla mineralogia del Vicentino.*

« Il dott. Ettore Artini continuando i suoi studî sui minerali del Vicentino, la prima parte dei quali, riguardante la natrolite, fu già inserita nei volumi dell'Accademia, si accinge ora a descrivere due altre specie interessanti, lo zircone cioè, trovato entro terreno di trasporto presso Novale in circondario di Valdagno, e la baritina proveniente da varî luoghi della provincia di Vicenza.

« Dello zircone l'autore descrive le combinazioni osservate sopra numerosi cristalli posseduti dal Museo della Università di Padova, e comunica numerose misure fatte sopra l'unico cristallo trovato adatto alle osservazioni goniometriche. Dai risultati ottenuti sovra ben 41 angoli diedri deduce le costanti del cristallo servendosi del metodo dei minimi quadrati.

« Riguardo alla baritina, dopo aver enumerato i principali luoghi del Vicentino ove il minerale si osserva, l'Artini passa a descrivere più particolarmente i cristalli di Monte Trisa in Valle dei Zuccanti e quelli del Monte Castagna presso S. Quirico.

« Sulla baritina di Monte Trisa si constatarono 10 forme semplici fra cui 3 nuove per il minerale.

« L'autore dà una dettagliata descrizione dell' aspetto fisico di tutte queste forme, l' elenco delle combinazioni principali in cui furono osservate, le costanti cristallografiche dedotte col metodo dei minimi quadrati da numerose misure istituite sovra 18 cristalli, e finalmente un breve cenno relativo alle condizioni paragenetiche del minerale.

« Le forme semplici trovate nella baritina del nuovo giacimento di Monte Castagna ammontano a 10 fra cui 2 non prima osservate. Anche per questa varietà l' autore dà la descrizione dell' aspetto fisico delle facce, le principali combinazioni, il risultato delle misure goniometriche, le costanti dedotte da due angoli scelti fra i più attendibili, e le condizioni di paragenesi.

« Il lavoro dell' Artini è bene condotto; contiene risultati nuovi ed è accompagnato da una tavola in cui sono raffigurate alcune delle principali e più interessanti combinazioni della baritina e dello zircone.

« La vostra Commissione propone l' inserzione, negli Atti dell' Accademia, della Memoria del dott. Artini ».

Contribuzioni alla Mineralogia del Vicentino.

Memoria di ETTORE ARTINI.

(Con una tavola).

Zircone di Novale.

Nei dintorni di *Novale* (circondario di Valdagno), presso la *contrada Rosati*, sopra un sentiero montuoso alquanto erto, in mezzo ai detriti portati giù dalle acque piovane, si nota una grande quantità di grossi e minuti grani di menaccanite; oltre a questa si vedono: noduli di limonite; sassolini di piromaca; cristalli di augite, rotti, ma abbastanza distinti, grossi poco più di mezzo centimetro, della combinazione (100) (010) (110); ciottolini di tufo; e finalmente numerosi cristalli di zircone.

Non ho potuto, quella unica volta che fui sul posto, ricercare con agio la provenienza di questi minerali, ma parmi verosimile si debba trovare più in alto un porfido o, con probabilità assai maggiore, un tufo vulcanico, dalla cui disgregazione derivino i zirconi come la menaccanite e l'augite. I ciottolini di tufo che dissi andare uniti al zircone si riferiscono ad un tufo basaltico che si trova in posto nel luogo, e forma il suolo del sentiero; è un bellissimo tufo, molto tenero, assai ricco di olivina decomposta, con venuzze di calcite elegantemente tinta in varî colori da ossidi e sali di ferro, ma, almeno nei numerosi esemplari che ne portai con me, affatto privo di menaccanite e di zircone, e senza cristalli visibili di pirosseno. Non credo adunque sia dalla decomposizione di questa roccia che derivino tali minerali, ma bensì di qualche altra, ignota finora anche ai geologi da me interpellati in proposito. La quale se si troverà in seguito, come spero, non mancherò di rendere la notizia di pubblica ragione.

Della menaccanite non mette affatto il conto di occuparsi, essendo in granuli arrotondati e corrosi da ogni parte. Lo zircone invece si presenta spesso in cristalli. Se ne trovano di incolori, di giallicci, e, più frequenti, di quel bel rosso giacinto caratteristico per questo minerale. La grossezza loro varia da più che mezzo centimetro a qualche frazione di millimetro. I cristalli, abbastanza numerosi come già dissi, hanno quasi tutti gli spigoli corrosi per il rotolamento, e quindi si prestano assai male ad esatte misurazioni dei valori angolari, ma le forme però ne sono bene riconoscibili. Due soli cristalli trovai affatto esenti dalla generale corrosione, entrambi della lunghezza di circa 3 mm. e della grossezza di 2 mm. circa. Uno di questi, della combinazione più avanti indicata al n. IV, avendo le facce di (111) e (110) assai fortemente solcate, non potei portare su di lui misure soddisfacenti; ma ebbi nell'altro un largo compenso.

È veramente mirabile questo cristallino per la perfezione e l'incomparabile splendore delle sue facce: ha una estremità completa, ed è affatto mancante l'altra; la forma e lo sviluppo relativo delle sue facce si possono vedere nell' annesso disegno. Potei misurare su questo cristallo non meno di 41 spigoli, per la maggior parte con grande esattezza e dai valori angolari ottenuti calcolai la costante. I risultati ottenuti, e il piccolissimo errore medio tra l'osservazione e il calcolo, danno alla costante così ottenuta una grande probabilità, perocchè sieno più attendibili i risultati del calcolo basato, quando si possa, sulle misure di uno solo o pochi cristalli, ma ottimi, che su quelle di molti e scadenti.

Le forme che osservai nei cristalli numerosi posseduti dal Museo della R. Università di Padova sono le seguenti:

(100), (110), (101), (111), (311), (331),

e le trovai riunite nelle seguenti combinazioni:

I.ª — (100) (111).
II.ª — (100) (110) (111).
III.ª — (110) (111) (311).
IV.ª — (100) (110) (111) (311).
V.ª — (100) (110) (111) (101) (311) . . . . Fig. 11.
VI.ª — (100) (110) (111) (331).

Di queste, la IIª è frequentissima; meno frequente la IIIª; la Iª ancora meno; la IVª, la Vª, la VIª furono trovate una sola volta.

La costante fu calcolata col metodo dei minimi quadrati, che migliorò i risultati, già soddisfacenti. Ebbi

per il I calcolo: $a':c'=1:0{,}64079$; $\mu'=2'.28''$; $\Sigma d_{,}^{2}=247102$
per il II calcolo: $a':c''=1:0{,}64029$; $\mu''=2'.30''$; $\Sigma d_{,,}^{2}=271582$

e per la costante in fine ottenuta

$$a:c=0{,}64064 \quad ; \quad \mu=2'.25'' \quad ; \quad \Sigma d^2=229982.$$

Le differenze tra l'osservazione e il calcolo si potranno vedere più estesamente nel seguente quadro:

Spigoli misurati	Angoli trovati	Peso di ogni singolo angolo	Medie	Numero delle misure portate su ogni spigolo	Peso complessivo di ogni angolo	Angoli calcol. (1) da a:c = 1:0.64064	Differenza positiva in secondi	Differenza negativa in secondi	Quadrato delle differenze
100 . 110 (²)	45° 5′	3							
»	44.55	3							
»	45. 3	3							
»	44.49	2							
»	45.15	1	45° 0′10″	5	12	45°.00′. 00″			
100 . 311	31.51	2							
»	31.53	2							
»	31.44	2							
»	31.40	1							
»	31.45	2	31.46.40	5	9	31.42.50	—	230	52900
311 . 31̄1	32.59	3							
»	32.57	1							
»	32.59	2	32.58.40	3	6	32.56.50	110	—	12100
311 . 131	47.15	2							
»	47.14	1							
»	47.27	2	47.19.36	3	5	47.17	156	—	24336
100 . 101	57.32	1							
»	57.23	2	57.26	2	3	57.21.30	280	—	78400
101 . 1̄01	65.15	2							
»	65.18	3	65.16.48	2	5	65.17.30	—	42	1764
101 . 011	44.51	2	44.51	1	2	44.50.40	—	20	400
110 . 111	47.47	2							
»	47.44	2	47.45.30	2	4	47.49 20	—	230	52900
111 . 1̄1̄1	84.20	3							
»	84.24	3	84.22	2	6	84 21.10	50	—	2500
311 . 111	29.53	3							
»	29.56	3							
»	29.57	3							
»	29.56	3							
»	29.52	2							

(¹) Coll'approssimazione di 10″. (²) Escluso dal calcolo dei minimi quadrati.

Spigoli misurati	Angoli trovati	Peso di ogni singolo angolo	Medie	Numero delle misure portate su ogni spigolo	Peso complessivo di ogni angolo	Angoli calcol. (1) da a:c = 1:0.64064	Differenza posit.va in secondi	Differenza negativa in secondi	Quadrato delle differenze
311.111	29°56′30″ (2)	2							
»	29.57	2							
»	29.56	3	29°55′29″	8	21	29°56′30″	—	61	3721
111.101	28.22	3							
»	28.21	3							
»	28.23	2							
»	28.15	2							
»	28.21	3							
»	28.30	2							
»	28.19	3							
»	28.20	3	28.21.11	8	21	28.20.40	31	—	961
									$\Sigma d^2 = 229982$

(1) Coll'approssimazione di 10″.
(2) Due immagini ugualmente luminose: fu presa la media dei due valori.

Baritina del Vicentino.

In parecchi luoghi della provincia di Vicenza si rinviene la baritina, e in taluno anche tanto copiosa da poter essere estratta a scopo industriale; ma specialmente è disseminata nei monti del Recoarese. Per lo più è spatica o compatta, biancastra o tinta in varie gradazioni di giallo e di rosso da limonite o ematite.

Senza aver la pretesa di dare un elenco completissimo di tutte le località Vicentine, citerò la maggior parte di quelle a me note.

Si trova: Spatica tra Recoaro e Staro, al *Castello degli Stocchi*; presso Recoaro nel *Monte Ciù*; fra Staro e Roveglianà sulle *cime dei Gon.*

Si trova poi presso S. Quirico: spatica o cristallizzata al *Monte Castagna*; confusamente cristallizzata alla *Salita del Mazzetto*; spatica con antimonite al *Mulino dei Righelatti*; con pirolusite e bustamite presso la cima del *Monte Civillina*; pure spatica al *Monte Giaretta.*

Bella, compatta, rosea, si trova la baritina in *Val dell' Orco*; pure compatta, bianca, al *Gambaro.*

Finalmente, spatica, compatta e anche cristallizzata, bellissima, al *Monte Trisa* in Valle dei Zuccanti.

Fra tutte, due mi parvero meritevoli di uno studio cristallografico: quella di Trisa, e quella del Monte Castagna.

Baritina di Trisa.

Forme osservate:

Simboli di Miller (1)	Simboli di Naumann	Simboli di Lévy	Simboli di Weiss
001	oP	p	$\infty a : \infty b : c$
210	$\infty \bar{P} \frac{1}{2}$	h^3	$a : \frac{1}{2} b : \infty c$
011	$\breve{P} \infty$	e^1	$\infty a : b : c$
079 *	$\frac{7}{9} \breve{P} \infty$	$e^{\frac{9}{7}}$	$\infty a : b : \frac{7}{9} c$
023 *	$\frac{2}{3} \breve{P} \infty$	$e^{\frac{3}{2}}$	$\infty a : b : \frac{2}{3} c$
102	$\frac{1}{2} \bar{P} \infty$	a^2	$a : \infty b : \frac{1}{2} c$
405 *	$\frac{4}{5} \bar{P} \infty$	$a^{\frac{5}{4}}$	$a : \infty b : \frac{4}{5} c$
111	P	$b^{\frac{1}{2}}$	$a : b : c$
113	$\frac{1}{3} P$	$b^{\frac{3}{2}}$	$a : b : \frac{1}{3} c$
122	$\breve{P}_2$	$b^1 \, b^{\frac{1}{3}} \, g^{\frac{1}{2}}$	$2a : b : c$

(1) Invertiti i due primi assi.

Le forme contrassegnate con * sono nuove per la baritina.

Le facce della forma (001), presenti in tutti i cristalli, sono generalmente grandi, piane, talora abbastanza lucenti, talora al tutto opache: quasi mai tanto belle da poter dare una immagine unica e netta. — Quelle di (210) furono trovate in un solo cristallo, triangolari, piuttosto piccole, un poco striate, ma abbastanza ben misurabili.— Pure una sola volta in questo stesso cristallo fu trovata una faccia della (100), fortemente e profondamente solcata parallelamente all'asse z. — Le facce della (011) si trovano in tutti i cristalli, sono splendenti sempre, poco liscie nei cristalli più grandi, perfettamente piane e di grande lucentezza nei più minuti; e perciò fu tenuto conto, nei calcoli, solamente delle misure portate su questi. — Le facce della forma (079) sono poco frequenti, talora distinte, splendenti, misurabili molto esattamente, benchè abbastanza ristrette. — Quelle della (023), frequentissime, per lo più sono cattive, lineari, poco splendenti, e formanti, specialmente nei grossi cristalli, come una sola faccia arrotondata con quelle della forma precedente. Qualche volta però le rinvenni abbastanza distinte e misurabili. — Le facce della forma (102) sono pure esse presenti sempre, generalmente grandi, splendenti, pianissime, misurabili con molta esattezza in tutti i cristalli. — Facce della forma (405) sono frequentissime, ma però sempre assai ristrette e tanto poco lucenti da non dare che raramente una immagine visibile, e questa pure assai diffusa: pur tuttavia, non potendo far a meno di prendere in considerazione tale forma, procurai supplire col grande numero delle letture

alla pochissima esattezza della misura. Del resto i valori degli angoli trovati oscillando entro limiti *relativamente* non troppo larghi, (12°.20′—14°.35′; calc. 13°.20′.20″) non ho avuto scrupolo di calcolarne il simbolo, sebbene nuovo per la baritina. — Le facce della (111) sono molto frequenti, ma per lo più curve, poco distinte e separate da quelle della (011) per uno spigolo affatto arrotondato, e come corroso. Però in qualche cristallo sono ben distinte e assai splendenti. — Quelle della (113) sono generalmente curve, strette, non misurabili, ma frequenti: il simbolo fu calcolato dalle zone [011.102], [001.111]. Una sola volta fu trovata discretamente misurabile.— Le facce della (122), finalmente, sono presenti poche volte, ma sempre abbastanza piane e lucenti.

Combinazioni principali osservate:

I.ª	— (001) (011) (102);	Fig. 1.
II.ª	— (001) (011) (079) (023) (102) (405) (113); . . .	„ 2.
III.ª	— (001) (011) (023) (102) (111);	„ 3.
IV.ª	— (001) (011) (023) (079) (102) (111);	
V.ª	— (001) (011) (102) (111) (122);	„ 4.
VI.ª	— (100) (001) (210) (011) (102);	„ 5.

Sono più frequenti la IIª e la IIIª; quest' ultima specialmente nei cristalli più grossi. La VIª fu osservata una sola volta.

I cristalli sono generalmente tabulari, per il grande sviluppo della (001); talora allungati secondo l' asse x; la grandezza è assai variabile. La più parte sono coperti da un velo di limonite, così che per studiarli dovetti lavarli con acido cloridrico diluito, tiepido. Tengo però alcune geodine in cui i cristallini, assai minuti, sono incolori e splendentissimi: da queste trassi il maggior numero dei 18 cristalli misurati, quasi tutti del resto molto incompleti.

Per calcolare le costanti mi sono servito degli angoli che presentavano sufficente attendibilità e precisione nella misura, eliminando quelli che mi parvero malsicuri, e non furono misurati che una sola volta.

Applicai il metodo dei minimi quadrati, col quale potei migliorare notevolmente i risultati; ebbi infatti:

per il I calcolo $: a' : b' : c' = 0.82319 : 1 : 1.31031 ; \mu' = 23'.29'' ; \Sigma d_{,}^2 = 7.661.900$

„ „ II „ $: a'' : b' : c' = 0.82269 : 1 : 1.31031 ; \mu'' = 22'.27'' ; \Sigma d_{,,}^2 = 7.007.100$

„ „ III „ $: a' : b' : c'' = 0.82319 : 1 : 1.31081 ; \mu''' = 22'.48'' ; \Sigma d_{,,,}^2 = 7.204.200$

e finalmente colle costanti calcolate dai dati sovra esposti:

$$a : b : c = 0.81432 : 1 : 1.31148 \; ; \; \mu = 8'.58'' \; ; \; \Sigma d^2 = 2{,}608.800.$$

Le differenze tra l' osservazione e il calcolo si rilevano dal quadro seguente:

Spigoli misurati	Angoli trovati	Limiti estremi delle esperienze	Numero degli spigoli misurati	Peso complessivo	Angoli calcolati (1) da a:b:c = 0,81432:1:1,31148	Differenza positiva in secondi	Differenza negativa in secondi	Quadrato delle differenze
011 . 01$\bar{1}$	74°.42′	74°.32′ — 74°.54′	10	24	74°.39′	180	—	32.400
102 . 10$\bar{2}$	102.13	102.00—102.20	8	22	102.18.50″	—	350	122.500
011 . 111	44.00	43.47 — 44.15	3	9	44.19.10	—	1150	1.322.500
011 . 122	25.45	25.27 — 25.57	3	8	26. 1.30	—	990	980.100
011 . 079	7.11	6.53 — 7.21	4	6	7. 6.20	280	—	78.400
111 . 001	64.13	64.13 — 64.14	2	5	64.17.30	—	270	72.900
122 . 001	56.59	56.58 — 57.00	2	5	56.59	0	0	0
011 . 023	11.41	11.30 — 12.20	7	8	11°.30′.40″	—	—	—
102 . 405	13.15	12.20 — 14.35	5	Appross.	13.20.20	—	—	—
113 . 001	35.00	———	1	2	34.41.40	—	—	—
210 . 2$\bar{1}$0	44.15	———	1	2	44.18.30	—	—	—
							Σd^2 =	2.608.800

(1) Coll'approssimazione di 10″.

Le costanti più probabili sono perciò:

$$a:b:c = 0.81432:1:1.1.31148.$$

I cristalli di questa bella baritina, per lo più biancastri o trasparenti e incolori, variano dalla lunghezza di due cent. alla lunghezza di un mm. o poco meno. Si trovano in bei gruppi nelle gallerie della miniera di Trisa, con galena spatica, sfalerite pure spatica, calamina compatta giallastra, smithsonite bianca o azzurra, cerussite in minuti e semplici cristallini, anglesite pure in cristallini piccolissimi, limonite, pirite, calcopirite, dolomite e quarzo.

Baritina del Monte Castagna.

Questa località non è citata da nessun autore, e gli esemplari studiati, abbastanza numerosi, furono raccolti da me, in una recente gita ai monti del Recoarese.

Forme osservate:

Simboli di Miller (1)	Simboli di Naumann	Simboli di Lévy	Simboli di Weiss
100	$\infty \bar{P} \infty$	h^1	$a : \infty b : \infty c$
001	oP	p	$\infty a : \infty b : c$
110	∞P	m	$a : b : \infty c$
740 *	$\infty \bar{P} \frac{4}{7}$	$h^{\frac{11}{3}}$	$a : \frac{4}{7} b : \infty c$
011	$P \infty$	e^1	$\infty a : b : c$
102	$\frac{1}{2} \bar{P} \infty$	a^2	$a : \infty b : \frac{1}{2} c$
104	$\frac{1}{4} \bar{P} \infty$	a^4	$a : \infty b : \frac{1}{4} c$
111	P	$b^{\frac{1}{2}}$	$a : b : c$
6 6 13 *	$\frac{6}{13} P$	$b^{\frac{13}{12}}$	$a : b : \frac{6}{13} c$
154	$\frac{5}{4} \breve{P} 5$	$b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}} g^{\frac{1}{2}}$	$5a : b : \frac{5}{4} c$

(1) Invertiti i due primi assi.

Le forme contrassegnate con * sono nuove per la baritina.

Le facce della forma (100) sono piuttosto rare e piccole: abbastanza piane ma poco o punto lucenti. — Quelle della (001) sono costantemente presenti, assai grandi, ma, salvo poche eccezioni, curve assai fortemente, spezzate e guaste in vario modo: talora si passa con una superficie curva dalla (001) ai prismi circostanti, in modo che il cristallo presenta un curioso aspetto lenticolare. — Quelle della forma (110) sono abbastanza comuni, di varia grandezza, non troppo lucenti, ma abbastanza piane e ben misurabili. — Facce della nuova forma (740) non trovai che in un solo cristallo, abbastanza grandi, triangolari, pianissime, e tali da permettere una buona misura.— Quelle della (011) sono costantemente presenti, sufficentemente lucenti e piane. — Così pure quelle della (102). — In un solo cristallo trovai due facce della forma (104), non molto belle, ma grandi, distinte, e discretamente misurabili.— Le facce della (111) sono rare, strettissime, non misurabili in alcun modo, il simbolo fu calcolato dalle due zone [001.110], [100.011]. — Due facce di (6 6 13) furono trovate in un solo cristallo, insieme alla forma (740), belle, liscie, ben misurabili. — Finalmente le facce della forma (154) in zona tra (110) e (011) sono abbastanza comuni, strettissime, arrotondate, appena misurabili per la gran diffusione della immagine: ma credo sufficienti le tre misure ottenute per poter dare questo simbolo.

Combinazioni principali osservate:

I.ª — (001) (110) (011) (102) . . . . Fig. 6.
II.ª — (001) (110) (011) (102) (111) . . . .
III.ª — (001) (110) (011) (102) (111) (154) . . . . .
IV.ª — (100) (001) (110) (011) (102) (111) (154) . . . » 9.
V.ª — (001) (011) (102) (104) . . . . » 7.
VI.ª — (001) (110) (740) (011) (102) (6 6 13) . . . . » 8.

Le più frequenti sono le combinazioni I.ª e IV.ª Una sola volta furono trovate la V.ª e la VI.ª

I cristalli variano dalla larghezza di un cm. a quella di pochi centesimi di millimetro: talora sono grossi, talora schiacciati secondo la (001). Hanno vivissima lucentezza tra la vitrea e la resinosa, ma assai più prossima a quest' ultima.

Per calcolare le costanti non credei opportuno usare del metodo dei minimi quadrati avendo solo tre angoli sufficentemente attendibili. Scelsi di questi tre i due aventi peso relativo maggiore e limiti più ristretti, e da questi calcolai:

$$a:b:c = 0.81582:1:1.31268\,.$$

Le differenze tra l' osservazione e il calcolo si hanno dalla seguente tabella:

Spigoli misurati	Angoli trovati	Limiti estremi delle esperienze	Numero degli spigoli misurati	Peso complessivo	Angoli calcolati (1) dalle costanti a:b:c = 1.81582:1:1.31268	Differenza positiva in primi	Differenza negativa in primi
011 . 01$\bar{1}$	74°.36′	74°.26′ — 74°.53′	9	16	⋆	—	—
110 . 1$\bar{1}$0	78.25	78.19 — 78.35	5	10	⋆	—	—
102 . 10$\bar{2}$	102. 1	101.32—102.29	9	16	102°22′	—	21
011 . 110	59.38	59.25 — 59.50	3	4	59.49	—	11
102 . 110	60.21	———	1	2	60.56	—	35
102 . 6 6 13	25.51	———	1	2	26. 2	—	11
110 . 6 6 13	46.20	———	1	2	46.13	7	—
102 . 104	17.12	———	1	1	16.54	18	—
110 . 740	14.13	———	1	2	14.13	—	—
110 . 154	43.½	42.¼ — 44.¼	3	Appross.	42.12	78	—

(1) Coll'approssimazione di 1′.

I cristalli di questa baritina si trovano in gruppi numerosi, o, più frequentemente, sciolti, entro una terra nerastra, manganesifera contenuta in grandi cavità di un grosso filone di baritina compatta al Monte Castagna, precisamente alla *Contrà Sandri.*

È curiosa la proprietà che hanno i cristalli di scoppiare vivamente tra le dita quando si prendono in mano, per effetto del calore della mano stessa: si sfaldano in tal guisa in modo perfettissimo, stupendo, per lo più secondo (001) e anche, meno facilmente, secondo (110), riducendosi in sottili laminette rombe brillantissime. Abbastanza notevole è anche il numero di combinazioni, e i diversi aspetti che presentano i cristalli, come in parte si può vedere dalle figure.

La terra che li contiene è composta:

I. Di perossido di manganese, terroso, senza apparente struttura cristallina; quindi questa terra scaldata con acido cloridrico svolge abbondanti fumi di cloro.

II. Di solidi di sfaldatura di baritina, di varia grandezza, e talora di bellissimi cristallini dello stesso minerale, piccolissimi, anzi microscopici, completi da ogni parte, tabulari, della combinazione (001) (110) (011) (1,02). Ne vidi spesso gruppi di due a tre in posizione parallela, saldati secondo (110), che in questo caso è assai sviluppato (Fig. 10).

III. Di abbondantissimi cristallini microscopici di quarzo ialino, della solita combinazione (100) $(20\bar{1})$ $(2\bar{1}\bar{1})$, terminati ad ambe le estremità, spesso corrosi e arrotondati.

Ne vidi qualcheduno geminato secondo $(25\bar{1})$.

Fig. 1

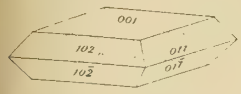


Fig. 3

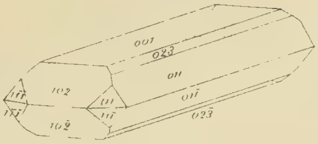


Fig. 5

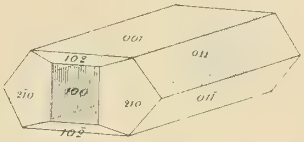


Fig. 2

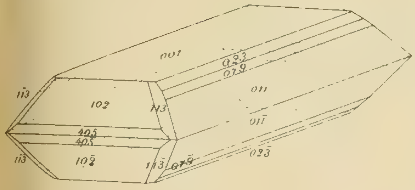


Fig. 11

Fig. 6

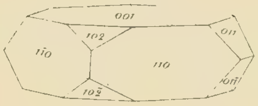


Fig. 9

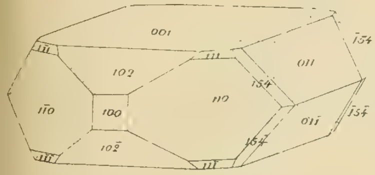


Fig. 4

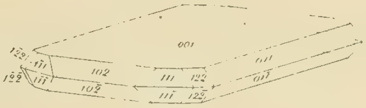
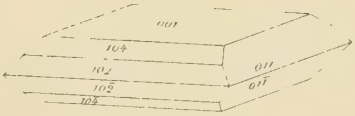


Fig. 7



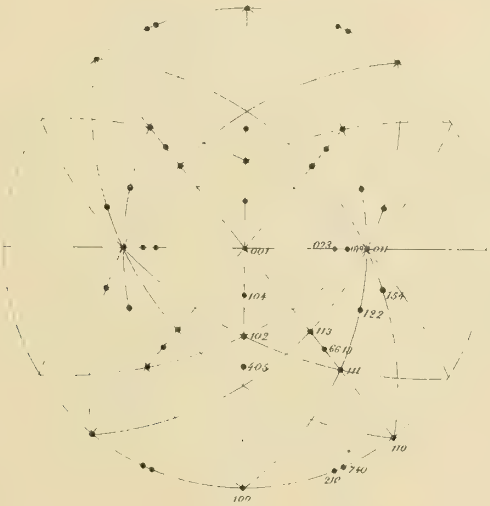


Fig. 8

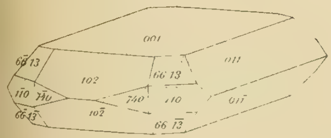
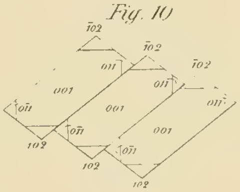


Fig. 10



Ulteriori osservazioni sui giacimenti minerali di Val d'Ala in Piemonte.
I. L'idocrasio del banco di granato nel serpentino della Testa Ciarva al piano della Mussa.

Memoria del Socio GIOVANNI STRUEVER

letta nella seduta del 12 giugno 1887.

(Con una tavola).

Altra volta [1] ho descritto sommariamente i principali giacimenti minerali della Val d'Ala nel circondario di Lanzo (Alpi Graje in Piemonte) e se ora torno all'argomento, è per rendere note alcune osservazioni che ebbi agio di fare in questi ultimi anni, e per completare in parte quello che scrissero altri e quanto pubblicai io stesso in precedenti occasioni intorno ai giacimenti della Testa Ciarva ancora oggidì ricchi di belli campioni. Qua e là si troveranno delle considerazioni di indole più generale.

I. Idocrasio.

Ricordo anzitutto che in Val d'Ala si conoscono da molto tempo tre giacimenti separati di idocrasio, cioè due molto vicini l'uno all'altro nel serpentino della Testa Ciarva all'alpe della Mussa sopra Balme, e il terzo, di idocrasio bruno manganesifero, alla Corbassera presso Ala, a circa 12 chilometri più a valle, sempre sulla sinistra della Stura, nel contrafforte che partendo dalla Ciamarella, nella catena centrale, si estende da ovest ad est tra la valle di Ala e la Valle-Grande di Lanzo. Giova notare che il Zepharovich nella sua Memoria « *Krystallographische Studien über den Idokras* » [2], dietro le indicazioni meno esatte avute dal Gastaldi e dal Sella, ritiene tutti i cristalli d'idocrasio di Val d'Ala da lui studiati provenienti da due luoghi della Mussa vicini l'uno all'altro, e cioè i cristalli di idocrasio bruno manganesifero provenienti dall'uno, e i cristalli di varie tinte verdi e quelli in parte verdi ma a striscie trasversali brune, provenienti dall'altro giacimento. La analogia della parziale tinta bruna degli ultimi cristalli con quella dell'idocrasio manganesifero è dallo stesso autore spiegata colla vicinanza dei due giacimenti. Tutto ciò cade evidentemente davanti al fatto che tutti i cristalli di idocrasio bruno manganesifero, comunicati dal Sella e dal Gastaldi al Zepharovich, provenivano dalla Corbassera, mentre i cristalli di tinta esclusivamente verde provengono dal banco di idocrasio della Testa Ciarva, e i cristalli a tinta verde-brunastra, o verdi a strati bruni, si trovano col diopside, col clinocloro, colla apatite e colla calcite nel banco di granato della stessa Testa Ciarva.

[1] *Die Minerallagerstaetten des Alathal's in Piemont.* Neues Jahrbuch f. Min. etc. 1871, p. 337, 8°. — Memorie del r. Comitato geologico d'Italia. Vol. I, p. 38 e seg. Firenze 1871, 4.°.
[2] Sitzungsberichte der math.-naturw. Cl. der k. Akad. der Wissensch. in Wien. Band 49, 1864, 8°.

Ciò premesso, veniamo ai caratteri distintivi dei cristalli trovati nei due giacimenti di quest' ultima località. Credo utile di aggiungere che le seguenti notizie, per quanto si riferiscono ai due giacimenti in generale, si fondano essenzialmente sulle numerose osservazioni che potei fare altra volta, nelle raccolte del Valentino e dell'Università di Torino, sopra migliaia e migliaia di campioni passati per le mie mani, come su quelle fatte in ripetute visite sul luogo, e sul materiale abbastanza ricco riunito ora nel Museo mineralogico della Università di Roma.

Le indicazioni riguardanti il carattere delle combinazioni, la relativa frequenza delle forme semplici, le misure goniometriche ecc., si riferiscono ai soli campioni che ora ho sott'occhio. Questi ammontano, per il banco di granato della Testa Ciarva, che ci occuperà in primo luogo, a 8 gruppi e 69 cristalli sciolti, tutti, salvo uno dei gruppi, da me stesso riuniti.

a) *Idocrasio del banco di granato.*

Nel banco di granato, racchiuso dal serpentino della Testa Ciarva e posto più in alto del banco d'idocrasio, quest'ultimo minerale costituisce una delle specie più rare, mentre vi predominano il granato, il diopside e il clinocloro. Tutti i cristalli svelano una tendenza molto pronunciata a svilupparsi a preferenza nel senso dell'asse di simmetria, come risulta chiaramente dal quadro che segue. In esso sono indicate le dimensioni, espresse in millimetri, di tutti i cristalli isolati che ho sott'occhio e di due individui della collezione del Valentino di cui presi altra volta le misure. Il terzo numero rappresenta sempre la lunghezza nel senso dell'asse di simmetria, i due primi numeri i diametri misurati nella direzione degli assi orizzontali secondarî.

N.°	Dimensioni	N.°	Dimensioni	N.°	Dimensioni	N.°	Dimensioni
1	1 — 1.5 — 8	19	2 — 3.5 — 18	36	3 — 4 — 15	53	4 — 5 — 42
2	1 — 1.5 — 8	20	2 — 4 — 19	37	3 — 4 — 17.5	54	4 — 9 — 23
3	1 — 2 — 15	21	2.5 — 2.5 — 17	38	3 — 4 — 18	55	4.5 — 5.5 — 23
4	1 — 3.5 — 23	22	2.5 — 2.5 — 22	39	3 — 4 — 27	56	4.5 — 5.5 — 25
5	1.5 — 1.5 — 18	23	2.5 — 3 — 15	40	3 — 5 — 37	57	4.5 — 6 — 21.5
6	1.5 — 1.5 — 23	24	2.5 — 3 — 21	41	3 — 6 — 24	58	4.5 — 7 — 21
7	1.5 — 2 — 16.5	25	2.5 — 3 — 22	42	3 — 10 — 18	59	4.5 — 8 — 15
8	1.5 — 2 — 17	26	2.5 — 3 — 23	43	3.5 — 4 — 43	60	5 — 5.5 — 21
9	1.5 — 2 — 18	27	2.5 — 3 — 29	44	3.5 — 4.5 — 12	61	5 — 7 — 27
10	1.5 — 2 — 20	28	2.7 — 4.5 — 27	45	3.5 — 4.5 — 14	62	5 — 8 — 22
11	1.5 — 2.5 — 20	29	3 — 3 — 14	46	3.5 — 4.5 — 14.5	63	5.5 — 15 — 13
12	1.5 — 3.5 — 24	30	3 — 3 — 17	47	3.5 — 4.5 — 18	64	7 — 11 — 16
13	2 — 2 — 14	31	3 — 3 — 19	48	4 — 4 — 12	65	8 — 8 — 15
14	2 — 2 — 23.5	32	3 — 3 — 35	49	4 — 4 — 15.5	66	8 — 8 — 25
15	2 — 2 — 24	33	3 — 3 — 42	50	4 — 4 — 28	67	8 — 8 — 54
16	2 — 2.5 — 20	34	3 — 3.5 — 13	51	4 — 4 — 35	68	10 — 10 — 26
17	2 — 3 — 17	35	3 — 3.5 — 36	52	4 — 5 — 23	69	10 — 10 — 120
18	2 — 3 — 23						

Prendendo la media di tutti i 138 diametri orizzontali da una parte, e la media delle 69 lunghezze dall'altra, si trova 3. 94 mm. rispettivamente 23. 22 mm., talchè il rapporto tra il diametro orizzontale medio e la lunghezza media dei cristalli diventa 1 : 5. 89. E la seconda cifra del rapporto, per varî motivi, resta inferiore al vero. Basterà qui di accennare al fatto che molti dei cristalli sono rotti ad una estremità, onde la lunghezza misurata rimane al di sotto della vera. Di più, parecchi dei cristalli compresi nel quadro non sono che aggruppamenti di un numero variabile, talora grandissimo, di individui prossimamente paralleli, talchè, misurando questi uno ad uno, diminuirebbe di molto il diametro medio orizzontale rispetto alla lunghezza. Tali cristalli sono p. e. quelli corrispondenti ai numeri 42, 59, 63, 64, 65, 68 del quadro, i quali solo apparentemente fanno eccezione alla regola generale, che cioè i cristalli sono assai allungati nel senso dell'asse di simmetria principale. Questa tendenza dei nostri cristalli ad assumere l'abito di prismi molto allungati si svela ancora maggiormente in quei sottili aghetti di idocrasio che qualche volta si trovano sovra i campioni essenzialmente costituiti da granato e terminano generalmente in punta, per mancanza della base.

Le forme semplici e le combinazioni trovate sovra l'idocrasio del banco di granato sono ben poche in paragone di quelle dell'idocrasio del banco d'idocrasio. Con certezza non potei constatare che i due prismi (110) e (100), la base (001), la piramide a sezione quadrata di primo ordine (111) e le due piramidi diottagone (311) e (312). Esistono probabilmente anche prismi ottagoni, ma la striatura profonda e fitta che presentano tutte le faccie della zona dei prismi, non permette di prendere le necessarie misure e tanto meno di determinare dei simboli.

Fra i cristalli misurati dal Zepharovich, e più particolarmente da lui descritti, appartengono al nostro giacimento con certezza i n.[i] 19 e 20 (p. 59 del testo e fig. 32, 33, 34 su tav. VI) i quali non aggiungono altre forme alle suindicate. Per la colorazione, anche il n. 16 (pag. 58, fig. 29 su tav. V) che il Zepharovich ebbe in comunicazione dall'Istituto politecnico di Zurigo, sembrerebbe provenire dal banco di granato, ma il complesso dei suoi caratteri, la natura cioè della combinazione unitamente ai particolari disegni sulle faccie di (001)(111)(331) che lo stesso Zepharovich dichiara di non aver mai visto sovra altri cristalli della Mussa, rendono per lo meno incerta la provenienza, tanto più che fra parecchie migliaia di cristalli, con certezza provenienti dal banco d'idocrasio, non vidi mai alcuno con parziale tinta rosso-brunastra, nè trovai mai fra molte centinaia di cristalli del banco di granato forme diverse dalle sovra enumerate. Se ciò non ostante il cristallo menzionato provenisse dal banco di granato, dovremmo aggiungere alle suddette forme (331)(211)(210).

Le combinazioni da me osservate sono:

1. (110)(100)(001). } vedi anche Zepharovich.
2. (110)(100)(311)(111). }
3. (110)(100)(311)(111)(001).
4. (110)(100)(311)(111)(312)(001).

Volendo seguire la tendenza alla creazione di tipi che pare si accentui sempre più nelle recenti monografie, dovremmo qui stabilire almeno tre o meglio anche quattro, dovremmo cioè distinguere: 1° cristalli terminati dalla sola base, 2° cristalli terminati

dalla base larga con una coroncina di altre faccette strettissime, 3° cristalli terminati dalla base e da altre forme poco su poco giù ugualmente sviluppate, 4° cristalli acuminati, cioè senza base.

Ma se una tale distinzione, basata sulla presenza o mancanza di qualche forma semplice, sul minore o maggiore sviluppo di certe faccie può soddisfare chi consideri la sola forma geometrica di cristalli scelti a caso, non può più sembrare sufficiente nè utile a chi voglia farsi una giusta e precisa idea di un minerale proveniente da un dato giacimento, per distinguerlo dal medesimo minerale appartenente ad altro giacimento, o a chi abbia per iscopo di descrivere le condizioni paragenetiche di un dato minerale o meglio il carattere generale di un determinato giacimento, onde contribuire a raccogliere fatti ben accertati che possano servire allo studio della origine, della formazione dei depositi minerali.

Ora a me sembra che assai sovente si dia troppa importanza a quelle suaccennate differenze geometriche, le quali servono forse a semplificare la descrizione dei cristalli, ma non presentano, del resto, che un interesse assai mediocre quando non sono accompagnate da differenze nelle condizioni paragenetiche; mentre poi si trascurano anche troppo quei caratteri, difficili forse a descriversi esattamente, ma certo facili ad afferrarsi a prima vista, i quali danno una impronta locale ai minerali di un determinato giacimento. A tutti i mineralisti è ben noto quanto quest' abito locale dei minerali rende sovente facile di indicare con certezza la loro provenienza.

Per maggiormente chiarire il mio concetto e meglio comprovare la preponderante importanza dell'abito locale di fronte alle accidentali differenze geometriche, valgano le osservazioni sui cristalli cosidetti artificiali. Chiunque abbia qualche esperienza dei fenomeni che si svelano nella cristallizzazione di sostanze solubili nell' acqua o in qualche altro liquido, si sarà accorto che i cristalli ottenuti dalla stessa operazione presentano bensì lo stesso abito generale, ma certamente nè sempre la stessa combinazione nè sempre lo stesso sviluppo relativo delle faccie. Anzi, si sa da molte osservazioni che crescendo un cristallo può cambiare combinazione. Dall'altra parte segue p. e. dalle esperienze che ebbi agio di fare studiando una numerosa serie di derivati della santonina, ottenuti dal Cannizzaro, che non si riesce a cambiare l'abito generale dei cristalli una volta formatisi, per quante volte si ridisciolgano e si facciano ricristallizzare nelle medesime condizioni. Potei bensì ottenere cristalli o più piccoli o più grossi, secondoche i cristalli primitivi furono, prima di ridiscioglierli, ridotti in polvere o no, ma l'abito rimase sempre lo stesso. Di più, la medesima sostanza, ottenuta con metodi essenzialmente diversi, mi presentò generalmente cristalli di abito assai differente, i quali conservarono quest'abito diverso, per quante volte si facessero ricristallizzare in identiche condizioni di solvente e di temperatura. Tutto ciò mostra, a mio avviso, che l'impronta locale dei minerali, quel loro *facies* particolare, variabile di giacimento in giacimento, è qualche cosa di ben più costante e quindi più importante dei tipi puramente geometrici, i quali dipendono evidentemente da cause non comuni a tutto il giacimento, ma variabili anche a brevissima distanza, come si verifica p. e. nello spazio relativamente assai ristretto di un cristallizzatoio.

Torniamo ora al nostro idocrasio, i cui cristalli sotto varî aspetti sono notevoli. Accennai di già incidentalmente al fatto che essi sono da considerarsi piuttosto come

associazioni di gran numero di individui uguali, più o meno perfettamente paralleli, anzichè come individui semplici. Talora numerosi individui paralleli si toccano soltanto lateralmente senza che risulti una terminazione unica e unita, talora invece l'aggruppamento tende ad assumere all'estremità l'aspetto di cristallo unico, senza riuscirvi però completamente, inquantochè anche sulla base di cristalli apparentemente semplici si osservino depressioni e solchi profondi irregolarissimi, terminati lateralmente dalle faccie di (111) e (311). Tra i due estremi v'ha graduato, insensibile passaggio. Dal fatto esposto dipende altresì la irregolarità stragrande delle sezioni orizzontali dei cristalli, la profonda e fitta striatura verticale della zona dei prismi, e l'aspetto quasi ondulato delle faccie terminali, fenomeni tutti che rendono la maggior parte dei cristalli assolutamente inservibili a misure esatte al goniometro.

Il fenomeno forse più interessante che presentano i nostri cristalli è evidentemente dovuto ad una interruzione completa, più o meno prolungata, nella cristallizzazione dell'idocrasio. La maggior parte dei cristalli si compone di una parte predominante inferiore, o, trattandosi di individui terminati alle due estremità, di una parte predominante intermedia, più grossa, che per lo più svela le sole faccie prismatiche e la base, mentre sonvi poi sovrapposte, o ad una sola estremità nei cristalli impiantati verticalmente sulla matrice, o alle due estremità nei cristalli terminati ai due fini, porzioni alquanto più ristrette e relativamente assai corte nel senso dell'asse principale, che svelano oltre alle faccie prismatiche sempre le forme (001)(111)(311) e talora anche (312). Alcune volte pare che le strie dei prismi passino, in qualche punto, senza interruzione dalla parte intermedia o inferiore alle porzioni terminali, ma quasi sempre si nota anche nella striatura un distacco netto tra le due formazioni, distacco che si svela sulla superficie delle faccie prismatiche o sotto forme di linee parallele agli spigoli della base con (110) e (100), e tutte alla stessa altezza, o sotto forma di linee simili, ma interrotte e a livello variabile. Quest'ultimo è il caso di quelle associazioni parallele in cui, al momento della interruzione nella cristallizzazione, i singoli individui non erano arrivati alla stessa lunghezza.

Le eccezioni a questa regola sono fornite da cristalli terminati dalla sola base e a tinta brunastra, e da cristalli verdi terminati dalle forme (311)(111) o da queste e la base, cioè da cristalli che o presentano la forma della parte inferiore o mediana, ovvero quella dei prolungamenti sopra descritti.

Riguardo al colore notiamo che i cristalli terminati alle due estremità e portanti quei prolungamenti più innanzi descritti, sono nella parte centrale di tinta generale verde-erba o verde-oliva di varia intensità, e a striscie bruno-rossastre or sottilissime ora più larghe, quasi sempre numerosissime e più fitte verso le due estremità della parte mediana, od anche verso una sola estremità, mentre i prolungamenti presentano di nuovo tinta verde-erba pura, almeno guardati nel senso normale all'asse di simmetria principale, e color bruno più o meno cupo se guardati nel senso dell'asse stesso. Qualche volta, per la finissima struttura fibrosa interna, i prolungamenti presentano nel senso normale all'asse principale color grigio-giallognolo. I cristalli che erano impiantati in senso verticale e furono poi staccati dalla matrice, sono o di color verde-erba uniforme, o di color bruno distribuito a zone alternativamente più larghe e più strette e più o meno scure, ovvero di color verde nella parte inferiore e

superiormente a striscie brune, e, ove esistono, a prolungamenti colorati come sopra fu detto. Generalmente le striscie brune attraversano tutto il cristallo e sono parallele alla base, ma talora si osserva, come riproducono i contorni delle faccie della piramide (111) e della base ugualmente sviluppate, per passare poi di nuovo, nel medesimo cristallo, ad essere parallele alla sola base; il quale fenomeno dimostra chiaramente come durante la cristallizzazione non sono avvenuti soltanto cambiamenti nella soluzione, indicati dal variare del colore, ma altresì cambiamenti nella combinazione, senza che vi sia alcun nesso tra i due fatti.

Mentre nella maggior parte dei casi la tinta bruna si svela in striscie o bande or sottili or più larghe, ma nettamente limitate, avviene anche che il color bruno, ora più chiaro ora più scuro, è diffuso uniformemente in gran parte di un cristallo; e non di rado ci accorgiamo, come i limiti della tinta bruna verso la verde non sono gli stessi per tutti i singoli individui riuniti in associazione parallela che simula un individuo semplice, locchè viene appunto a conferma della asserzione che cioè i cristalli a prima vista semplici, non sono che associazioni parallele di molti individui che sono cresciuti ognuno per proprio conto, per arrivare in ultimo alla stessa altezza e formare così un semplice simulacro di individuo unico.

Il pleocroismo è sempre assai pronunciato e distinto ancora nei cristalli sottili; le tinte verdi si risolvono guardando colla lente dicroscopica nel senso normale all'asse *c* in una tinta verde-erba o quasi verde-smeraldo, e in altra giallo-brunastra, le tinte brune invece danno due immagini i cui colori evidentemente risultano dalla miscela del rosso-bruno colle due tinte precedenti; sono cioè tra il verde-olio e il bruno-olio da una parte e rosso-bruno dall'altra. Delle due tinte fondamentali quella verde, o mista almeno a verde, corrisponde alle vibrazioni parallele all'asse *c*.

Riguardo all'aspetto fisico delle singole faccie ho già incidentalmente accennato alla profonda e fitta striatura verticale delle faccie prismatiche e all'aspetto generalmente ondulato, ineguale delle altre forme, come alle depressioni e ai solchi terminati lateralmente da faccie di (111) e (311) che si osservano quasi sempre sulla base. Tutti questi fenomeni sono la conseguenza della costituzione polisintetica dei cristalli. Qualche volta però le faccie terminali sono perfettamente piane e regolarmente riflettenti in modo da permettere misure esatte. Noto ancora che in taluni casi le faccie di (311) presentano, massime verso la loro parte inferiore, striatura nel senso dei loro spigoli colle adjacenti faccie di (111). Ma il fenomeno più interessante ci presenta l'aspetto fisico delle faccie di (312) che sono, del resto, assai più rare di tutte le altre.

In un bel cristallo (n. $17217/_{309}$ del catalogo) terminato alle due estremità, delle dimensioni 8 : 8 : 25 mm., della combinazione (110)(100)(001)(111)(311)(312) in cui dominano (110) e (001), coi prolungamenti sopra descritti alle due estremità, verde-olio con numerose striscie rosso-brune verso una sola estremità della parte mediana, si osservano le faccette di (312) soltanto nel prolungamento dell'estremità bruna, e tutte sono ruvide, appannate. In un altro cristallo (n. $17225/_{317}$) terminato ancora tutt'attorno, ma con striscie brune verso i due fini, si osservano altresì le faccie tutte ruvide di (312) ad una sola estremità. E così si comportano parecchi altri fra i cristalli esaminati. Dall'altra parte, esistono individui in cui si osservano le stesse faccie di (312) ma tutte lucenti, e ora da un solo lato, ora alle due estremità, siano queste verdi o brune.

Ed ora che ho tentato di dare una idea per quanto possibile precisa dei cristalli in questione, cade in acconcio una considerazione di indole più generale.

È singolare come certe idee, una volta messe fuori, tendano irresistibilmente ad allargare a dismisura i limiti entro i quali possono essere ammesse. Quante volte non furono indicate come causa efficiente di certe variazioni nell'abito dei cristalli di una medesima sostanza le impurità accidentalmente presenti nella soluzione, dalla quale i cristalli si depositarono! Eppure, se esaminiamo un po' più da vicino questa influenza, non possiamo a meno di accorgerci che essa spiega poco più che nulla.

Nessuno certamente vorrà negare che molte volte una medesima sostanza assume abito diverso secondochè nelle soluzioni da cui si ottiene, sono o nò presenti certe altre sostanze. Ma il volerne dedurre senz' altro che la presenza di tali sostanze è causa necessaria e sufficiente perchè il fenomeno abbia luogo è un correre troppo. E valgano gli esempî presi dalla natura stessa e scelti fra i più ovvii.

A tutti i mineralisti è ben noto il così detto grès cristallizzato di Fontainebleau, a cemento calcareo che ha assunto costantemente la forma del romboedro $(11\bar{1})$ della calcite. E quando più tardi a Sievering nei dintorni di Vienna fu osservato un grès identico, si poteva essere inclinati a incolpare la sabbia quarzosa dell'abito speciale assunto dalla calcite. Ma una tale conclusione sarebbe facile a dimostrarsi inattendibile, poichè in migliaia e migliaia di altri casi la calcite ha assunto la medesima forma, senza che racchiuda sabbia quarzosa, anzi senza che si trovi, anche a distanza, quarzo o sabbia. Dunque non può essere la sabbia la causa efficiente, come non può esserlo la presenza di altre impurità, conoscendosi la calcite sotto forma di $(11\bar{1})$ tanto allo stato puro quanto unito ad impurità d'ogni genere.

Passiamo ad altro esempio, alle tormaline dell'Elba. Tenendo conto delle sole faccie terminali, poichè la zona dei prismi poco varia, vi troviamo cristalli rosei di tinta uniforme o quasi, ora terminati dalla sola base liscia e lucente, ora dalla sola base ruvida, ora dal solo romboedro (100), ora da (100) e $(11\bar{1})$, ora da (100)(110), ora da (111)(100)(110), ora da scalenoedri ecc. ecc., e la stessa variabilità nel modo di terminazione dei cristalli si osserva nelle tormaline verdi e nere, e nelle tormaline policrome; anzi in queste ultime è forse più evidente che mai la nessuna relazione tra le impurità e i cambiamenti delle impurità avvenuti durante la formazione del cristallo, e l'abito di questo.

Come mai si potrebbe poi mettere di accordo la suaccennata ipotesi sulla influenza delle impurità colla costanza p. e. della forma del quarzo?

Qualunque minerale un po' comune, trovato in più luoghi, noi prendiamo ad esaminare, ci s'impongono sempre le stesse considerazioni; talchè dobbiamo ammettere che l'abito non dipende essenzialmente in alcun caso dalla presenza o mancanza di impurità o dal cambiamento di queste durante la cristallizzazione.

I nostri cristalli di idocrasio, del resto, ne sono una prova evidente. Essi dimostrano che durante la loro formazione sono avvenuti numerosi cambiamenti nella soluzione dalla quale si depositarono, ed anche delle interruzioni complete. Ma tutto ciò non ha influito sul loro abito generale, sulla tendenza pronunciata cioè di svilupparsi a preferenza nel senso dell'asse principale e sulla loro natura distintamente polisintetica, come non vi è nesso alcuno tra questi cambiamenti e la combinazione.

Non pare nemmeno sia il caso di ricorrere a variazioni di temperatura per spiegare l'abito diverso dei cristalli di una medesima sostanza provenienti da diversi luoghi, nè a correnti, nè alla concentrazione minore o maggiore della soluzione, nè alla minore o maggiore rapidità della cristallizzazione. Riguardo alla temperatura, sappiamo bensì che ove questa cambi notevolmente, entro limiti relativamente larghi, una sostanza può anche cambiare sistema cristallino trasformandosi in un corpo dimorfo del primo, ma questo avviene repentinamente e certo non basta a dimostrare che, finchè una sostanza rimane la stessa per composizione e forma cristallina, la temperatura influisca sull'abito dei suoi cristalli. Ignoro se siano state fatte apposite esperienze per vedere se i cristalli cambiano abito col variare della temperatura di cristallizzazione, ma quello che è certo, si è che una elevazione di temperatura generalmente non fa che accelerare la evaporazione della soluzione e quindi la cristallizzazione, laonde risultano generalmente cristalli più piccoli bensì, e forse meno regolari, ma dello stesso abito di quelli che si formano facendo evaporare più lentamente, cioè a temperatura più bassa, la stessa soluzione. Con ciò resterebbe in pari tempo esclusa la influenza della concentrazione minore o maggiore della soluzione, come della maggiore o minore rapidità della cristallizzazione. Non più probabile sarebbe l'ipotesi che facesse dipendere le variazioni dell'abito da correnti. Di fatto, egli è chiaro che in natura, come nei nostri cristallizzatoi, o tali correnti esistono di già o sono necessaria conseguenza della cristallizzazione stessa, e necessariamente variabilissime anche in spazio ristretto. Potrebbero dipendere da tali correnti le leggiere differenze che si osservano fra i cristalli di una stessa cristallizzazione, la minore o maggiore estensione di questa o di quell'altra faccia, non mai però i caratteri comuni a tutti i cristalli ottenuti da una medesima operazione o a tutti i cristalli di un dato giacimento, cioè appunto quell'abito generale che mi pare assai più interessante dei tipi fondati sopra differenze puramente geometriche.

A me sembra che si debbano ricercare le cause efficienti, od almeno preponderanti, della variazione dell'abito nei cristalli di una medesima sostanza, nella sua storia, se è lecito di così esprimersi, ovvero nel metodo seguìto dalla natura o dallo sperimentatore nell'ottenerli. Già altra volta ho brevemente accennato a questa idea, comunicando i risultati dei miei studî sulla forma cristallina di alcuni derivati della santonina, ricordati anche più sopra.

Mi sia ora permesso di aggiungere a ciò che dissi altra volta, alcune considerazioni che mi pajono adatte ad avvalorare quella mia convinzione.

Accennerò anzitutto di volo ad un fatto che non sarà certamente sfuggito ai chimici, benchè, per quanto mi sappia, non sia mai stato fatto argomento di apposite ricerche. Ed è questo. Un medesimo precipitato assume sovente aspetto alquanto diverso, per così dire, abito diverso, secondo la composizione particolare dei sali da cui si ottiene per mutua decomposizione, cioè secondo il metodo che si segue per ottenerlo. Ed è appunto in fatti consimili che credo di dover ricercare le cause principali della variazione dell'abito nei cristalli di una medesima sostanza minerale. I tre giacimenti d'idocrasio di Val d'Ala ci offrono una occasione propizia di discutere la questione in base alle osservazioni fatte in natura. È innegabile che il giacimento del banco di granato alla Testa Ciarva presenta una sorprendente analogia col giacimento

ora quasi esaurito della Corbassera presso Ala. In ambedue i giacimenti troviamo il granato, il diopside, l'idocrasio, la ripidolite, la calcite, l'apatite, mentre nel banco d'idocrasio della Testa Ciarva non v'ha nè granato nè diopside, per quanto mi sappia. L'analogia dei due primi giacimenti è tale da non potersi disconoscere nemmeno in dettagli che a prima vista sembrerebbero insignificanti.

Rimandando il lettore, per il granato e l'apatite, a quello che dirò in altra parte di questi studî mi limito qui ad accennare al fatto che l'idocrasio bruno manganesifero della Corbassera presenta anch' esso, in gran parte, una decisa tendenza a svilupparsi a preferenza nel senso dell'asse principale, a differenza di ciò che accade per l'idocrasio del banco d'idocrasio della Testa Ciarva. Ricordo ancora che anche in quel giacimento di Cantoira in Valle-Grande di Lanzo che descrissi altra volta [1] brevemente, si ripete l'associazione dei minerali del banco di granato della Testa Ciarva e del giacimento ad idocrasio manganesifero della Corbassera, e anche ivi a Cantoira noi troviamo l'idocrasio in cristalli molto allungati, quasi aghiformi.

Sarebbe facile di aumentare gli esempî, ma preferisco di non fondarmi che sui giacimenti che ho potuto studiare sul posto.

Abbiamo quindi qui tre giacimenti di idocrasio in cui il minerale, non ostante la variabile composizione speciale, presenta abito generale analogo, tre giacimenti in cui esso è accompagnato dagli stessi minerali principali, i quali svelano, come vedremo più tardi, ancor essi grande analogia fra di loro. Dall'altra parte troviamo l'idocrasio della Testa Ciarva con altro abito non solo, ma anche in condizioni genetiche diverse. Tutti i giacimenti sono racchiusi dalla zona delle pietre verdi del Gastaldi, ed anzi, due dei giacimenti, ad idocrasio di abito diverso, e a condizioni paragenetiche diverse, nello stesso serpentino della Testa Ciarva. È ovvio quindi di concludere che la eguaglianza o similitudine dell'abito dei cristalli d'idocrasio dei tre primi giacimenti dipende dalla eguaglianza o analogia del metodo seguìto dalla natura nel formarli, come la diversità dell'abito dei cristalli d'idocrasio del quarto giacimento dipende da ciò che la natura ha impiegato altro metodo per produrli. Insomma, ci troviamo davanti ad un fatto completamente analogo a quello dei precipitati sopra menzionati, e dei derivati della santonina.

Completiamo ora le notizie riguardanti l'idocrasio del banco di granato comunicando i risultati delle ricerche sulla relativa frequenza delle forme semplici, e le misure goniometriche istituite sovra alcuni di essi.

Ogni forma fu ritenuta come presente, quando si potè constatare l'esistenza di qualcuna delle sue faccie coll'ajuto della lente.

Fra 72 cristalli mostrarono

la forma	(110) —	72
"	(100) —	72
"	(001) —	65
"	(111) —	71
"	(311) —	71
"	(312) —	13

[1] *Cenni su alcuni minerali italiani.* Atti Acc. Torino 29 dicembre 1867.

Queste cifre richiedono ancora qualche spiegazione. La frequenza relativa della base sarebbe diminuita di molto, ove si contassero i singoli cristallini aghiformi impiantati sopra i gruppi che furono contati sempre come un sol esemplare al pari dei cristalli isolati, ma dall'altra parte aumenterebbe, se si volessero considerare come due cristalli diversi quelli che mostrano la sopra descritta interruzione nel loro sviluppo, poichè questi prima erano terminati sovente dalla sola base, poi nella parte terminale più ristretta da (111)(311) o da (111)(311)(001) o da (111)(311)(312) o da (111)(311)(312)(001).

La frequenza di (312) sarebbe da diminuire ancora, perchè non sempre è presente con tutte le sue faccie, all'opposto di quello che accade per le altre forme semplici.

In generale, benchè fondandosi sopra materiale più ricco le cifre relative probabilmente varierebbero alquanto, possiamo dire che i due prismi esistono in tutti i cristalli, che le forme (111) e (311) sono sempre compagne e mancano in pochissimi cristalli, che in un maggior numero di cristalli manca la base, benchè sia ancora fra le forme più frequenti, e che finalmente la forma (312) non si trova che in un numero molto piccolo di individui.

Limitandoci ai soli cristalli terminati alle due estremità troviamo i seguenti numeri. Fra 31 cristalli abbiamo

la forma	(110)	in	31	individui,
„	(100)	„	31	„
„	(001)	„	29	„
„	(111)	„	31	„
„	(311)	„	31	„
„	(312)	„	5	„ ,

locchè vuol dire che si ottengono, poco su poco giù, gli stessi rapporti di sopra.

Dal momento che il Zepharovich, senza alcuna colpa propria, ha forse adoperato per la determinazione delle costanti dell'idocrasio della Mussa, cristalli provenienti tanto dal banco d'idocrasio, quanto dal banco di granato, si rende necessario od almeno utile un nuovo esame dell'idocrasio della Mussa a questo riguardo, tenendo separati i cristalli dei due giacimenti. Ma mi affretto di osservare che, a motivo della grande rarità dei cristalli ben misurabili nel banco di granato, è *a priori* probabile che le costanti date dal Zepharovich corrispondono bene ai cristalli del banco d'idocrasio nè sono sensibilmente viziate dall'aver egli *forse* (non risulta con assoluta certezza dalla memoria) compreso fra gli angoli utilizzati per la determinazione delle costanti anche qualcuno osservato sopra cristalli del banco di granato. Ad ogni modo, ho voluto istituire un numero abbastanza grande di misure tanto sui cristalli che qui più davvicino ci occupano, quanto sui cristalli del banco d'idocrasio.

Limitandomi per ora ai cristalli del banco di granato, premetto anzitutto che essi svelano, anche negli angoli degli individui di apparenza semplice e perfetta, variazioni tali da rendere per ora illusorio il calcolo delle costanti, tanto più che ben pochi di tali cristalli presentano faccie riflettenti una sola immagine netta. Questo fatto viene a conferma di quanto dissi sopra della natura generalmente polisintetica dei nostri cristalli.

Le misure che seguono, non hanno quindi lo scopo di servire per il calcolo delle

costanti, ma solo di dimostrare i limiti in cui variano gli angoli omologhi di essi. Ciò rende però necessario di indicare le misure con qualche dettaglio.

Sopra uno dei migliori cristalli in cui si poterono misurare con esattezza sufficiente tutti gli angoli di quattro ottanti, si trovò:

$\bar{1}\bar{1}1:001$	$= 37^\circ 19' 7''$	
$111:001$	$= 36\ 50\ 33$	media $= 37^\circ 5' 43''.5$
$\bar{1}11:001$	$= 37\ 10\ 7$	
$1\bar{1}1:001$	$= 37\ 3\ 7$	
$311:001$	$= 59^\circ 20' 17''$	
$3\bar{1}1:001$	$= 59\ 26\ 27$	
$1\bar{3}1:001$	$= 59\ 35\ 47$	
$\bar{1}\bar{3}1:001$	$= 59\ 44\ 27$	media $= 59^\circ 30' 13''$
$\bar{3}\bar{1}1:001$	$= 59\ 40\ 20$	
$\bar{3}11:001$	$= 59\ 32\ 37$	
$\bar{1}31:001$	$= 59\ 23\ 33$	
$131:001$	$= 59\ 18\ 17$	
$110:001$	$= 89^\circ 45' 10''$	
$1\bar{1}0:001$	$= 89\ 58\ 7$	media $= 89^\circ 57' 17.''5$
$\bar{1}\bar{1}0:001$	$= 90\ 12\ 10$	
$\bar{1}10:001$	$= 89\ 53\ 43$	
$311:3\bar{1}1$	$= 31^\circ 39' 3''$	
$1\bar{3}1:\bar{1}\bar{3}1$	$= 31\ 43\ 0$	media $= 31^\circ 40' 52''.5$
$\bar{3}\bar{1}1:\bar{3}11$	$= 31\ 41\ 30$	
$\bar{1}31:131$	$= 31\ 39\ 57$	
$3\bar{1}1:1\bar{3}1$	$= 45^\circ 20' 13''$	
$\bar{1}\bar{3}1:\bar{3}\bar{1}1$	$= 45\ 12\ 17$	media $= 45^\circ 18' 6''$
$\bar{3}11:\bar{1}31$	$= 45\ 20\ 0$	
$131:311$	$= 45\ 19\ 53$	
$111:\bar{1}11$	$= 50^\circ 44' 3''$	
$\bar{1}11:\bar{1}\bar{1}1$	$= 50\ 24\ 30$	media $= 50^\circ 30' 24''$
$\bar{1}\bar{1}1:1\bar{1}1$	$= 50\ 39\ 10$	
$1\bar{1}1:111$	$= 50\ 13\ 53$	
$111:311$	$= 29^\circ 26' 57''$	
$111:131$	$= 29\ 47\ 37$	
$1\bar{1}1:3\bar{1}1$	$= 29\ 40\ 23$	
$1\bar{1}1:1\bar{3}1$	$= 29\ 35\ 0$	media $= 29^\circ 34' 49'$
$\bar{1}\bar{1}1:\bar{1}\bar{3}1$	$= 29\ 47\ 0$	
$\bar{1}\bar{1}1:\bar{3}\bar{1}1$	$= 29\ 20\ 57$	
$\bar{1}11:\bar{3}11$	$= 29\ 31\ 27$	
$\bar{1}11:\bar{1}31$	$= 29\ 29\ 10$	

Da queste misure risulta anzitutto che la base devia grandemente dalla posizione normale essendo girata di quasi un quarto di grado attorno lo spigolo [$\bar{1}$10] verso la faccia 110, di soli pochi minuti invece attorno lo spigolo [110] verso la faccia $\bar{1}$10. Ma ciò non spiega che in parte le grandi differenze incontrate fra i valori degli angoli omologhi, onde è evidente che vi è altra causa di disturbo, ed è precisamente quel non perfetto parallelismo dei singoli individui riuniti che simulano un cristallo unico.

Ritenendo come di ugual peso tutti i singoli 36 valori sopra indicati (nè vi ha motivo di fare diversamente perchè tutte le faccie riflettono immagini di perfezione prossimamente uguale) si hanno per il cristallo, col metodo dei minimi quadrati, i seguenti risultati:

a:c = 1:0.535804

	calc.	oss.	n.	diff. oss.-calc.
111:001 =	37° 9′ 10″	37° 7′ 5″	(8)	— 2′ 5″
111:1$\bar{1}$1 =	50 33 40	50 30 24	(4)	— 3 16
311:001 =	50 27 4	59 30 13	(8)	+ 3 9
311:3$\bar{1}$1 =	31 36 23	31 40 52.5	(4)	+ 4 29.5
311:131 =	45 18 17	45 18 6	(4)	— 0 11
311:111 =	29 30 19	29 34 49	(8)	+ 4 30

Questi risultati sono tutt' altro che soddisfacenti rimanendo tra osservazione e calcolo una differenza assai forte per quasi tutti gli angoli nonostante il relativamente grande numero di angoli misurati sopra il medesimo cristallo.

Utilizzando i soli angoli tra le faccie di (111), fondando cioè il calcolo sui due angoli 111 : 001 e 111 : 1$\bar{1}$1, si ottiene:

a:c = 1:0.535054

	calc.	oss.	n.	diff. oss.-calc.
111:001 =	37° 6′ 51″	37° 7′ 5″	(8)	+ 0′ 14″
111:1$\bar{1}$1 =	50 30 47	50 30 24	(4)	— 0 23
311:001 =	59 24 58	59 30 13	(8)	+ 5 15
311:3$\bar{1}$1 =	31 35 41	31 40 52.5	(4)	+ 5 11.5
311:131 =	45 17 15	45 18 6	(4)	+ 0 51
311:111 =	29 30 0	29 34 49	(8)	+ 4 49

Qui si corrisponderebbero assai bene gli angoli 111:001 e 111:1$\bar{1}$1, ma, come è naturale, il risultato complessivo risulterebbe anche peggiore di prima.

Escludendo finalmente tutti gli angoli misurati delle zone [110] e [1$\bar{1}$0] ossia limitando il calcolo agli angoli 111:1$\bar{1}$1, 311:3$\bar{1}$1, 311:131, 311:111, si ottiene:

a:c = 1:0.535533

	calc.	oss.	n.	diff. oss.-calc.
111:001 =	37° 8′ 19″.5	37° 7′ 5″	(8)	— 1′ 14″.5
111:1$\bar{1}$1 =	50 32 37	50 30 24	(4)	— 2 13
311:001 =	59 26 19	59 30 13	(8)	+ 3 54
311:3$\bar{1}$1 =	31 36 8	31 40 52.5	(4)	+ 4 44.5
311:131 =	45 17 54	45 18 6	(4)	+ 0 12
311:111 =	29 30 12	29 34 49	(8)	+ 4 37

Questi ultimi risultati sono di assai poco peggiori dei primi.

Comunque sia, tanto segue da questi calcoli, che i risultati poco soddisfacenti non dipendono dal solo spostamento della base, ma anzitutto dal non perfetto parallelismo dei singoli individui riuniti in un cristallo polisintetico. Le differenze che in seguito a questo fatto svelano gli angoli omologhi, sono evidentemente accidentali, e ciò giustifica l'applicazione del metodo dei minimi quadrati. Ma d'altra parte risulta che, nel nostro caso, non basta il numero, per quanto grande, delle misure istituite sovra un sol cristallo, per ottenere costanti sufficientemente esatte. Del resto, mi sembra probabile che in molti altri casi la variazione dei valori degli angoli omologhi dipende essenzialmente dalla struttura polisintetica di cristalli solo apparentemente semplici.

Passando ad altri cristalli, la cosa si complica ancora.

Sovra quattro cristalli di color verde-erba-chiaro, della combinazione (110)(100)(111)(311)(001) molto allungati, a base strettissima, si determinarono i seguenti angoli:

Cristallo 1°.

$$\left.\begin{array}{l} 111:\bar{1}\bar{1}1 = 74^\circ 30' 30'' \\ 1\bar{1}1:\bar{1}11 = 74\ \ 31\ \ \ 7 \end{array}\right\} \text{media} = 74^\circ 30' 48'' \text{ e quindi } 001:111 = 37^\circ 15' 24''.$$

Fra le quattro faccie superiori di (111) son due che riflettono due immagini di cui una almeno devia dalle zone degli spigoli terminali. I valori ottenuti per l'angolo diedro degli spigoli terminali, avuto riguardo a tutte le imagini, sono:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 50^\circ 25' 40'' \\ 50\ \ 36\ \ 25 \end{array}\right\} \\ \left.\begin{array}{l} 50\ \ 46\ \ 45 \\ 50\ \ 43\ \ 15 \end{array}\right\} \\ 50\ \ 53\ \ 10 \\ \left.\begin{array}{l} 50\ \ 41\ \ 50 \\ 50\ \ 24 \end{array}\right\} \end{array}\right\} \text{media} = 50^\circ 38' 44''$$

L'angolo isolato corrisponde allo spigolo tra le due faccie perfettissime ad una sola imagine.

Cristallo 2°.

$$\left.\begin{array}{l} 111:\bar{1}\bar{1}1 = 74^\circ 31' 37'' \\ 1\bar{1}1:\bar{1}11 = 74\ \ 24\ \ 53 \end{array}\right\} \text{media} = 74^\circ 28' 15'' \text{ ovvero } 001:111 = 37^\circ 14' 7''.5.$$

Cristallo 3°.

$$\left.\begin{array}{l} 001:111 = 37^\circ\ \ 2' 57'' \\ 001:\bar{1}\bar{1}1 = 37\ \ 24\ \ 13 \\ 001:1\bar{1}1 = 37\ \ 35\ \ 23 \\ 001:\bar{1}11 = 36\ \ 58\ \ 27 \end{array}\right\} \text{media} = 37^\circ 15' 15''$$

$$\left.\begin{array}{l} 111:1\bar{1}1 = 50^\circ 39' 40'' \\ \qquad\quad 51\ \ 22\ \ 47 \\ \qquad\quad 50\ \ 13\ \ 40 \\ \qquad\quad 50\ \ 37\ \ 40 \end{array}\right\} \text{media} = 50^\circ 43' 27''$$

111:311 = 29° 44′ 20″		
29 12 13		
29 2 33		
29 9 0	media = 29° 26′ 12	
29 48 57		
29 38 33		
29 14 40		
29 39 20		

3̇11:31̄1 = 31° 27′ 53″
311:131 = 45 16 10

Cristallo 4°.

001:111	111:110
37° 26′ 27″	52° 36′
37 6 40	52 49 3″
37 5 40	52 54 20
37 13 50	52 39 40

media = 37° 13′ 9″ + 52° 44′ 46″ = 89° 57′ 55′

Combinando i due valori si trova per 001:111 il valore 37° 14′ 11″.5.

111:311
50° 4′ 10″ }
50 51 57 } media = 50° 28′ 3″.5.

Ricapitolando abbiamo per gli angoli principali di questi quattro cristalli:

	001:111
1.	37° 15′ 24″
2.	37 14 7.5
3.	37 15 15
4.	37 14 11.5

media = 37° 14′ 44″.5 ovvero (dando a 4 doppio peso, poichè vi si poterono compensare le zone per metà, locchè non era possibile per gli altri tre cristalli) = 37° 14′ 38″.

	111:11̄1
1.	50° 38′ 44″ (7)
3.	50 43 27 (4)

media = 50° 40′ 27″.

Tali valori vanno quasi perfettamente di accordo con quelli osservati (medî) e calcolati da Zepharovich per i cristalli verdi della Mussa, i quali sono 37° 14′ 37″.7 e 50° 40′ 4″.3, rispettivamente 37° 14′ 31″ e 50° 40′ 20″.

Senza discutere gli altri angoli che furono misurati sopra un sol cristallo od anche una o due volte soltanto, e che quindi meritano ben poca fiducia, possiamo ritenere che per questi cristalli di color verde-erba uniforme del banco di granato, privi di quei

prolungamenti che sopra ho descritti, valgano con grande approssimazione le costanti date da Zepharovich per i cristalli verdi della Mussa in generale.

La cosa cambia per i cristalli a prolungamenti, o per dire meglio, per questi prolungamenti stessi, come risulta di già dai calcoli sopra istituiti sui 36 angoli misurati su uno di tali cristalli.

Volli però aggiungere qualche altra misura, per mettere la cosa fuori dubbio.

In un altro di tali cristalli trovai:

	111:001	
1.	37° 13′ 30″	media = 37° 7′ 52″.5.
2.	37 10	
3.	36 48	
4.	37 20	

Anche qui la base devia molto dalla sua posizione normale, però la media dell'angolo 111:001 va molto bene di accordo con quella trovata per il cristallo sopra menzionato.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Fig. 1. Cristallo che nella parte mediana (da imaginarsi almeno tre volte più lunga) svela la combinazione (110) (100) (001) e nei due prolungamenti la combinazione (110) (100) (001) (111) (311) (312).

Fig. 2. Combinazione (110) (100) (311) (111).

Fig. 3. Combinazione (110) (100) (001) (111) (311) (312). Le faccie di (312) non sono sviluppate che all' estremità superiore.

Fig. 4. Combinazione (110) (100) (311) (111) (001).

Nelle figure 2, 3, 4, le faccie prismatiche sono almeno tre volte più lunghe di quello che è indicato nei disegni.

Fig. 5. Gruppo di cristalli parallelamente associati, della combinazione (110) 100) (111) (311) (312) (001), proiettato sopra il piano (100). I singoli individui del gruppo, di cui non furono raffigurati che i principali, sono di diversa lunghezza. I prolungamenti della parte superiore trovansi a diversa altezza, ma sono staccati dalla parte mediana secondo piani paralleli a (001); nella parte inferiore del gruppo invece il distacco dei prolungamenti dalla parte mediana è affatto irregolare.

Fig. 6. Sezione orizzontale del gruppo raffigurato al num. 5.

Fig. 7. Sezione orizzontale di altro gruppo polisintetico. Le linee accanto alle quali non v'è scritto il simbolo, corrispondono a faccie prismatiche apparenti, striate, non cristallograficamente orientate.

Fig. 8. Cristallo della combinazione (110) (001) (100) { le faccie strettissime di (100) sono tralasciate nel disegno } proiettato sopra 100. Il tratteggio nell'interno raffigura gli accrescimenti subiti dal cristallo e resi visibili dalla alternanza delle tinte verdi e brune. Come si scorge dalla figura, il cristallo presentava prima all' estremità le faccie di (111) dominanti e la base (001) poco sviluppata; poi la base man mano si sviluppò maggiormente sino a terminare da se sola il cristallo.

Fig. 9. Gruppo di cristalli (110) (100) (001) (111) (311) (312) parallelamente associati, proiettato sopra 100. Le strie di accrescimento sono tutte parallele alla base e nei singoli individui a differente altezza.

Fig. 1

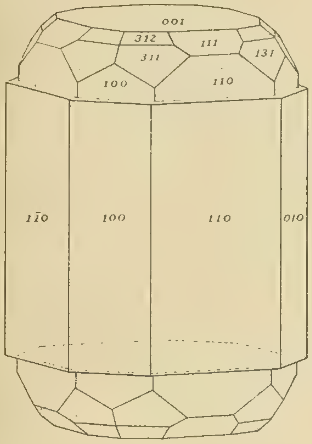


Fig. 2

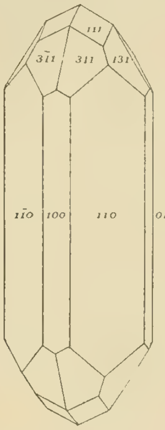


Fig. 3

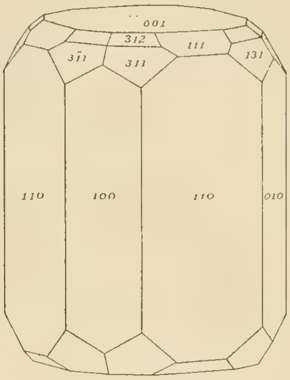


Fig. 4

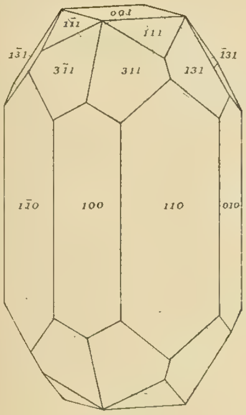


Fig. 7

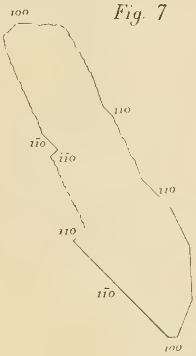


Fig. 5

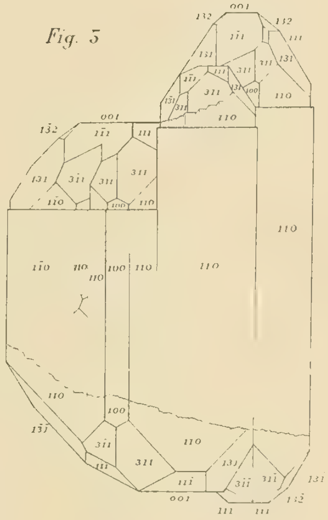


Fig. 9

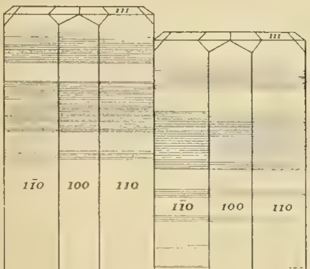
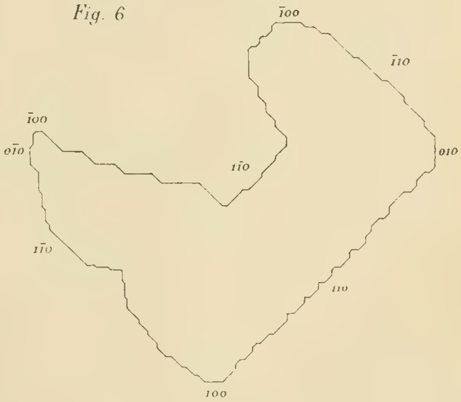


Fig 8

Fig. 6



G. Strüver dis. Stab. lit. Bruno e Salomone. Roma

RELAZIONE

letta dal Socio Blaserna, relatore, a nome anche del Socio Cantoni, nella seduta del 6 febbraio 1887, sulla Memoria del dott. G. G. Gerosa, intitolata: *Sulla resistenza elettrica dei miscugli delle amalgame liquide e sulle costanti fisiche dei miscugli di liquidi isomeri.*

« La breve Memoria del dott. G. G. Gerosa esamina la resistenza elettrica che presentano i miscugli delle amalgame liquide formate con mercurio, e lo zinco, lo stagno ed il piombo. L'autore giunge ad alcune conclusioni degne di nota. Egli trova che la resistenza elettrica dell' amalgama è sempre inferiore alla media aritmetica delle resistenze dei metalli associati; e che tale inferiorità cresce più o meno rapidamente a secondo delle quantità disciolte.

« Egli trova inoltre, che frazioni semplici dei pesi molecolari dei diversi metalli, disciolti in eguali quantità di mercurio, dànno amalgame corrispondenti.

« Il lavoro è condotto con cura e con molta esattezza di metodo, e contiene un interessante contributo allo studio delle proprietà fisiche delle amalgame. Esso è corredato da 2 semplici tavole.

« I Commissarî ne propongono l' inserzione negli Atti accademici ».

Sulla resistenza elettrica dei miscugli delle amalgame liquide e sulle costanti fisiche dei miscugli di liquidi isomeri.

Memoria del dott. G. G. GEROSA

(Con una tavola).

Sulla resistenza elettrica dei miscugli delle amalgame liquide.

1. In correlazione ai risultati che per l' addietro ottenni nello *Studio sui miscugli delle soluzioni dei sali affini* (¹), risultati che altrove mi preoccuperò di generalizzare, qui riferirò i fatti presentatisi nella ricerca stabilita sulla resistenza elettrica dei miscugli delle amalgame liquide di *zinco*, *stagno* e *piombo*, nella fiducia che essi abbiano qualche interesse.

2. Le amalgame vennero formate nella proporzione di una quantità di Z_n, S_n e Pb corrispondente al peso molecolare in grammi, od a frazioni molto semplici di questo, dei rispettivi metalli, disciolta sempre in 10 000 grammi di mercurio (²).

Esse dapprincipio le preparavo fuori dell' aria, soffiando sulla parete di un tubo di vetro, chiuso ad un estremo, due bolle, nell'una delle quali ponevo il mercurio e nell' altra il metallo da discioglervi, e suggellando alla fiamma il tubo stesso, dopo avervi operata la rarefazione: il mercurio era quindi fatto passare dall' una bolla nell' altra. Ma trovai di poi che trascurabile affatto era la quantità d' ossido che si formava, ancorquando si operasse in presenza dell'aria, se, lasciato cadere sul mercurio, contenuto in una boccetta, il metallo da discioglervi e tappata bene la boccetta stessa, si aveva la cura di non agitare il liquido e la pazienza di aspettare due o tre giorni, perchè il metallo si diffondesse uniformemente nel mercurio.

I miscugli poi vennero preparati nello stesso modo che le amalgame semplici, disciogliendo nel mercurio i metalli a due o tre riuniti nelle opportune proporzioni, in modo che le soluzioni risultanti corrispondessero alle miscele che si sarebbero ottenute mescolando fra di loro a due a due ed a tre a tre le amalgame semplici dei diversi metalli e di un determinato titolo nelle proporzioni in peso corrispondenti a quel titolo stesso.

(¹) Rend. della r. Accad. dei Lincei; vol. II, fasc. 3°, 4°, 5°, 6° e 7°, 1886.

(²) I metalli puri, Zn, Sn e Pb, me li ha forniti il dott. Th. Schuchardt di Görlitz ed il mercurio l'ho purificato trattandolo dapprima con una soluzione satura di bicromato potassico, acidata con acido solforico, ed agitando di tratto in tratto la poltiglia per una settimana; di poi, sebbene fosse reso per tal via pulitissimo, lo lavai ripetutamente ancora, secondo l' usato, coll'acido nitrico diluito ed in seguito con molt'acqua, distillata appositamente sul permanganato di potassa. Infine venne con ogni cura essiccato.

Per i pesi molecolari dello Zn, Sn e Pb furono assunti rispettivamente i numeri 65, 118 e 207.

3. Il mercurio, di cui impiegai circa 130 grammi per ogni amalgama, ed i metalli, nelle debite proporzioni, vennero pesati sovra una bilancia, resa sensibile al decimo di milligrammo, e fu applicata ad ogni pesata la correzione rispetto alla sospinta dell'aria, ciascuna volta che tale correzione potesse variare la quinta cifra decimale. I pesi della scattola erano stati diligentemente corretti e riferiti al chilogrammo tipo in platino.

4. Per sottoporre le amalgame alla misura della resistenza elettrica seguii il metodo usato da Siemens per preparare un campione di resistenza mediante un cannello di mercurio. E per questo ho scelto un cannello capillare di vetro, di cui la lunghezza l_0 a 0° era di mm. 499,99 ed il rapporto a fra la massima e la minima sezione (determinato mediante la misura di una colonnina di mercurio di circa mm. 50 di lunghezza fatta scorrere lungo il cannello) di 1,0662. Le misure furono eseguite colla macchina divisoria, disponendo il cannello, per maggiore sicurezza, sovra un metro campione, diligentemente studiato dal sig. Carlini per commissione del prof. Belli.

Il cannello poi conteneva a 0° un peso p_0 di mercurio eguale a milligr. 1312,19, dedotto da cinque prove, ed aveva quindi un raggio r_0 di mm. 0,247. In seguito, a questo cannello, che si ruppe dopo la 43ª esperienza, venne surrogato un secondo, di cui le analoghe misure, pure accuratamente stabilite, erano

$$l_0 = 501{,}454 \text{ mm.}; \quad a = 1{,}0463\,; \quad p_0 = 1428{,}76 \text{ mgr.}; \quad r_0 = 0{,}258 \text{ mm.}$$

Alle due estremità del cannello vennero impegnati mediante tappi di gomma due tubi, piegati ad angolo retto, di ben 10 mm. di diametro, nell' uno dei quali era versata l'amalgama da studiare. Però questa, mentr' era versata dalla boccetta, ov' era stata preparata, entro il tubo, attraversava un breve cannellino capillare di vetro, applicato con un tappo alla boccetta stessa, per impedire con siffatta filtrazione che passasse nel tubo il legger velo d' ossido, che poteva essersi formato. Nello stesso tempo poi il versamento restava così regolato che, quando il liquido aveva vinto la resistenza capillare di entrata ed incominciava ad attraversare il cannello di misura, vi si muoveva sino alla fine con moto abbastanza lento ed uniforme. Per cui non mi occorse che una sola volta in tutte le esperienze di dover rifare il riempimento del cannello; imperocchè questo riuscì sempre perfettamente tenuto da una colonnina continua e speculare in ogni suo punto. Però il cannello per ogni esperienza veniva dapprima lavato cinque volte con acqua regia, di fresco preparata, spingendovene attraverso ben 25 cc. per ogni volta colla pressione di un' atmosfera, e di poi ripetutamente con molt' acqua distillata. Veniva infine asciugato col mandarvi attraverso per una buona mezz' ora, mentre era leggermente riscaldato, una corrente d' aria, la quale, prima di giungere al cannello, attraversava una serie di tubi d' essiccamento.

5. Nella determinazione della resistenza ho seguìto il metodo del galvanometro differenziale, usando dello squisito galvanometro Weber a riflessione, che già mi servì assai bene in un' altra ricerca, ov' ebbi bisogno di molta sensibilità (1).

La corrente era data da una pila Daniell di grande modello, preparata due giorni prima di essere usata e tenuta a circuito aperto. Dopo una settimana, da che era

(1) *Sulla variazione nella resistenza elettrica di un filo metallico in relazione ad alcuni disturbi provocati ne' suoi sistemi molecolari*. Nuovo Cimento; ser. 3ª, vol. XIV-XV, 1884.

impiegata, la pila veniva sostituita da un' altra, egualmente preparata. Così durante le esperienze il galvanometro deviò costantemente di circa 5 divisioni della scala per ogni millimetro di filo del reocordo introdotto od escluso dal circuito.

Nell' uno dei rami derivati del circuito era inserito il cannello di resistenza da esaminare mediante due cilindretti di rame, di 3,5 mm. di diametro, rivestiti di un inviluppo di paraffina verso le estremità, meno che per breve tratto ai capi, i quali erano perfettamente amalgamati e destinati a pescare, sempre nella stessa misura, da una banda nei tubi impegnati all' estremità del cannello di misura, dall' altra nei due bicchierini di mercurio, dei quali mi servivo per introdurre od escludere il cannello dal circuito. Il cannello poi, già pronto per l' esperienza, era riposto in una cassetta di latta, munita di gratta per lo scolo dell' acqua, e circondato, insieme coi tubi laterali, di ghiaccio fondente, nel quale, prima dell' esperienza, era lasciato non meno di un' ora.

Nell' altro ramo derivato del circuito erano inseriti alcuni rocchelli di resistenza ed un reocordo, munito di nonio. Il filo teso sul reocordo, fornitomi dal Breguet di Parigi, era di argentana e del diametro di 1 mm. Esso fu accuratamente calibrato di 5 in 5 cm. per più volte col metodo descritto da Rowland per la calibrazione dei termometri nel suo classico lavoro sull' equivalente meccanico del calore (¹) ed applicato dall' Ascoli alla calibrazione di un filo elettrico (²). Coi dati ho costruito la curva di correzione, nel modo pure suggerito dal Rowland ed usato dall'Ascoli, la quale risultò regolarissima, sebbene un millimetro del reocordo fosse rappresentato da un centimetro sulla carta millimetrata. Anche i rocchelli di resistenza erano di filo d'argentana (diametro 0,6 mm.), e me ne preparai quattro della lunghezza rispettiva di circa 10, 20, 40 e 50 centimetri.

6. Tanto del filo teso sul reocordo che dei rocchelli e dei due cilindretti di rame determinai con cura la resistenza mediante un campione d' unità Ohm, costruito dalla Casa Breguet, che confrontai poi coll' uno e l'altro cannello, preparati col mercurio. L'unità Ohm porta il coefficiente di resistenza per la temperatura 0,00044, cioè quello dell' argentana, e può essere posta in un bagno d'acqua. Per la temperatura del filo del reocordo e dei rocchelli disposi un termometro lungo il primo ed un altro frammezzo ai secondi.

Dalle misure risultò che la resistenza

dei due cilindretti di rame insieme equivaleva a			0,838	cm. del filo del reocordo a 0°,	
dell' unità Ohm-Breguet		„	290,262	„	„ ,
del rocchello di 10 cm. di filo		„	50,703	„	„ ,
„	20 „	„	101,885	„	„ ,
„	40 „	„	207,288	„	„ ,
„	50 „	„	262,238	„	„ ,

(¹) *On the Mechanical Equivalent of Heat with subsidary Researches on the variation of the Mercurial from the Air Thermometer, and on the variation of the specific Heat of Water.* Memoria presentata nel 1879 all'Accad. americana di scienze in Boston, cui lessi per la cortesia del prof. F. Rossetti.

(²) *Sopra un metodo per la calibrazione elettrica di un filo metallico.* Rend. della r. Accad. dei Lincei; vol. I, fasc. 7°, 1885.

Usando poi la relazione

$$(a) \qquad R = \frac{(l_0 + r_0)^2 d}{1000 p_0} \cdot \frac{1 + \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}}{3} \cdot \frac{1}{1,06},$$

dove d indica la densità del mercurio a 0°, per calcolare la resistenza a 0°, espressa in unità Ohm, dei cannelli di mercurio, si ha

per il primo cannello: $R_1 = 2,4473$,
e per il secondo: $R_2 = 2,2601$.

Ora l'esperienza diede pel 1° cannello una resistenza di 710,889 cm. del filo del reocordo a 0° e per il 2° quella di 655,594 cm., ossia

$$R_1 = \frac{710,889}{290,262} = 2,4491\,, \qquad R_2 = \frac{655,594}{290,262} = 2,2586 \quad \text{unità Ohm};$$

i quali valori differiscono assai poco da quelli calcolati, quando si consideri che per compensare la resistenza dei cannelli dovevano essere introdotti, insieme coll'unità Ohm, tre rocchelli almeno e parte del reocordo, e che pertanto vi sono qui riuniti gli errori d'esperienza di parecchie misure, nell'ipotesi eziandio che i valori numerici posti nella relazione (a) fossero tutti esatti.

7. Ed ora sono qui raccolti i risultati conseguiti:

Tavola A.

Amalgame	$Zn = \mu/4$; $Sn = \mu/8$; $Pb = \mu/8$			$Zn = \mu/2$; $Sn = \mu/4$; $Pb = \mu/4$			$Zn = \mu$; $Sn = \mu/2$; $Pb = \mu/2$		
	R_s	R_m	Δ	R_s	R_m	Δ	R_s	R_m	Δ
Hg Zn	16,490*(1)	—	—	33,940	—	—	63,934	—	—
Hg Sn	12,185*	—	—	25,148	—	—	38,095	—	—
Hg Pb	10,793*	—	—	21,247	—	—	33,184	—	—
Hg (Zn Sn)	14,330*	14,338	— 0,008	29,732	29,544	+ 0,188	54,752	51,015	3,737
Hg (Zn Pb)	13,279*	13,648	— 0,363	27,755	27,594	+ 0,161	51,973	48,559	3,414
Hg (Sn Pb)	11,219*	11,489	— 0,270	23,144	23,198	— 0,054	42,051	35,640	6,411
Hg (Zn Sn Pb)	12,859*	13,156	— 0,297	26,984	26,778	+ 0,206	49,519	45,071	4,449
Hg (Zn Sn Sn)	13,566*	13,620	— 0,054	28,282	28,079	+ 0,203	50,999	46,708	4,291
Hg (Sn Sn Pb)	11,394*	11,721	— 0,327	23,797	23,848	— 0,051	42,490	36,438	6,052
Hg (Sn Pb Pb)	10,859*	11,257	— 0,398	22,514	22,547	— 0,033	40,434	34,821	5,613

(1) I numeri che portano un asterisco si riferiscono al 2° cannello e tutti gli altri al 1°.

TAVOLA B.

Amalgame	Zn=$\mu/2$; Sn=$\mu/2$; Pb=$\mu/2$			Zn=$3/2\mu$; Sn=$3/4\mu$; Pb=$3/4\mu$			Zn=μ ; Sn=μ ; Pb=μ		
	R_s	R_m	Δ	R_s	R_m	Δ	R_s	R_m	Δ
Hg Zn	33,940	—	—	89,962	—	—	63,934	—	—
Hg Sn	38,095	—	—	46,421**(1)	—	—	54,880**	—	—
HgPb	33,184	—	—	39,727	—	—	43,435**	—	—
Hg (Zn Sn)	40,417	36,018	4,399	76,490	68,192	8,298	68,797	59,407	9,390
Hg (Zn Pb)	33,950	33,562	0,388	72,187	64,846	7,341	65,920	53,685	12,235
Hg (Sn Pb)	42,051	35,640	6,411	57,744	43,074	14,670	71,525	49,158	22,367
Hg (ZnSnPb)	39,840	35,073	4,767	67,911	58,703	9,208	70,399	54,083	16,316
Hg(Zn Sn Sn)	42,184	36,710	5,474	68,276	60,935	7,341	—	—	—
Hg (SnSn Pb)	42,490	36,458	6,032	56,784	44,190	12,594	—	—	—
Hg(SnPb Pb)	40,434	34,821	5,613	56,397	41,958	14,439	—	—	—
Hg(Zn Zn Sn)	37,729	35,358	2,371	—	—	—	—	—	—
Hg(ZnZn Pb)	36,083	33,721	2,362	—	—	—	—	—	—
Hg(ZnPb Pb)	37,379	33,436	3,943	—	—	—	—	—	—

dove $\mu/8$, $\mu/4$, ecc., indicano le frazioni del peso molecolare μ in grammi, che del rispettivo metallo vennero disciolte in 10000 grammi di mercurio, ed i numeri R_s della colonna sottoposta dànno le differenze in centimetri del filo del reocordo a 0° fra la resistenza del mercurio e quella delle relative amalgame, segnate nella prima colonna, essendo tale resistenza misurata sempre collo stesso cannello.

I valori poi di R_m, corrispondenti alle amalgame complesse, rappresentano la media aritmetica dei valori R_s delle relative amalgame semplici, onde le complesse sono formate.

8. Ma innanzi di prendere in esame questi numeri, conviene ricordare come Matthiessen e Vogt (2), in seguito alla loro ricerca sulla conducibilità delle amalgame, stabilissero la regola, *che la conducibilità del mercurio, quand' esso è in lega con un altro metallo, che non sia lo zinco, l' argento o l' oro, è maggiore o minore di quella che corrisponde al valor medio delle conducibilità dei relativi volumi dei metalli associati, secondo che il mercurio sia in lega con piccole o con grandi quantità dell' altro metallo;* imperocchè ottenevano, ad es., i seguenti risultati per la conducibilità a 13° delle amalgame di Zn, Sn e Pb, riferita a quella della lega argento-oro, presa come 100 alla temperatura di 0° (3):

(1) I numeri con due asterischi sono dedotti dalle curve grafiche, come più innanzi è riferito.
(2) Poggendorff's Ann.; vol. CXVI, p. 369, 1862.
(3) Poggendorff's Ann.: vol. CXII, p. 353, 1861.

Peso del metallo su 100 di Hg	Zinco			Stagno			Piombo		
	vol. del met. su 100 di Hg	conduc. osserv.	conduc. calcol.	vol. del met. su 100 di Hg	conduc. osserv.	conduc. calcol.	vol. del met. su 100 di Hg	conduc. osserv.	conduc. calcol.
0,010	0,0190	10,9290	10,943	0,0186	10,9295	10,922	0,0119	10,9185	10,915
0,025	0,0474	10,9507	10,992	0,0465	10,9455	10,941	0,0298	10,9285	10,922
0,050	0,0948	10,992	11,075	0,093	10,9775	10,973	0,0596	10,9440	10,935
0,100	0,189	11,077	11,238	0,186	11,0415	11,036	0,119	10,9720	10,960
0,200	0,378	11,235	11,564	0,371	11,1710	11,161	0,238	11,0375	11,009
0,500	0,94	11,696	12,538	0,922	11,5285	11,533	0,593	11,222	11,157
1,000	1,86	12,450	14,131	1,83	11,792	12,147	1,18	11,495	11,402
2,000	3,66	13,566	17,247	3,59	12,318	13,335	2,33	11,705	11,882
3,000	7,06	14,658	23,133	6,93	13,167	15,595	4,55	11,873	12,809

Però è chiaro come questa regola abbia poco valore, non solo perchè tre sopra sei dei metalli sottoposti ad esame da Matthiessen e Vogt fanno eccezione, ma altresì per il fatto che, ad es., le quantità di stagno e di piombo, corrispondenti rispettivamente a 0,4 e ad 1,6 per 100 di mercurio, dovrebbero ascriversi fra le *piccole* quantità, per ascriversi poi fra le *grandi* quantità quelle di 0,5 e di 1,7 rispettivamente. Ed inoltre il valor medio della conducibilità dei *volumi* relativi dei metalli allegati, dato dalla relazione

$$\frac{100.c + p\frac{d}{\Delta}c'}{100 \quad + p\frac{d}{\Delta}} \qquad (^1)\begin{cases} c \text{ e } c' \text{ conducibilità del mercurio e del metallo allegato,} \\ \Delta \text{ e } d \text{ rispettive densità,} \\ p \text{ peso in grammi del metallo per 100 di mercurio,} \end{cases}$$

non tiene conto della variazione di volume che accompagna la formazione delle amalgame; e per questo i valori della conducibilità *osservata* e *calcolata* sopra riferiti non possono, a tutto rigore, essere confrontabili.

Consideriamo in luogo della tabella precedente quest' altra.

Tavola C.

Peso del met. su 100 di Hg	Zinco		Stagno		Piombo	
	resist. osser.	resist. calc.	resist. osser.	resist. calc.	resist. osser.	resist. calc.
0,010	0,9983	0,9999	0,9983	0,9999	0,9993	0,9999
0,025	0,9963	0,9997	0,9968	0,9998	0,9983	0,9998
0,050	0,9925	0,9995	0,9939	0,9996	0,9969	0,9996
0,100	0,9849	0,9991	0,9881	0,9991	0,9943	0,9992
0,200	0,9711	0,9981	0,9736	0,9983	0,9885	0,9980
0,500	0,9328	0,9953	0,9464	0,9957	0,9722	0,9960
1,000	0,8763	0,9907	0,9252	0,9915	0,9491	0,9921
2,000	0,8042	0,9815	0,8857	0,9831	0,9321	0,9844
4,000	0,7483	0,9638	0,8286	0,9669	0,9189	0,9695

(1) Matthiessen e Vogt ritennero per la conducibilità a 13° del Hg, Zn, Sn e Pb (sempre riferita alla lega di argento ed oro) rispettivamente i valori 10, 910; 184, 064; 78, 507; 52, 640, e per le relative densità i valori 13, 573; 7, 148; 11, 376; 11, 376.

dove sono scritti i valori *osservati* della resistenza a 13° delle amalgame (presa come unità di resistenza quella del mercurio a 13°), dedotti per mezzo del rapporto dei valori di c a c' surriferiti, e quelli *calcolati* colla media aritmetica $\frac{100+pr}{100+p}$ delle resistenze a 13° (1) dei *pesi* dei rispettivi metalli, ond' è formata l' amalgama.

Si rileva subito che, non solo, com' era in parte prevedibile, a cagione della variazione di volume che accompagna la formazione dell' amalgama, i valori *osservati* sono in ogni caso più piccoli dei corrispondenti valori *calcolati*, e tanto più piccoli quanto più ricca è l' amalgama; ma che altresì, se vogliamo formulare una regola generale, *la resistenza del mercurio, quand' esso si allega a piccole quantità di un altro metallo, non eccedenti la metà circa di quella che rende saturo il mercurio a 0°, varia molto più rapidamente che non quando esso si allega con quantità più grandi; e per quelle piccole quantità la variazione della resistenza si può senz' altro ritenere proporzionale alle quantità stesse: tale proporzionalità poi, sebbene con minore approssimazione, ha luogo ancora per le quantità superiori a quella che rende satura l' amalgama a 0°; mentre per le quantità intermedie a queste due la variazione è fatta per gradi non costanti, più o meno rapidi a seconda del metallo allegato* (2).

Tali risultati sono poi confermati dai valori che ottenni per la resistenza a 0° delle amalgame sopra indicate (riferita a quella a 0° del mercurio), dedotti dalle esperienze riportate nelle tavole A e B e qui sotto ricordati sotto forma più opportuna (3):

Tavola D.

Frazione del peso molec. del metallo su 10000 di Hg	Zinco			Stagno			Piombo		
	Peso del met. su 100 di Hg	resist. osserv.	resist. calcol.	Peso del met. su 100 di Hg	resist. osserv.	resist. calcol.	Peso del met. su 100 di Hg	resist. osserv.	resist. calcol.
$\mu/8$	—	—	—	0,1475	0,9814	0,9987	0,25875	0,9835	0,9979
$\mu/4$	0,1625	0,9748	0,9985	0,295	0,9646	0,9974	0,5175	0,9701	0,9959
$\mu/2$	0,3250	0,9523	0,9969	0,590	0,9464	0,9949	1,0350	0,9533	0,9918
$3/4\,\mu$	—	—	—	0,885	0,9347	0,9924	1,5525	0,9441	0,9877
μ	0,650	0,9101	0,9939	1,18	0,9228	0,9890	2,07	0,9380	0,9838
$3/2\,\mu$	0,975	0,8734	0,9909	—	—	—	—	—	—

E tutto questo appar chiaro dalle curve grafiche (vedasi la tav. I), dove le *linee rette* rappresentano i valori calcolati e le *curve continue* i valori *osservati* della

(1) La resistenza r a 13° dello Zn, Sn e Pb, riferita a quella del Hg a 13° e calcolata sui valori di conducibilità addietro citati, è rispettivamente di 0,0593; 0,139; 0,207.

(2) Le soluzioni sature a 0° contengono sopra 100 parti di Hg circa 1,50; 0,63; 1,55 di Zn, Sn e P*b* rispettivamente.

(3) Si ritenne per la resistenza a 0° dello Zn, Sn e Pb, riferita a quella a 0° del Hg, rispettivamente i valori 0,0571; 0,134 e 0,199.

tabella C. Le *curve tratteggiate* poi rappresentano i valori *osservati* della tabella D; dalle quali, prolungate quanto le continue, seguendo l' andamento di quest' ultime, furono dedotti i tre numeri che nella tabella B sono contrassegnati con due asterischi; imperocchè a definirli sperimentalmente si richiedevano disposizioni ed operazioni speciali nella ricerca, stante che le amalgame per quelle proporzioni di S_n e di Pb sono più che sature a 0°. Ed il dover saldare i tubi laterali al cannello di misura, affine di potervi col riscaldamento fluidificare completamente l' amalgama mi avrebbe impedito di calcolare la resistenza del cannello ripieno di mercurio e mi avrebbe lasciato un dubbio sulla variazione di grandezza del cannello per il riscaldamento; mentre poi, per lo scopo della presente ricerca, la conoscenza di quei tre numeri non è affatto necessaria; massime che m' ero proposto di esaminare il contegno delle amalgame perfettamente fluide; dacchè, come mostrò C. L. Weber [1], la presenza dei cristallini metallici, non disciolti nell' amalgama, ha una speciale influenza sulla resistenza.

9. Prendiamo ora in esame i miscugli, e confrontiamo i valori *osservati* della loro resistenza a 0° coi valori *calcolati* mediante la media aritmetica delle resistenze dei relativi *pesi* dei metalli associati, com' è qui sotto scritto:

Qui poi riferisco anche per gli altri tre metalli, studiati da Matthiessen e Vogt, che sono il *bismuto*, l'*oro* e l'*argento*, una tabella analoga alla C, che fu pure calcolata sui valori della conducibilità elettrica a 13° dati da Matthiessen e Vogt, dai quali si ricava per la resistenza a 13° (riferita a quella del mercurio a 13°) del Bi, dell' Au e dell' Ag rispettivamente i numeri 1,3784; 0,022055 e 0,017227:

Peso del met. su 100 di Hg	Bismuto			Oro			Argento		
	resist. osserv.	resist. calcol.	differenza	resist. osserv.	resist. calcol.	differenza	resist. osserv.	resist. calcol.	differenza
0,010	—	—	—	0,99936	0,99990	0,00054	0,99918	0,99990	0,00072
0,025	—	—	—	0,99808	0,99976	0,00168	0,99849	0,99975	0,00126
0,050	0,99799	1,00019	0,00220	0,99667	0,99951	0,00284	0,99653	0,99951	0,00298
0,100	0,99667	1,00038	0,00371	0,99385	0,99902	0,00517	0,99326	0,99902	0,00576
0,200	0,99376	1,00076	0,00700	0,98899	0,99805	0,00906	0,98751	0,99804	0,01053
0,500	0,98604	1,00188	0,01584	0,96357	0,99513	0,03156	0,97411	0,99511	0,02100
1,000	0,97415	1,00375	0,02960	0,94284	0,99032	0,04748	0,94324	0,99027	0,04703

[1] *Ueber galvanische Leitungsfähigkeit und thermoelectrische Stellung von Amalgamen im Zusammenhang mit der Veränderlichkeit der Structur.* Pogg. Ann. N. F.; vol. XXIII, p. 447, 1884.

Amalgame	$Zn=\mu/4$; $Sn=\mu/8$; $Pb=\mu/8$			$Zn=\mu/2$; $Sn=\mu/4$; $Pb=\mu/4$		
	π	resist. osserv.	resist. calcol.	π	resist. osserv.	resist. calcol.
Hg (Zn Sn)	0,1544	0,9781	0,9972	0,3099	0,9582	0,9944
Hg (Zn Pb)	0,2108	0,9797	0,9964	0,4221	0,9610	0,9928
Hg (SnPb)	0,2027	0,9829	0,9967	0,4066	0,9674	0,9933
Hg (Zn Sn Pb)	0,1893	0,9804	0,9951	0,3797	0,9620	0,9903
Hg (Zn Sn Sn)	0,1518	0,9795	0,9959	0,3049	0,9603	0,9919
Hg (Sn Sn Pb)	0,1840	0,9824	0,9954	0,3695	0,9673	0,9908
Hg (Sn Pb Pb)	0,2214	0,9834	0,9943	0,4436	0,9686	0,9887

Amalgame	$Zn=\mu$; $Sn=\mu/2$; $Pb=\mu/2$			$Zn=3/2\,\mu$; $Sn=3/4\,\mu$; $Pb=3/4\,\mu$		
	π	resist. osserv.	resist. calcol.	π	resist. osserv.	resist. calcol.
Hg (Zn Sn)	0,6194	0,9230	0,9889	0,9285	0,8924	0,9834
Hg (Zn Pb)	0,8470	0,9290	0,9858	1,2750	0,8985	0,9789
Hg (Sn Pb)	0,8133	0,9408	0,9868	1,2204	0,9188	0,9804
Hg (Zn Sn Pb)	0,7604	0,9303	0,9809	1,1425	0,9045	0,9717
Hg (Zn Sn Sn)	0,6095	0,9283	0,9839	0,9137	0,9040	0,9761
Hg (Sn Sn Pb)	0,7390	0,9402	0,9819	1,1090	0,9201	0,9731
Hg (Sn Pb Pb)	0,8874	0,9431	0,9777	1,3315	0,9207	0,9670

Si ha che i valori *osservati* sono in ogni caso inferiori ai valori *calcolati*, e le differenze si conservano proporzionali alle quantità in peso dei metalli disciolti, finchè queste quantità sono piccole: di poi vengono crescendo con un rapporto viemmeno rapido di quello dei pesi, appunto come avveniva delle amalgame semplici; se non che qui l' andamento delle curve è molto più regolare, come si può vedere nella figura della tav. II, dove le ascisse rappresentano le quantità in peso dei metalli costituenti l' amalgama, calcolate colla relazione

$$\pi = \frac{pr + p_1 r_1 + p_2 r_2 + \cdots\cdots}{r + r_1 + r_2 + \cdots\cdots},$$

ossia colla media aritmetica dei pesi delle rispettive resistenze dei metalli allegati.

E regolarissime pure si presentano le curve rappresentative delle resistenze delle amalgame complesse, ancorquando si assuma per ascisse le frazioni del peso molecolare μ dei metalli in lega col mercurio, sebbene per le amalgame semplici l' andamento delle curve sia in tal caso abbastanza diverso da amalgama ad amalgama e meno regolare.

10. Ma, se fermiamo ancora l' attenzione sui numeri riferiti nelle tabelle A e B, si notano due fatti interessanti rispetto al modo di comportarsi delle resistenze elettriche dei miscugli delle amalgame.

E il primo è che le differenze $\varDelta$, colà scritte, fra la resistenza R_s delle amalgame

complesse e quella R_m, dedotta colla media aritmetica delle resistenze delle amalgame semplici, onde la complessa è formata, sono tutte negative ed abbastanza piccole, quando le quantità in peso dello Zn, Sn e Pb allegate al mercurio sono rispettivamente $^1/_4$, $^1/_8$ ed $^1/_8$ dei loro pesi molecolari: tali differenze poi sono più piccole ancora delle precedenti ed in parte positive, in parte negative, quando le amalgame contengono rispettivamente $^1/_2$, $^1/_4$ ed $^1/_4$ del peso molecolare dello Zn, Sn e Pb; mentre per proporzioni più grandi di quest' ultime si presentano tutte con valori positivi, che vengono sempre più crescendo col crescere delle quantità in peso dei metalli e con una legge più rapida di queste stesse quantità.

Per cui se diciamo *corrispondenti* quelle amalgame semplici, che sono formate col disciogliere una quantità tale del peso molecolare dei rispettivi metalli liberi in una medesima quantità di mercurio, eguale per tutte, per modo che le costanti fisiche dei loro miscugli, ottenuti con parti aliquote delle amalgame stesse, presentino lo stesso valore che la media aritmetica dei valori analoghi delle amalgame semplici, onde il miscuglio è costituito, possiamo dire che per la resistenza elettrica a 0° sono *corrispondenti* le amalgame

$$(Hg)_{100\mu}\ (Zn)_{\mu}\ ;\quad (Hg)_{100\mu}\ (Sn)_{^1/_2\mu}\ ;\quad (Hg)_{100\mu}\ (Pb)_{^1/_2\mu}\ .$$

E resta dimostrato insieme che, se più amalgame sono *corrispondenti* rispetto ai loro miscugli binarî, lo sono altresì rispetto ai miscugli più complessi; e la proprietà ha luogo ancorquando una stessa amalgama entri più di una volta colla propria parte aliquota in un dato miscuglio.

Ad assicurarmi poi che per lo Zn, Sn e Pb sono quelle le amalgame *corrispondenti* ho esaminato queste altre amalgame, formate con tutte le rimanenti combinazioni, più sopra non riferite, di $^1/_4$ ed $^1/_2$ del peso molecolare dei metalli, le quali evidentemente non presentano il carattere della *corrispondenza*:

$Hg\ (Zn)_{\mu/4} = 15{,}825$
$Hg\ (Sn)_{\mu/4} = 25{,}148$
media $= 20{,}487$
$Hg(Zn\,Sn)_{\mu/4} = 19{,}803$
$\varDelta = 0{,}684$

$Hg\ (Zn)_{\mu/4} = 15{,}825$
$Hg\ (Sn)_{\mu/2} = 38{,}095$
media $= 26{,}960$
$Hg\,\{(Zn)_{\mu/4} + (Sn)_{\mu/2}\} = 29{,}836$
$\varDelta = 2{,}876$

$Hg\ (Zn)_{\mu/4} = 15{,}825$
$Hg\ (Pb)_{\mu/4} = 21{,}247$
media $= 18{,}536$
$Hg(Zn\,Pb)_{\mu/4} = 15{,}552$
$\varDelta = 2{,}984$

$Hg\ (Zn)_{\mu/4} = 15{,}825$
$Hg\ (Pb)_{\mu/2} = 33{,}184$
media $= 24{,}505$
$Hg\,\{(Zn)_{\mu/4} + (Pb)_{\mu/2}\} = 26{,}649$
$\varDelta = 2{,}144$

$Hg\ (Sn)_{\mu/4} = 25{,}148$
$Hg\ (Pb)_{\mu/2} = 33{,}184$
media $= 29{,}166$
$Hg\,\{(Sn)_{\mu/4} + (Pb)_{\mu/2}\} = 29{,}330$
$\varDelta = 0{,}164$

$Hg\ (Sn)_{\mu/2} = 38{,}095$
$Hg\ (Pb)_{\mu/4} = 21{,}247$
media $= 29{,}671$
$Hg\,\{(Sn)_{\mu/2} + (Pb)_{\mu/4}\} = 34{,}313$
$\varDelta = 4{,}642$

11. In secondo luogo, come pei miscugli delle soluzioni dei sali affini, così anche per i miscugli delle amalgame si verifica con sufficiente approssimazione che *le variazioni nella resistenza elettrica, cui un' amalgama produce in altre due, differiscono fra di loro di una grandezza eguale alla variazione che quest'altre due producono l'una sull'altra; e quelle, che due amalgame determinano sovra una terza differiscono fra di loro di una grandezza eguale alla variazione che le due amalgame determinano fra di loro, l' una sull' altra*, come appare dai seguenti esempî:

	$Zn^{\mu/4}\,Sn^{\mu/8}\,Pb^{\mu/8}$	$Zn^{\mu/2}\,Sn^{\mu/4}\,Pb^{\mu/4}$
$r_1 - r_{13}$	= 3,211	= 6,185
$r_1 - r_{12}$	= 2,160	= 4,208
diff.	= 1,051	= 1,977
$r_2 - r_{23}$	= 0,966	= 2,004

cui vanno uniti quest' altri, che ne sono conseguenze immediate:

$$(r_1 - r_{13}) - (r_2 - r_{23}) = r_1 - r_{12}\ ,$$
$$(r_{13} - r_3) - (r_{23} - r_3) = r_{12} - r_2\ ,$$
$$(r_{13} - r_3) - (r_{12} - r_2) = r_{23} - r_3\ ,$$

dove gli indici 1, 2, 3 si riferiscono rispettivamente allo Z_n, S_n e Pb.

Però la regola ha luogo soltanto per le amalgame formate con $^1/_4$, $^1/_8$ ed $^1/_8$ e con $^1/_2$, $^1/_4$ ed $^1/_4$ del peso molecolare dello Zn, Sn, e Pb rispettivamente, e per quantità in peso più grandi, come 1, $^1/_2$ ed $^1/_2$, non si verifica più.

E per queste amalgame si verifica altresì l'altra regola, incontrata nello studio dei miscugli delle soluzioni dei sali affini, che *la variazione prodotta da un' amalgama sul miscuglio di altre due è uguale ad un terzo della somma delle variazioni che questa amalgama determina separatamente sulle altre due del miscuglio.* E la regola vale ancorquando l' amalgama da unirsi al miscuglio sia eguale ad una delle due amalgame del miscuglio stesso.

Difatti questo risulta dai seguenti esempî:

	$Zn^{\mu/4}\,Sn^{\mu/8}\,Pb^{\mu/8}$	$Zn^{\mu/2}\,Sn^{\mu/4}\,Pb^{\mu/4}$		$Zn^{\mu/4}\,Sn^{\mu/8}\,Pb^{\mu/8}$	$Zn^{\mu/2}\,Sn^{\mu/4}\,Pb^{\mu/4}$
$r_{12} - r_{123}$	=1,471	=2,748 ;	$\frac{1}{3}\{(r_1 - r_{13}) + (r_2 - r_{23})\}$	=1,392	=2,730
$r_{13} - r_{123}$	=0,500	=0,771 ;	$\frac{1}{3}\{(r_1 - r_{12}) + (r_{23} - r_3)\}$	=0,578	=0,770
$r_{123} - r_{23}$	=1,650	=3,793 ;	$\frac{1}{3}\{(r_{12} - r_2) + (r_{13} - r_3)\}$	=1,544	=3,697
$r_{12} - r_{122}$	=0,774	=1,450 ;	$\frac{1}{3}\{(r_1 - r_{12}) + (r_2 - r_2)\}$	=0,720	=1,403
$r_{223} - r_{23}$	=0,175	=0,606 ;	$\frac{1}{3}\{(r_{23} - r_3) + (r_2 - r_2)\}$	=0,142	=0,648
$r_{23} - r_{233}$	=0,360	=0,677 ;	$\frac{1}{3}\{(r_2 - r_{23}) + (r_3 - r_3)\}$	=0,322	=0,652

Per cui, posto che la regola, come per i miscuglî delle soluzioni dei sali affini, continui ad aver luogo anche per i miscugli più complessi, se diciamo K_{pq} un coefficiente definito, come il coefficiente di contrazione delle soluzioni saline, dalla relazione:

$$K_{pq} = \frac{r_{pq}}{\frac{1}{2}(r_p + r_q)} - 1\,,$$

possiamo compendiare i fatti discorsi nel presente num. 11 colla relazione [1]

$$\text{(I)} \quad r_{12\cdots n} = \frac{1}{n}\sum_1^n r + \frac{\frac{1}{2}(r_1+r_2)k_{12}}{1} + \frac{\frac{1}{2}(r_1+r_3)k_{13}+\frac{1}{2}(r_2+r_3)k_{23}}{1+2} + \cdots\cdots$$
$$+ \frac{\frac{1}{2}(r_1+r_n)k_{1n}+\frac{1}{2}(r_2+r_n)k_{2n}+\cdots\cdots+\frac{1}{2}(r_{n-1}+r_n)k_{n-1n}}{1+2+\cdots\cdots+n-1}\,;$$

la quale permette di calcolare la resistenza di un miscuglio d' ordine qualunque colla sola conoscenza delle resistenze delle amalgame semplici e dei coefficienti k dei loro miscugli binarî.

12. Cosicchè, riassumendo le cose sovraesposte, possiamo dire che:

1. I metalli in lega col mercurio ne diminuiscono sempre la resistenza, nel senso che la resistenza dell' amalgama è sempre inferiore alla media aritmetica delle resistenze dei relativi pesi dei metalli associati, e:

a) *con molta rapidità e proporzionalmente alla loro quantità disciolta, fino a che questa non eccede la metà circa di quella che rende satura a* 0° *l'amalgama;*

b) *per gradi non costanti, ma sempre meno rapidi fino al punto di saturazione;*

c) *con minore rapidità del primo caso, ma presso che ancora proporzionalmente alla quantità del metallo allegato, quando l'amalgama è più che satura.* Cosicchè il metallo allo stato perfettamente solido e fluido determina variazioni di resistenza nel mercurio che sono proporzionali alle quantità in peso; nel primo caso però sono molto più piccole che non nel secondo:

2. *Dei diversi metalli vi sono proporzioni tali, espresse da frazioni molte semplici dei loro pesi molecolari, che, disciolte in un' eguale e determinata quantità di mercurio, dànno amalgame corrispondenti:*

3. *Per i miscugli delle amalgame, formate colle piccole quantità dei metalli allegati, ha luogo la relazione* (I) *del num. 11.*

Sulle costanti fisiche dei miscugli di liquidi isomeri.

1. Per riguardo alle relazioni che possono verificarsi fra le proprietà fisiche di determinati liquidi e quelle dei loro miscugli, sembra a priori che molto istruttivo dovesse essere lo studio di paragone fra i valori delle costanti fisiche di *liquidi isomeri* e quelli delle costanti analoghe dei loro miscugli.

Per questo coi tre liquidi isomeri, l' *aldeide propilica* (C_2H_5—COH), l'*alcole allilico* (C_3H_5—OH) e l'*acetone acetica* (CH_3—CO—CH_3), appartenenti a tre famiglie

[1] Vedasi il lavoro precitato sullo *Studio dei miscugli delle soluzioni dei sali affini.*

di corpi ben distinti nella chimica organica, mi preparai i tre miscugli binarî ed il ternario, formati con volumi eguali alla temperatura di 0°, e tanto dei liquidi primitivi che dei loro miscugli determinai il *peso specifico relativo* a 0°, il *coefficiente medio di dilatazione fra* 0° *e* 25° e l'*indice di rifrazione* alla temperatura di 4°,5 (¹).

2. Per misurare dei liquidi volumi esattamente eguali alla temperatura di 0° mi servii di una pipetta di vetro della capacità di circa 25^{cc} la quale era munita di rubinetto ad un estremo e di un imbutino chiuso con tappo a smeriglio all'altro, ed aveva in due punti del cannello, l'uno posto sopra e l'altro sotto il serbatojo, due strozzature, le quali nel punto di minima sezione recavano un tratto a lima, che serviva di punto di riferimento. La pipetta, ripiena del liquido da misurarsi, era disposta in un vaso conico di latta, che era rivolto colla base in alto, ed era munito di un foro al vertice, nel quale, mediante un tappo di gomma, veniva serrata la pipetta in modo che appena emergesse fuori al di sotto del vaso la strangolatura inferiore. Il vaso veniva riempito di ghiaccio fondente così da circondare tutta la pipetta fino al di sopra della strangolatura superiore, e l'acqua di scolo era recata fuori del vaso mediante un tubo di vetro che era impegnato nello stesso tappo che teneva la pipetta.

Dopo un' ora circa da che la pipetta era nel ghiaccio fondente si lasciava uscire, mediante il rubinetto, il liquido fino a che il suo livello fosse tangente alla prima intaccatura, e si raccoglieva in una boccetta a parte quello che effluiva fino a che il livello discendesse al secondo punto di riferimento, dove si attendeva tanto tempo quant' era richiesto perchè lo scolo del liquido lungo le pareti della pipetta fosse cessato ed il livello si mantenesse fisso a questo secondo punto di riferimento.

3. Per la determinazione del peso specifico a 0° e del coefficiente di dilatazione fra 0° e 25° ho scelto quattro dilatometri che erano costituiti della stessa qualità di vetro ed avevano una capacità di circa $35^{cc.}$, non potendo disporre di una quantità maggiore di liquido.

Per uno di essi, scelto a sorte, venne determinato il coefficiente di dilatazione fra 0° e 25°, che risultò di 0,00002881 e che fu ritenuto comune anche agli altri.

Le pesate furono eseguite col metodo della tara (costituita da un dilatometro simile ai precedenti e ripieno d' alcole etilico) e con una bilancia portata alla sensibilità di $\frac{1}{5}$ di milligr. Il valore dei pesi aggiuntivi (i quali appartenevano alla scattola di cui i pezzi erano stati corretti e riferiti al chilogrammo tipo in platino), sebbene piccolo, fu sempre corretto rispetto alla sospinta dell'aria.

La temperatura era data dal termometro Baudin n. 7248, che fu paragonato nell' intervallo fra 0° e 40° col termometro ad aria, disponendo per tale confronto l' esperienza nel modo descritto da Rowland nel suo lavoro, addietro ricordato, sull' equivalente meccanico del calore (²).

Il vaso poi, nel quale erano tenuti i dilatometri per portarli alla temperatura di 25°, conteneva circa 15 litri d'acqua ed era a doppia parete. Un agitatore rimuoveva continuamente l'acqua, che riescì facilissimo, mediante una lampada Berzelius, di mantenere per lungo tempo a temperatura costante; imperocchè la temperatura

(¹) I liquidi furono preparati, siccome purissimi, dalla Casa Trommsdorff.

(²) Proceedings of the American Academy of arts and science; Cambridge, 1880.

dell' ambiente non era inferiore che di un pajo di gradi a quella del bagno, che dallo strato d'aria rinchiusa nell'intercapedine del vaso era difeso assai dalle influenze esterne.

4. L'indice di rifrazione fu determinato col buon spettrometro di Lang, che mi servì nello studio sopra citato dei miscugli delle soluzioni dei sali affini, e qui, come là, seguii lo stesso metodo di misura e lo stesso processo di ricerca.

5. Ora i risultati che ottenni sono questi qui sotto:

	d	d_m	diff.	100 α	101 α_m	diff.	ν	ν_m	diff.
Aldeide	0,8973	—	—	0,18893	—	—	1,3933	—	—
Alcole	0,8756	—	—	0,10252	—	—	1,4183	—	—
Acetone	0,8229	—	—	0,14024	—	—	1,3683	—	—
Ald. - Alc.	0,9273	0,8864	0,0409	0,17067	0,14572	0,02495	1,4226	1,4058	0,0168
Ald. - Acet.	0,8592	0,8601	— 0,0009	0,15028	0,16458	— 0,01430	1 3796	1,3808	—0,0012
Alc. - Acet.	0,8512	0,8492	0,0020	0,11815	0,12138	— 0,01323	1,3956	1,3933	0,0023
Ald. - Alc. - Acet.	0,8890	0,8653	0,0237	0,16344	0,14390	0,01954	1,4036	1,3933	0,0103

dove i valori di d, α e ν rappresentano rispettivamente il peso specifico relativo a 0°, il coefficiente di dilatazione fra 0° e 25° e l' indice di rifrazione a 4°,5, *dati dall'esperienza*, e quelli di d_m, α_m e ν_m le stesse costanti per i miscugli, *calcolate* colla media aritmetica dei valori analoghi dei liquidi primitivi.

Ebbene, contro l' aspettazione, questi risultati non lasciano intravedere alcuna relazione interessante che li colleghi.

Mi sarei aspettato che i liquidi isomeri fossero fra di loro *corrispondenti*; mentre. come appare evidente dai numeri surriportati, non solo non si verifica alcuna relazione di grandezza, che leghi le costanti fisiche dei liquidi stessi a quelle dei loro miscugli, ma neppure alcuna conformità nell' andamento generale. Anzi si presenta il fatto singolare di un aumento di volume nella formazione del miscuglio *aldeide-acetone*; e mentre in tal caso, come vuole la regola generale, l' indice di rifrazione del miscuglio è più piccolo di quello calcolato colla media aritmetica degli indici dei liquidi isomeri ond' è composto, non sempre avviene che a miscugli più densi corrispondano indici di rifrazione più grandi; imperocchè, ad es., mentre il valore di d del miscuglio *aldeide-acetone* è più grande di quello del miscuglio *alcole-acetone*, il valore di ν del primo è più piccolo di quello del secondo miscuglio. E così il coefficiente di dilatazione, mentre pei miscugli è tanto più grande quanto più grande è la densità loro, per l'*alcole* invece è più piccolo che per l'*acetone*, sebbene l'*alcole* sia più denso dell'*acetone*, come si rileva dal confronto dei valori di d e 100α, e per i miscugli ancora si presenta poi ora maggiore ed ora minore, senza alcuna regola, del valor medio dei coefficienti di dilatazione dei liquidi primitivi, di cui i miscugli sono formati, come corre tosto all' occhio nell' esame dei valori 100α e $100\alpha_m$.

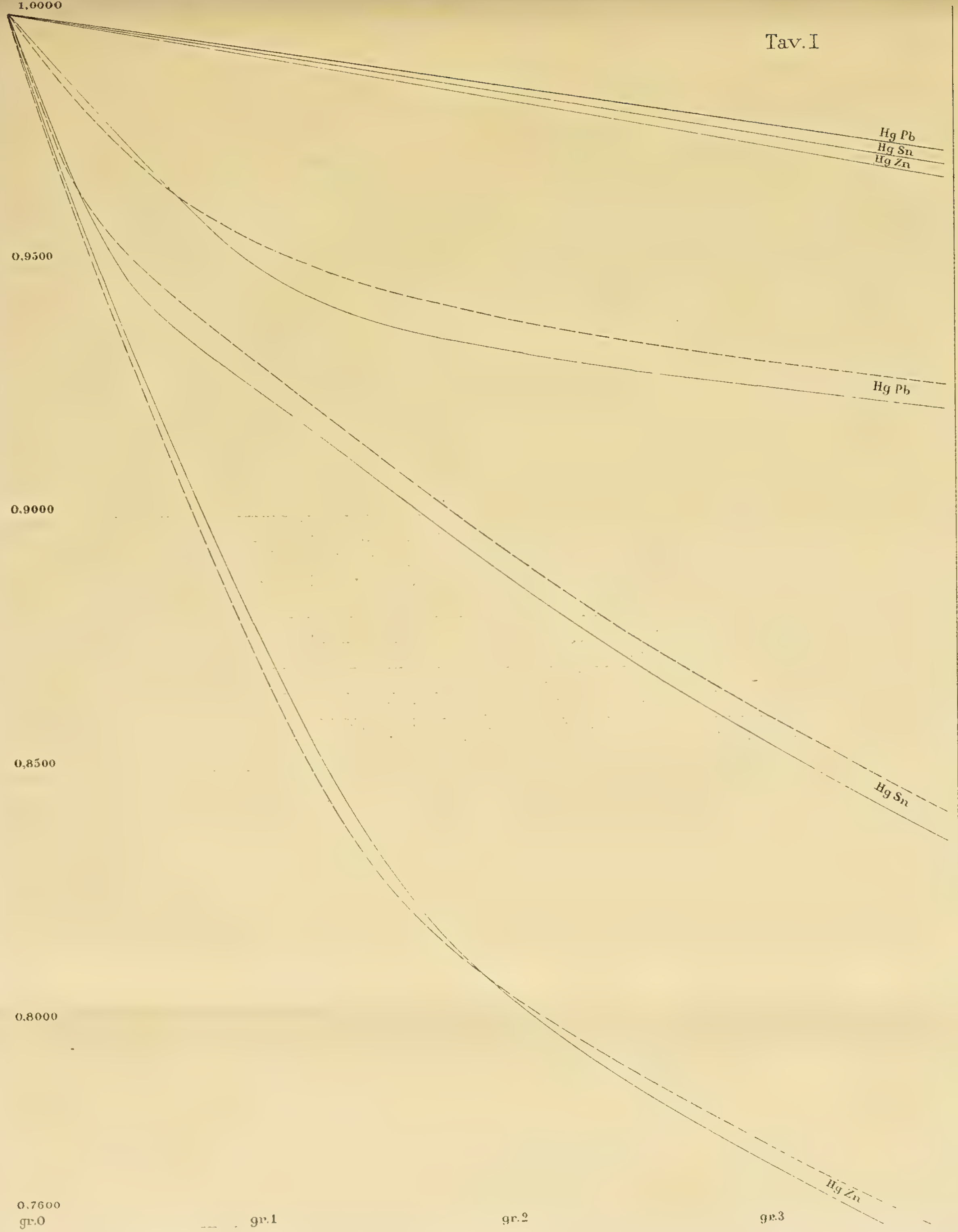
6. Per quanto riguarda questi risultati dunque è d' uopo riconoscere che, non solo le molecole dei liquidi isomeri di una data famiglia, sono sistemi di aggruppamenti atomici diversi dall' uno all' altro liquido, sicchè i sistemi stessi, sebbene di massa

eguale, risultano più o meno provveduti d' energia potenziale secondo la storia delle trasformazioni chimiche percorse nella loro formazione, come l' attestano le loro attitudini diverse nelle reazioni chimiche, ma che ancora ben differente da liquido a liquido dev' essere il grado di complessività degli aggruppamenti molecolari, se dall' uno all'altro le costanti fisiche, in particolare l' indice di rifrazione che rappresenta la facoltà dei gruppi molecolari a ritardare il movimento di propagazione dei raggi luminosi, sono tanto diverse.

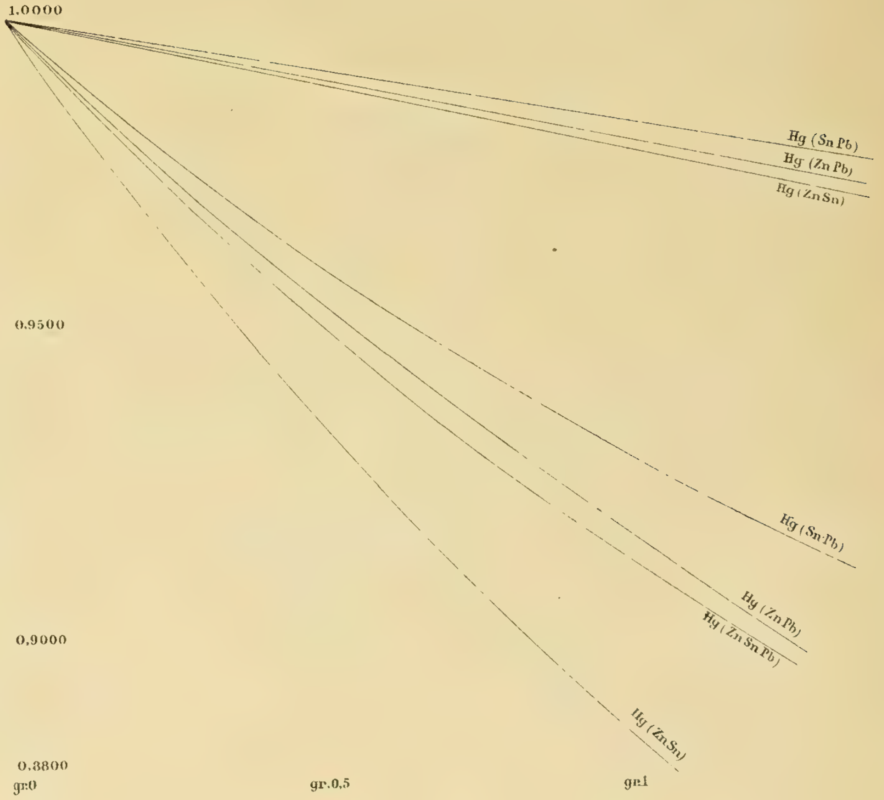
E questi aggruppamenti molecolari inoltre devono sistemarsi in un modo ben singolare nell'atto della formazione di un miscuglio, se, mentre in una soluzione salina *normale* qualunque col sostituire al gruppo atomico (*acido* o *basico*) del sale un altro gruppo atomico (*acido* o *basico*) qualsivoglia si determina nelle costanti fisiche della soluzione sempre una stessa e caratteristica variazione, corrispondente al *modulo* dell' elemento sostituito, e mentre in un miscuglio d' ordine qualunque di soluzioni saline (almeno per quello dei sali affini) la variazione, che interviene nelle costanti fisiche del miscuglio col sostituire ad una o più soluzioni del miscuglio stesso altre soluzioni differenti, è retta da regole fisse [1], sicchè nell' uno e nell'altro caso una norma ben determinata dev' essere seguìta dagli aggruppamenti atomici e molecolari delle soluzioni saline nel comporsi sotto i nuovi sistemi atomici e molecolari, per i liquidi isomeri sopra considerati nessuna relazione numerica, ch' abbia il carattere di regola costante, si presentò nell' esame delle costanti fisiche dei liquidi stessi e dei loro miscugli.

[1] Compendiate nella relazione (I), riferita al num. 11 della precedente ricerca *sulla resistenza elettrica dei miscugli delle amalgame liquide.*

Tav. I



Tav. II.



Lit. Bruno e Salomone, Roma

RELAZIONE

letta dal Socio Blaserna, relatore, a nome anche del Socio Cantoni nella seduta del 12 giugno 1887, sulla Memoria del dott. G. G. Gerosa ed E. Mai, intitolata: *Ricerca sul massimo di densità dei miscugli delle soluzioni saline* corrispondenti, *preceduta da una verifica del valor massimo di densità dell'acqua distillata.*

« La Memoria dei dott. G. G. Gerosa ed E. Mai esamina la variazione nel massimo di densità dei miscugli di soluzioni saline corrispondenti. Essa è preceduta da una indagine sul valor massimo di densità dell'acqua distillata, sul quale esistono tuttora valori controversi. Il lavoro dei sigg. Gerosa e Mai è condotto con molta cura; esso è corredato da una tavola, che dimostra in modo chiaro le forti variazioni che subisce il massimo di densità, anche per piccole quantità di sale sciolto nell'acqua. L'indole del lavoro e i risultati ai quali giungono gli autori, raccomandano la pubblicazione della pregevole Memoria negli Atti accademici ».

*

Ricerca sul massimo di densità dei miscugli delle soluzioni saline corrispondenti, preceduta da una verifica del valor massimo di densità dell' acqua distillata.

Memoria dei dott. G. G. GEROSA ed E. MAI

(Con una tavola).

---

1. La conoscenza delle *proprietà modulari* delle costanti fisiche, relative alle masse atomiche e molecolari, e quella della loro correlazione, non solo viene ravvicinando sempre più i due ordini di fatti, dei sistemi chimici e fisici, ma lascia ancora pensare come non improbabile che debba prestare un modo di poter determinare pure per i liquidi, od almeno per alcuni liquidi al presente, la grandezza dei varî lavori che in quelli può produrre una data quantità di calore; la quale determinazione preme davvero altamente alla fisica sperimentale, come quella che riguarda la conoscenza dello *stato fisico* dei corpi.

Per tali riguardi abbiamo creduto che non fosse per riescire senza alcun pregio la ricerca di alcune altre intime relazioni fra le costanti fisiche dei miscugli delle soluzioni saline, e ci siamo pertanto occupati della determinazione del massimo di densità delle soluzioni saline normali e dei loro miscugli.

Però abbiamo stimato opportuno, dacchè eravamo in argomento, di premettere una verifica del valor massimo di densità dell' acqua distillata, pel fatto che i dati di Kopp, di Pierre, di Despretz, di Hagen, di Matthiessen, di Weidner e di Rossetti venivano tutti insieme messi in dubbio (1), or non è molto, dal dott. Bonetti dietro una sua determinazione, la quale, a vero dire, avrebbe l' apparenza di essere stata condotta in ogni sua parte con molta circospezione.

Per verità l'anno scorso il prof. Naccari, contrapponendo ai risultati del dott. Bonetti una determinazione, sulla quale non si può muover dubbî, rimetteva ogni cosa nei termini in cui era prima delle ricerche del dott. Bonetti (2); tuttavia trattandosi di un fatto tanto importante, giudichiamo che non debba essere fuori del caso di fermarvisi sopra ancora una volta.

2. Per questo ci servimmo di quattro dilatometri, in tutto simili fra loro e contrassegnati coi numeri 1, 3, 6 e 7, i quali furono costruiti dal dott. H. Geissler's

(1) F. Bonetti, Atti della r. Accad. dei Lincei; Trans., vol. VIII, pag. 323, 1884. La divergenza dei risultati verrebbe attribuita dal Bonetti agli anomali valori ch'egli avrebbe incontrato pel coeff. k di dilataz. del vetro fra 0° e 10°. Per brevità i valori di k, dati dal Bonetti di 2° in 2° fra 0° e 28°, possiamo con sufficiente approssimazione esprimerli colle due formole: $10^8 . K = 2629 - 1664 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}T}$; $10^8 . K = 2481 + 10 . T$, di cui la 1ª vale fra 0° e 10° e la 2ª fra 10° e 28°.

(2) A. Naccari, *Il Nuovo Cimento*, s. 3ª, t. XIX, pag. 243, 1886.

Nachfolger in Bonn con lodevolissima accuratezza. Essi, avendo un serbatoio cilindrico della capacità di quasi 100^{cc}, che misura in lunghezza circa 19 cm. ed in diametro esterno 2, 8 cm. e dei quali le pareti hanno lo spessore di 1,02 mm., presentano le più opportune condizioni per le ricerche, cui li abbiamo destinati, non esclusa quella che abbastanza presto un liquido contenutovi può assumere una data temperatura di un bagno. Il vetro ha una densità a 0^0 di 2,479, e, presentando una leggera tinta rosea, deve contenere una quantità non piccola di manganese, che probabilmente lo rende talquanto meno cattivo conduttore.

Il cannello dei dilatometri è diviso in millimetri e conta 160 divisioni per il n. 3, il n. 6 ed il n. 7 e 150 per il n. 1. Esso ha un raggio compreso fra i 3 e 4 decimillimetri e finisce in un imbutino a coppa, chiuso con un tappo smerigliato a perfetta tenuta di vapore.

3. Il dilatometro n. 3 fu destinato allo studio del coefficiente di dilatazione del vetro e gli altri allo studio delle soluzioni saline.

Essi furono puliti ogni volta colla migliore cura, introducendovi dapprima pochi centimetri cubi di acido nitrico puro e qualche goccia di alcole etilico, affine di avere un grande sviluppo di vapori nitrosi; di poi un po' di acido solforico puro, ed infine molt'acqua distillata per parecchie volte. In seguito furono prosciugati con ripetuti lavaggi di aria ben disseccata, mentr'erano riscaldati verso 40^0.

Innanzi di recarli sul piatto della bilancia furono ben puliti all' esterno con carta bibula bagnata prima nell'alcole etilico rettificato e poi leggermente inumidita con acqua distillata, affine di evitare uno stato d'elettrizzazione nel vetro; quindi vennero lasciati per buon tempo nella sala delle bilancie.

Le pesate furono eseguite con una buona bilancia, che fu portata ad una sensibilità media, in modo che per 1 mgr. il giudice percorresse un arco di circa $\frac{1}{2}$ mm.; imperocchè, dovendosi fare parecchie pesate di seguito, si stimò più conveniente far sicuro assegnamento sulla costanza dell'istrumento, che non contare sovra una sensibilità un po' più grande.

I dilatometri furono pesati prima e dopo delle esperienze sul massimo di densità delle soluzioni, seguendo una volta il metodo della doppia pesata e nell'altra quello della tara. In ogni caso la pesata era ripetuta almeno due volte e veniva separatamente calcolata colle relazioni

$$P_v = \frac{P_d + P_s}{2}\left\{1+\pi\left(\frac{1+kt}{d} - \frac{1+k_1 t}{d_1}\right)\right\} \text{ e } P'_v = P'\left\{1+\pi\left(\frac{1+kt}{d} - \frac{1+k_1 t}{d_1}\right)\right\},$$

dove P_v e P'_v significano i pesi reali del vetro del dilatometro, ottenuti rispettivamente col metodo della doppia pesata e della tara; $\frac{P_d + P_s}{2}$ e P' la media aritmetica dei pesi apparenti, posti sul piatto di destra e di sinistra per equilibrare il dilatometro nel primo caso, ed i pesi apparenti per equilibrare la tara nel secondo, corretti per riguardo agli errori relativi ai pezzi della pesiera e riferiti al chilogrammo tipo in platino; π il peso di 1cc. d'aria alla temperatura t (data da un buon termometro) ed alla pressione h (letta sovra un buon barometro Fortin, campionato dall'Ufficio centrale di Meteorologia) durante la pesata; $k = 0{,}0000256$ e $k_1 = 0{,}0000543$ i coefficienti medî di dilatazione cubica del vetro e dell'ottone (di cui sono costituiti

i pezzi della pesiera) fra 0° e 15°; $d = 2,479$ e $d_1 = 8,396$ le densità rispettive a 0° del vetro e dell'ottone.

Ora i valori trovati nei due casi furono questi:

Dilatom.	P_v	P'_v	$(P_v + 2P'_v) : 3$
N.° 1	66,58173	66,58208	66,58196
N.° 3	66,58476	66,58468	66,58471
N.° 6	60,17761	60,17766	60,17764
N.° 7	61,87498	61,87468	61,87478

ed i valori definitivi, assunti come pesi reali dei quattro dilatometri, sono quelli scritti nell'ultima colonna, i quali corrispondono alla media aritmetica di P_v e P'_v, ove a P'_v si è dato un *peso* doppio, sia perchè le pesate nel secondo caso vennero ripetute una volta di più e perchè il metodo della tara, essendo indipendente dalla posizione dello zero della bilancia scarica, è senza dubbio in ogni caso più rigoroso, ed in ispecie quando la carica è considerevole.

4. Il dilatometro n. 3 fu riempito per circa $\frac{7}{8}$ della sua capacità con mercurio per bene purificato ed essiccato, il quale vi venne fatto bollire per alquanto tempo, mentre nello spazio non ripieno di mercurio si manteneva mediante una pompa una buona rarefazione. Il dilatometro, prima che si fosse raffreddato, venne poi del tutto riempito con mercurio bollito separatamente ed ancora ben caldo. Fu quindi riposto in una pozzetta di vetro, a pareti sottili, ripiena di mercurio fino all' orlo e vi fu immerso fino alla divisione 100. Il tutto, posto in un grande recipiente di latta a doppia parete e con fondo munito di gratta, venne circondato di ghiaccio fondente fino all' orlo dell' imbuto del dilatometro.

Dopo parecchie ore venne esportato il mercurio, che era nell' imbutino, ed il suo livello fu ridotto ad essere tangente la divisione 160 mediante un tubo di vetro piegato ad uncino e ben affilato ad una estremità, il quale permetteva di assorbire le più piccole quantità di liquido.

Il dilatometro venne quindi pesato sovra una buona bilancia Sartorius, di cui il giudice percorreva a piatti carichi $1 \frac{1}{4}$ divis. (mm. 0,63 dell' arco) per 1 mgr., seguendo esclusivamente il metodo della tara, poichè con cariche così considerevoli e con questa sensibilità è poco prudente confidare nella costanza dello zero della bilancia a piatti scarichi; mentre non havvi motivo, tolti gli inevitabili errori d'esperienza, che muti lo zero a piatti carichi sempre con pesi d'eguale grandezza.

Ancor qui fu separatamente per ogni pesata stabilito il calcolo colla relazione

$$(a) \qquad P_0 = P'_0 \left\{ 1 - \pi \left(\frac{1+k_1 t}{d_1} - \frac{1+\delta t}{\Delta} \right) \right\} - P_v \left\{ 1 - \pi \left(\frac{1+kt}{d} - \frac{1+\delta t}{\Delta} \right) \right\};$$

dove le nuove lettere P'_0 e P_0, δ, Δ indicano rispettivamente il peso apparente del dilatometro ripieno ed il peso reale, il coefficiente medio di dilatazione cubica fra 0° e t^0, e la densità a 0° del liquido contenuto nel dilatometro.

E furono questi i dati dell'esperienza:

$$P'_0 = 1376,0950 \text{ gr.}; \quad t = 6°,15; \quad h = 751,44.$$

Dopo un dì il dilatometro fu riposto nella pozzetta e fu ripetuta la stessa prova. Il livello del mercurio ritornò esattamente alla divisione 160; per cui punto si modificò in quell'intervallo di tempo la capacità del dilatometro per la pressione interna del mercurio.

Venne quindi portato, sempre mantenendolo immerso sino alla divisione 100 nella pozzetta ripiena di mercurio, in un bagno d'acqua ad una temperatura fra gli 11° ed i 12°. Il recipiente del bagno è un grande vaso calorimetrico d'ottone a doppia parete e della capacità di ben 12 litri (altezza 60 cm., diametro interno 15 cm.), il quale è munito in alto di una scattola cubica della capacità di un litro, inserita sovra una finestrella di un decimetro quadrato, praticata sulla parete interna del recipiente dall'orlo in basso. La scattola comunica direttamente per la finestra col bagno ed è provveduta di un rubinetto.

L'acqua del bagno era rimossa continuamente con un agitatore e la sua temperatura, che era la stessa dell'ambiente, era data da uno o da due termometri, disposti allato del dilatometro entro la pozzetta medesima ripiena di mercurio e col punto di mezzo del loro bulbo in corrispondenza del punto di mezzo del serbatoio del dilatometro. Quando da buon tempo la temperatura era costante, il mercurio nel dilatometro fu ridotto ancora esattamente alla divisione 160 e fu letta la temperatura del bagno. L'osservazione del livello del mercurio e della temperatura fu sempre verificata alquanto dopo, per assicurarsi che tutto era rimasto costante.

Il dilatometro fu quindi pesato.

Ma, prima di riferire i numeri di questa prova, soggiungiamo che i termometri usati sono due buonissimi termometri divisi in decimi di grado, costruiti dal Baudin, i quali recano i n. 7245 e 7248 rispettivamente. Un grado corrisponde a più che un centimetro dell'asta termometrica, ed il serbatoio, di forma fusiforme, misura 6 cm. pel termometro n. 7248 e 6,5 cm. per l'altro.

Furono entrambi calibrati col metodo di Rowland ed il n. 7248, che va da — 5° a + 42°, fu paragonato col termometro ad aria. L'altro, che va da —25° a +30°, fu confrontato col n. 7248.

D'entrambi i termometri poi fu determinata con molta cura e con una lunga serie d'esperienze l'influenza della pressione sul bulbo. Una prima volta fu osservato lo spostamento della colonnina nell'atto dell'immersione del termometro per una data altezza in più od in meno entro una pozzetta di mercurio, mantenuto a 0°. Una seconda volta si impegnò il termometro nell'apparecchio di Regnault per la compressibilità dei liquidi al posto dell'ampolla, e si applicò ad uno dei due rubinetti, di cui è munito il coperchio, una canna di vetro alta un paio di metri. Riempiendo allora l'apparecchio di acqua ed insieme la canna di vetro, quando questo rubinetto (che diremo A) è aperto e l'altro (che diremo B) è chiuso, si esercita sul serbatoio termometrico una pressione in più (corrispondente all'altezza della colonna d'acqua compresa fra l'apertura del rubinetto B ed il sommo della colonna stessa), che non quando è chiuso il rubinetto A ed aperto B. Leggendo quindi con un cannocchiale, posto a distanza, gli spostamenti di salita o di discesa della colonnina termometrica all'atto della compressione e dell'espansione del liquido nell'apparecchio piezometrico, e leggendo insieme sovra una scala graduata la differenza di livello fra la superficie del liquido che sgorga

da B e quella della colonna d'acqua nella canna di vetro, risultò che i termometri n. 7245 e n. 7248 per la pressione in più od in meno di una colonna d'acqua dell'altezza di 1 m. a 10° indicano una variazione di 0°,0267 e 0°,0259 rispettivamente. E questi risultati corrispondono anche a quelli trovati col primo metodo.

Cosicchè, se τ è la temperatura letta sui termometri e T quella corretta, si ha, per l' intervallo di temperatura, cui si riferiscono le nostre esperienze,

$$\text{Termom. N. } 7248: T = \tau - \tau_0 - 0{,}00104\,(\tau-\tau_0) - 0{,}0045\,(\tau-\tau_0) \quad - 0{,}0259.\nu$$

$$\text{" N. } 7245: T = \tau - \tau_0 - 0{,}00554\,(\tau-\tau_0) + 0{,}0000014\,(\tau-\tau_0)^4 - 0{,}0267.\nu;$$

dove τ_0 indica lo spostamento dello 0° del termometro; 0,00104 e 0,0045 il coefficiente di correzione per la calibrazione e per il paragone del termometro n. 7248 col termometro ad aria, supposti esatti i punti 0° e 40°; 0,0000014 il coefficiente di correzione da apportarsi al termometro n. 7245 per riferirlo al n. 7248; ν la pressione sofferta dal serbatoio termometrico, espressa in colonne d'acqua a 10° alte un metro e contata dalla pressione atmosferica, presa come origine.

In questa prima esperienza abbiamo usato solo il termometro n. 7248, poichè l'altro, come diremo, non volevamo punto perturbarlo, prima di aver eseguite le esperienze sul massimo di densità, ed i dati numerici, che le si riferiscono, sono:

$$P'_{12}=1373{,}6986\text{ gr.}; \quad t=5^\circ{,}2; \quad h=755{,}08; \quad \tau=11{,}980; \quad \tau_0=0{,}087; \quad \nu=2{,}59;$$
$$T = 11^\circ{,}760.$$

Dopo questa prima esperienza si lasciò passare circa due mesi e mezzo, eseguendo nel frattempo le esperienze relative al massimo di densità delle soluzioni saline e dell' acqua, affinchè il dilatometro dimenticasse, almeno in gran parte, la perturbazione subìta durante l'ebollizione del mercurio, e si riprese quindi lo studio.

In una seconda esperienza il dilatometro fu portato successivamente a 0°, a 5°, a 10° e quindi, abbastanza rapidamente e per poco tempo, a 100°. Esso fu pesato dopo essere stato portato a 0°, a 10° ed a 100°, e per controllo si pesò altresì il mercurio uscito da 0° a 5°, da 0° a 10° e da 0° a 100° (¹).

I risultati sperimentali sono questi:

$P'_0=1376{,}07691$; $t=4^\circ{,}9$; $h=763{,}11$
$P'_{10}=1374{,}04311$; $t=7^\circ{,}3$; $h=761{,}20$; $\tau\left\{\begin{matrix}\text{N. }7248: 10^\circ{,}124\\ \text{N. }7245: 10^\circ{,}180\end{matrix}\right.;\ \tau_0\left\{\begin{matrix}0^\circ{,}095\\ 0^\circ{,}110\end{matrix}\right.;\ \nu\left\{\begin{matrix}0\ (^2)\\ 2{,}23\end{matrix}\right.;\ T\left\{\begin{matrix}9^\circ{,}974\\ 9^\circ{,}970\end{matrix}\right.=9^\circ{,}972$
$P'_{100}=1356{,}18246$; $t=10^\circ{,}5$; $h=760{,}45$

Peso reale del mercurio

uscito da		0° a 5°: gr.	0,99836	; $\tau\left\{\begin{matrix}\text{N. }7248: 5^\circ{,}005\\ \text{N. }7245: 5^\circ{,}070\end{matrix}\right.;\ \tau_0\left\{\begin{matrix}0^\circ{,}100\\ 0^\circ{,}110\end{matrix}\right.;\ \nu\left\{\begin{matrix}0\\ 2{,}23\end{matrix}\right.;\ T\left\{\begin{matrix}4^\circ{,}878\\ 4^\circ{,}874\end{matrix}\right.=4^\circ{,}876$
id.	id.	5° a 10°: »	1,03536	
			2,03372	
id.	id.	0° a 10°: gr.	2,03378	
		media	2,03375	
id.	id.	10° a 100°: gr.	17,85867	; $h = 761{,}05$; $T = 100^\circ{,}0614$
id.	id.	0° a 100°: »	19,89242	

(¹) Per portare a 100° il dilatometro si dispose la pozzetta, in cui esso stava immerso, nell'apparecchio per la determinazione del punto 100° dei termometri, e la temperatura fu determinata mediante la lettura barometrica, per la quale si ebbero tutti quei riguardi, che furono già altre volte ricordati.

(²) Il termometro n. 7248 pescava nell'acqua del bagno e l'altro nella pozzetta ripiena di mercurio.

Finalmente, dopo tre giorni, venne fatta una terza esperienza, ed il dilatometro fu portato a 100^0 e mantenutovi per tre ore; quindi venne rapidamente portato a 0^0 e di poi a 10^0. Esso fu pesato dopo essere stato portato a 0^0 e 10^0 e si tenne conto del mercurio aggiunto nel passare da 100^0 a 0^0.

I risultati ottenuti sono i seguenti:

$P'_0 = 1376{,}08316$; $t = 11^\circ{,}4$; $h = 754{,}89$

$P'_{10} = 1373{,}98163$; $t = 11^\circ{,}6$; $h = 759{,}97$; $\tau \left\{\begin{matrix} N.\ 7248: 10^\circ{,}504 \\ N.\ 7245: 10^\circ{,}509 \end{matrix}\right.;\ \tau \left\{\begin{matrix} 0^\circ{,}087 \\ 0^\circ{,}093 \end{matrix}\right.;\ \nu \left\{\begin{matrix} 2{,}24\ \text{[1]} \\ 3{,}05 \end{matrix}\right.;\ T \left\{\begin{matrix} 10^\circ{,}293 \\ 10^\circ{,}301 \end{matrix}\right. = 10^\circ{,}297$

$P_{100} - P_0 = 19{,}86768$ gr. ; $h = 755{,}73$; $T = 99{,}843$.

Ed ora i valori delle tre esperienze surriferite possiamo raccoglierli nella tabelletta qui sotto:

Esper.e	T	P_T	$(P)_T$	$10^{10}.k$	$10^{10}(k)$
1ª	0^0	1309,4591	—	—	—
»	11,760	1307,06227	—	258200	—
2ª	0	1309,44000	1309,44038	—	—
»	4,876	1308,44164	1308,44200	252822	252775
»	9,972	1307,40692	1307,40663	258185	257670
»	100,0614	1289,54807	1289,54796	275747	275554
3ª	0	1309,44842	—	—	—
»	10,297	1307,34540	—	255414	—
»	99,843	1289,58298	—	274490	—

dove P_T e $(P)_T$ indicano il peso reale del mercurio, contenuto nel dilatometro a T, valutato nel primo caso colla diretta pesata (ad eccezione di $1308{,}44164 = P_0 - 0{,}99836$) e nel secondo colla media aritmetica dei tre valori che risultano, tenendo conto di tutte e tre le pesate della seconda esperienza, coll'aggiungere o togliere alle quantità P_T il peso del mercurio uscito alle differenti temperature T. I numeri k e (k) poi rappresentano il coefficiente medio di dilatazione cubica del vetro, ond'è costituito il dilatometro, fra 0^0 e T, calcolato rispettivamente colle relazioni:

$$(b) \qquad k = \frac{P_T}{P_0} \cdot \frac{1 + \delta T}{T} - \frac{1}{T}\,; \quad (k) = \frac{(P)_T}{(P)_0} \cdot \frac{1 + \delta T}{T} - \frac{1}{T}\,,$$

dove δ esprime il coefficiente medio di dilatazione del mercurio fra 0^0 e T^0, dedotto dalla formola di Broch:

$$10^9.\delta = 181792 + 0{,}175.t + 0{,}035116.t^2.$$

[1] Entrambi i termometri pescavano nella pozzetta piena di mercurio.

Cosicchè, raccogliendo i valori di k e (k) nel modo qui sotto indicato, si ha:

Peso	Coeff. medio di dilatazione cubica del vetro fra		
	0° e 5°	0° e 10°	0° e 100°
1	252822.10^{-10}	258192.10^{-10}	275747.10^{-10}
2	252775.10^{-10}	257670.10^{-10}	275554.10^{-10}
3	— —	255414.10^{-10}	274490.10^{-10}
Media	252791.10^{-10}	256629.10^{-10}	275054.10^{-10}

I *pesi* relativi, assegnati ai valori qui sopra, sono giustificati dalla considerazione che i numeri, cui fu attribuito *peso* doppio, risultano dai valori medî di tre distinte misure, delle quali una, la misura diretta, fornì i numeri di *peso* semplice. Anzi i valori direttamente ottenuti dalla 1ª e 2ª esperienza per k fra 0° e 10° furono introdotti col loro valor medio una sola volta, dacchè il numero relativo alla 1ª esperienza si riferisce ad una temperatura di circa 12°, e d'altra parte venne determinato tosto dopo che fu fatto bollire il mercurio nel dilatometro. I numeri poi introdotti con *peso* triplo furono ottenuti nelle migliori condizioni, dacchè il dilatometro fu rapidamente condotto da 100° a 0°. Essi d'altra parte tendono a mettere d' accordo i valori trovati nella 1ª e 2ª esperienza per k fra 0° e 5° e fra 0° e 10°, di cui il primo è certamente troppo piccolo. Ed invero ci ha sorpreso la differenza fra 25279.10^{-9} e 25663.10^{-9} per k, fra 0° e 5° e fra 0° e 10°, attesa l' accuratezza posta nella ricerca; però bisogna riflettere che il differenziale della (b)

$$dk = \frac{P_0 - P_T}{P_0\, T^2}\, dT + \frac{1 + \delta T}{P_0\, T}\, dP_T - \frac{P_T(1+\delta T)}{P_0^2\, T}\, dP_0\,,$$

per $dT = 0{,}005$ e $dP_T = dP_0 = 0{,}0005$ dà, riferendoci ad esempio ai valori medî della seconda esperienza,

$$dk = 317.10^{-9} \text{ per } k \text{ fra } 0^\circ \text{ e } 5^\circ$$
$$dk = 155.10^{-9} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad 0^\circ \text{ e } 10^\circ,$$

quando si faccia astrazione dal segno con cui gli errori dT e dP possano presentarsi, come avviene appunto nelle osservazioni [1]. Vale a dire che per l'errore di 5 milligradi e di 5 decimilligrammi commesso nella determinazione di k il suo valore può riuscire errato del 12 per 1000 fra 0° e 5° e del 6 per 1000 fra 0° e 10°.

Per questo abbiamo assunto la relazione:

$$k = 0{,}000025458 + 0{,}0000000205.T$$

per il coefficiente di dilatazione del vetro dei dilatometri, la quale coincide coi valori medî della precedente tabella, relativi a k fra 0° e 10° e fra 0° e 100°, e si scosta

(1) Ove si ponesse la combinazione d'errabilità $\pm dP_T = \pm dP_0$ gli errori dk resterebbero dimezzati.

dal valore di k fra 0° e 5° (del quale ci preoccupammo poco perchè fu determinato una sola volta e perchè è quello che può essere affetto dall' errore più grande) meno di quanto corrisponda ad un errore $dT = 0{,}004$ e $dP = 0{,}0004$.

5. Per lo studio del massimo di densità dell' acqua vennero riempiti con acqua distillata, accuratamente preparata e di recente bollita, tutti e tre i dilatometri n. 1, n. 6 e n. 8, ed, immersi in un bagno di circa 35°, vennero sottoposti alla campana della macchina di rarefazione, affine di farvi bollire entro l' acqua senza riscaldarli oltre i 35°. Furono quindi posti nel ghiaccio fondente e, dopo che trascorsero parecchie ore, il liquido fu ridotto ad essere tangente colla parte inferiore del suo menisco la più alta divisione del cannello. In seguito vennero recati sulla bilancia e pesati col metodo della tara.

Tutta l' operazione fu ripetuta tre volte, rifacendo ogni cosa da capo ed in circostanze diverse, e si ebbero i risultati seguenti:

	Dilatometro N. 1			Dilatometro N. 6			Dilatometro N. 7		
P'_0	163,20139	163,19561	163,19734	154,68756	154,68742	154,68887	156,21440	156,21244	156,21258
t^0	18,5	6,6	9,2	7,2	7,2	9,3	9,9	7,1	7,3
h	758,60	761,29	758,65	764,27	761,50	758,27	755,58	764,06	761,25

Mercè poi la relazione (a), ove per Δ e δ furono posti i valori ricavati dalle tavole del Rossetti (posta eguale ad 1 la densità a 0° dell' acqua), si trovarono questi numeri pel peso reale dell' acqua contenuta a 0° nei dilatometri fino alla più alta divisione:

Peso	P_0		
	N. 1	N. 6	N. 7
1	96,74532	94,63706	94,46476
1	96,74520	94,63644	94,46525
2	96,74526	94,63638	94,46481
Media	96,74526	94,63656	94,46491

Ora secondo le diligenti determinazioni di Kupffer (Everett, *Units and phisical constants*; London, 1879) 1 cc. di acqua distillata a 4° pesa 1,000013 gr., e quindi a 0° peserà gr. 0,999884, secondo le tavole del Rossetti; per cui il volume a 0° dei tre dilatometri sarà in tal caso rispettivamente di cc.

96,756477 (N. 1); 94,647534 (N. 6); 94,475850 (N. 7).

I cannelli dei dilatometri furono calibrati prima e dopo delle esperienze, misurando ciascuna volta sotto la macchina divisoria la lunghezza di tante colonnine di mercurio, successivamente introdotte in quel tratto di cannello, che doveva essere preso

in considerazione nell' esperienza, le quali riunite insieme pesavano ogni volta non meno di 4 o 5 grammi. Nella calibrazione si ebbe grande riguardo alla temperatura, e risultò che i raggi medî a 0° dei cannelli pei tre dilatometri n. 1, n. 6 e n. 7 pel tratto esaminato corrispondono ordinatamente a

cm. 0,037569, 0,039939 e 0,032180;

per cui la capacità a 0° di una divisione, ossia di un millimetro, è correlativamente di

cc. 0,000443414, 0,000501123 e 0,00032528.

Per portare i dilatometri alle diverse temperature, comprendenti il massimo di densità, abbiamo fatto uso del bagno d' acqua, descritto al n. 4, il quale per quasi tre quarti della sua altezza poteva essere immerso nel grande recipiente di latta, che serviva per l' esperienza a 0°. Questo era in parte riempito d'acqua salata mantenuta a 0° con pezzetti di ghiaccio o di qualche grado sotto 0° coll' aggiunta d' una miscela di neve e sale, e poteva mediante una crimaliera essere alzato od abbassato, in modo che il bagno d'acqua vi pescasse per un' altezza più o meno grande. Con tal mezzo ci fu possibile di avere nel bagno la perfetta costanza nella temperatura per quanto tempo si voleva, e nello stesso tempo ci fu assai facile passare successivamente da una temperatura ad un' altra di poco discosta e renderla tosto costante, variando l'altezza del bagno nel refrigerante e la temperatura del bagno stesso col lasciare effluire l' acqua dal rubinetto della scattola superiore, mentre ve n' era versata dell' altra più o meno calda.

Le temperature del bagno furono date in tutte le esperienze, anche in quelle relative alle soluzioni saline, dal termometro n. 7245, il quale era fatto entrare nello spazio libero che i tre dilatometri, disposti in circolo, lasciavano fra di loro, scostandosi da ciascuno di essi di due o tre millimetri e riescendo col punto di mezzo del suo bulbo verso la metà del serbatoio dei dilatometri medesimi. Esso, nelle dieci settimane, che durarono le esperienze, non uscì mai dai limiti di temperatura compresi fra 0° e 7°; imperocchè, quando un' esperienza era finita, veniva passato in un bagno verso i 4° e quivi mantenuto. Prima e dopo d' ogni esperienza fu determinato lo zero, che risultò costantemente di $+0,10$ nelle prime otto settimane, in cui furono eseguite le esperienze sulle soluzioni saline, e di $+0,11$ nelle ultime due, in cui furono stabilite quelle sull' acqua distillata. E questo spostamento di 0,01 devesi certamente attribuire al fatto che, prima di passare dalle esperienze sulle soluzioni a quelle sull' acqua, il termometro fu lasciato tre dì nel ghiaccio fondente, anzichè in un bagno a 4°, come erasi fatto precedentemente.

Le letture dell' altezza del liquido nel cannello dei dilatometri e della colonna termometrica vennero fatte mediante un cannocchiale a piccola distanza e ripetute almeno tre volte alla distanza di 10′. Fu poi sempre preso nota dell' altezza delle colonne liquide, nei dilatometri e nel termometro, emergenti dal bagno ed insieme della temperatura loro, disponendo il serbatoio di un buon termometro Geissler, diviso in decimi e confrontato col n. 7248, lungo le stesse colonnine emergenti. Vedremo però che la correzione per tal riguardo fu sempre piccolissima per le temperature ed insignificante per le altezze delle colonnine nei cannelli dei dilatometri, pel fatto che la temperatura dell' ambiente fu sempre poco discosta da quella del bagno.

Ed ora sono questi i numeri registrati nell' esperienza:

τ	Altez. della colonna liq. nei dilat.			t	Altezza della colonna emergente			
	N. 1	N. 6	N. 7		N. 1	N. 6	N. 7	term.
0,110	150,00	160,00	160,00	0°	0 mm.	0 mm.	0 mm.	0°
0,460	143,20	154,30	151,00	2,9	19	21	19	2,5
1,415	126,92	139,92	128,67	3,8	9	14	5	3,4
2,473	112,80	127,50	109,70	4,2	9	20	4	5,8
3,297	104,20	120,20	98,42	4,4	5	24	4	7,5
4,085	98,35	115,25	90,65	4,7	16	26	4	9,2
5,080	94,02	111,50	84,90	5,4	17	28	6	10,8
6,030	93,07	110,66	83,74	5,9	25	37	11	12,2
7,083	95,50	112,84	86,92	6,2	27	39	10	13,3

ove t indica la temperatura delle colonnine emergenti.

Alla temperatura τ va fatta la correzione qui indicata

$$T = \tau - \tau_0 - 0{,}00554\,(\tau - \tau_0) + 0{,}0000014\,(\tau - \tau_0)^4 - 0{,}0267.v + \frac{\tau - t}{6480}\cdot e\,;$$

dove $\tau_0 = 0{,}11$ e l' ultimo termine rappresenta la correzione rispetto alla colonnina di mercurio e, valutata in gradi, emergente dal bagno.

Per calcolare poi la densità Δ dell' acqua alle diverse temperature T, usammo la relazione

$$(c) \qquad \Delta = \frac{P_0}{(V - nv)(1 + kT)},$$

dove P_0 indica il peso reale dell' acqua contenuta a 0° fino alla più alta divisione in ciascun dilatometro; V il volume a 0° del dilatometro sino a quella divisione; k il coefficiente medio di dilatazione del vetro fra 0° e T; n il numero delle divisioni, di cui sta depressa la colonna liquida nel cannello del dilatometro sotto la divisione più alta; ossia la differenza che dal primo numero ha rispettivamente ciascun altro della seconda, terza e quarta colonna nella tabella qui sopra; v il volume a 0° di una divisione del cannello del dilatometro.

Bisogna avvertire però che la (c) non tien conto della correzione che, rispetto alla temperatura, dev' essere fatta alla colonna liquida emergente dal bagno, dacchè l' espressione, corretta per tal riguardo, sarebbe:

$$(c_1) \qquad \Delta = \frac{P_0}{\{V - (n + n_1)\,v\}\,(1 + kT) + n_1 v\,\{1 + kT + (k - \delta)(t - T)\}},$$

dove n_1 indica il numero delle divisioni occupate dalla colonna liquida emergente e δ il coefficiente medio del liquido fra t e T. Ma tale correzione è davvero insignificante, poichè la (c_1) differisce dalla (c) pel termine $n_1 v\,(k - \delta)(t - T)$ al denominatore, il quale, anche nel caso estremo delle condizioni più sfavorevoli, espresse da

$$k - \delta = 0{,}00002\,, \qquad n_1 = 20\,, \qquad v = 0{,}0005\,, \qquad t - T = 2{,}5$$

raggiungerebbe soltanto il valore 0,0000005.

Ed ora i valori ricavati dai dati precedenti per la densità dell' acqua distillata alle temperature T sono i seguenti:

T	Dilatom. N. 1		Dilatom. N. 6		Dilatom. N. 7		Media	$10.^{-7}\varepsilon$
	n	Δ	n	Δ	n	Δ		
0	0	0,9998840	0	0,9998840	0	0,9998840	0,9998840	0
0,347	6,80	0,9999064	5,70	0,9999052	9,00	0,9999063	0,9999060	220
1,297	23,08	0,9999569	20,08	0,9999575	31,33	0,9999590	0,9999578	738
2,348	37,20	0,9999944	32,50	0,9999963	50,30	0,9999975	0,9999961	1121
3,168	45,80	1,0000131	39,80	1,0000139	61,58	1,0000151	1,0000140	1300
3,952	51,65	1,0000198	44,75	1,0000191	69,35	1,0000218	1,0000202	1362
4,943	55,98	1,0000142	48,50	1,0000147	75,10	1,0000164	1,0000151	1311
5,889	56,93	0,9999942	49,34	0,9999947	76,26	0,9999958	0,9999949	1109
6,936	54,50	0,9999560	47,16	0,9999564	73,08	0,9999582	0,9999569	729

In generale il terzo valore della densità è un po' più grande degli altri due, ma devesi considerare che

$$d\Delta = \frac{dP_0}{(V-nv)(1+kT)} - \frac{P_0 k}{(V-nv)(1+kT)^2} dT$$

dà per $dP_0 = \pm 0{,}0002$ e $dT = \pm 0{,}005$, riferendoci per esempio ai valori più vicini al massimo,

$$d\Delta = \pm 0{,}0000021 \mp 0{,}0000005\,,$$

nell' ipotesi che $V - nv$ sia esatto.

Nella penultima colonna poi della tabella sono scritti i valori medî delle tre determinazioni, e colle loro differenze ε dal primo termine, segnate nell' ultima colonna, fu costruita la curva grafica, rappresentando con un decimetro un grado di temperatura e con $\frac{1}{2}$ mm. un' unità dell' ultima cifra decimale di quelle differenze. La curva si presenta regolarissima, passando esattamente per tutti i punti rappresentativi dei dati sperimentali, e fornisce i seguenti valori (1):

T	$10.^{-7}\varepsilon$	T	$10.^{-7}\varepsilon$
0	0	4,09	1363
0,59	367	4,59	1346
1,09	640	5,09	1290
1,59	864	5,59	1190
2,09	1046	6,09	1046
2,59	1188	6,59	870
3,09	1289	7,09	666
3,59	1345	7,59	448

(1) La curva fu tracciata mediante un' asta di acciaio, lunga e flessibile. Bastò di condurre l' asta a toccare uno degli aghi più alti, fissati nei punti rappresentativi dei valori sperimentali sulla mappa, perchè quella li toccasse tutti senza il minimo flesso.

E qui ci affrettiamo a soggiungere, affinchè non appaia che si incorra in una *petizione di principio*, che noi non dobbiamo contare che su queste differenze ε, poiche il volume a 0^0 dei dilatometri, all' uopo di evitare qualsiasi disturbo molecolare, che potevasi produrre nei serbatoi dei dilatometri stessi col farvi bollire il mercurio, fu determinato mediante l' acqua, assumendo con Everett che essa sotto il volume di 1 cc. pesi gr. 1,000013 a 4^0 e quindi, secondo le tavole del Rossetti, gr. 0,999884 a 0^0. Resta fermo però che, qualunque sia, fra i diversi valori dati per la densità a 0^0 dell'acqua, quello assunto, le differenze ε non mutano di valore. Di fatti, ammettiamo pure col dott. Bonetti che la densità massima dell' acqua a 4^0 sia di 1^0,00015802, posto eguale ad 1 quella a 0^0; allora il peso di 1 cc. di essa a 0^0, assumendo sempre che 1 cc. a 4^0 pesi gr. 1,000013, sarà in tale ipotesi di gr. 0,999855, e quindi il volume, ad esempio, del nostro dilatometro n. 1 risulterà a 0^0 di cc. 96,759270, cioè di cc. 0,002793 più grande di quello più addietro riferito. Ora dicendo Δ_0 e Δ_T la densità a 0^0 ed a T dell'acqua, abbiamo dalla differenza

$$\varepsilon = \Delta_T - \Delta_0 = \frac{P_0}{(V - nv)\,(1 - kT)} - \frac{P_0}{V}$$

differenziata rispetto a V:

$$-\Delta\varepsilon = \left\{ \frac{P_0}{(1 + kT)\,(V - nv)^2} - \frac{P_0}{V^2} \right\} dV\,;$$

la quale per $dV = 0{,}002793$, nel caso della determinazione stabilita col dilatometro n. 1 alla temperatura $T = 3^\circ{,}952$, dà

$$-\Delta\varepsilon = 0{,}0000000107\,;$$

cioè le differenze ε non variano di quantità apprezzabili coll' assegnare a Δ_0 i più disparati valori. Le nostre esperienze quindi con un errore massimo della media

$$\sqrt{\frac{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2}{n(n-1)}} = 0{,}0000009$$

e con un errore medio della media

$$\tfrac{1}{8}\Sigma \sqrt{\frac{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2}{n(n-1)}} = 0{,}0000006$$

dei valori di ciascun punto della curva, assegnerebbero all' acqua distillata la densità massima di 1,0001363 alla temperatura di 4°,09, posta eguale ad 1 la densità a 0^0, e presenterebbero questo accordo colle esperienze del Rossetti (1868)

T	$10.^{-7}\varepsilon$	Rossetti $10.^{-6}\varepsilon$	T	$10.^{-7}\varepsilon$	Rossetti $10.^{-6}\varepsilon$
0	136 2	136	5	5 8	6
1	76 7	75	6	28 7	29
2	34 6	32	7	65 7	58
3	8 7	8	8	111 2	106
4	0	0			

E pertanto la seguente legge di variazione nella densità

$$10^{12}.(\Delta_T - 1) = 82880153.t - 11864979.t^2 + 255313{,}05.t^3\,,$$

che il dott. Bonetti ha trovato per l'acqua distillata e che fornirebbe il valore di 1,00015802 a 4°, posto eguale ad 1 quella a 0°, non può essere accolta.

Il risultato di fatti

$$d\Delta = -\frac{P_0\,T}{(V - nv)\,(1 + kT)^2}\,dk = -\,0{,}0000217$$

per $dk = 0{,}0000055$, posto nelle nostre determinazioni corrispondenti al massimo, richiederebbe che il coefficiente di dilatazione del vetro dei nostri dilatometri, in luogo di quello surriferito, fosse di 0,00002 per mettere d'accordo il nostro valor massimo con quella formola; il che implicherebbe che da parte nostra si fossero commessi degli errori, sempre dello stesso segno, sui decimi di grammo nelle pesate e sui decimi di grado nelle temperature per le esperienze relative alla determinazione del coefficiente medio di dilatazione del vetro. Vogliamo invece notare che, se la divergenza dei valori del dott. Bonetti risiedesse interamente nei valori di k, essa scomparirebbe ove le variazioni da lui assegnate al coefficiente di dilatazione del vetro si riferissero ad una cifra decimale più innanzi.

6. Veniamo ora alle esperienze stabilite sul massimo di densità dei miscugli delle soluzioni saline.

Le soluzioni primitive erano formate coi *cloruri* di *sodio*, di *potassio* e di *ammonio*, dei quali fu disciolto $\frac{1}{5}$ del rispettivo peso molecolare, valutato in grammi, in un chilogrammo d'acqua. Vale a dire che, essendo ordinatamente 58,5, 74,5, 53,5 il peso molecolare di quei sali, vennero disciolti rispettivamente gr. 11,7, gr. 14,9, gr. 10,7 di $ClNa$, di ClK, e di $ClNH_4$ in 1000 grammi d'acqua distillata. I miscugli binarî e ternarî poi vennero composti colle stesse proporzioni, in modo cioè che ognuno di essi risultasse di $\frac{1}{5}$ o $\frac{2}{5}$ del peso molecolare di ciascun sale, disciolto sempre in un chilogrammo d'acqua.

Però una prima volta le soluzioni primitive ed i loro miscugli vennero preparati separatamente, pesando diligentemente in tanti recipienti distinti circa 250 grammi d'acqua e disciogliendovi la corrispettiva quantità di ciascun sale, pure diligentemente pesato (1). Una seconda volta invece, stimando di raggiungere maggiore esattezza, si preparò circa un chilogrammo e mezzo di ciascuna soluzione di $ClNa$, ClK e $ClNH_4$ e si compose ciascun miscuglio con grammi 101,17, 101,49 e 101,07 rispettivamente delle soluzioni primitive. I miscugli vennero preparati in una medesima boccetta, chiusa con tappo a smeriglio, pesandovi dapprima esattamente una soluzione e versandovi poi l'altra o le altre in quantità tale, che differisse in meno dalla quantità voluta d'un paio di decigrammi. Queste differenze poi erano aggiunte col versare in piccolissime provette, tarate sulla bilancia insieme colla boccetta, tanto della soluzione o delle soluzioni in difetto quanto fosse necessario a ricondurre la bilancia

(1) Per correggere i pesi apparenti dei sali rispetto alla sospinta dell'aria, si ritennero per le densità del $ClNa$, ClK e $ClNH_4$ rispettivamente i valori 2,130, 1,995, 1,500.

alla giusta posizione di equilibrio. Le provettine quindi erano calate nella boccetta stessa ([1]).

Colle soluzioni primitive ed i loro miscugli, preparati nel primo e nel secondo modo, furono stabilite due serie distinte di esperienze, in modo che ciascun liquido venisse nella seconda prova a trovarsi in un dilatometro diverso da quello in cui si trovava nella prima. In tutto il resto della ricerca fu seguìto esattamente il processo descritto per la verifica del valor massimo di densità dell' acqua. Osserviamo soltanto che per determinare mediante la relazione (*a*) il peso P delle soluzioni e dei miscugli nella prima serie d' esperienze, abbiamo con una precedente determinazione stabilito con approssimazione la loro densità a 0° col metodo della boccetta ed il coefficiente di dilatazione cubica fra 4° ed 8° (limiti di temperatura in cui caddero le pesate) col metodo della bilancia idrostatica, usando d' una palla di vetro del volume di 200 cc. Colle densità poi ricavate dalla (*a*) mediante questi primi valori abbiamo ricalcolate le esperienze della prima serie e calcolate quelle della seconda.

Ed ora saremmo tentati di trascrivere qui tutti i dati delle esperienze; ma pensando che un esempio fu già dato più sopra per l' acqua e che dovremmo riportare dieci grandi tavole numeriche, stimiamo conveniente di limitarci a riferire i risultati finali soltanto, che sono ad un tempo rappresentati nelle curve della tavola annessa e raccolti nello specchio qui sotto:

T	ClNa	ClK	$ClNH_4$	ClNa+ClK	$ClNa+ClNH_4$	$ClK+ClNH_4$
0°	1,0085685	1,0097051	1,0035687	1,0091400	1,0060648	1,0066362
0,25	+ 46	+ 62	+ 99	+ 53	+ 73	+ 83
0,50	85	116	191	100	139	155
0,75	117	162	277	138	198	219
1	140	199	352	167	246	274
1,25	154	225	413	187	284	318
1,5	159	242	462	198	311	349
1,75	154	250	499	199	327	372
2	141	249	526	190	334	385
2,25	118	238	544	174	332	390
2,5	86	218	554	149	320	387
2,75	45	188	556	115	300	374
3	— 8	149	550	71	270	353
3,25	72	99	534	15	231	320
3,5	144	40	510	— 51	183	278
3,75	226	— 30	477	129	125	226
4	312	108	435	211	59	166
4,25	—	193	381	298	— 16	97
4,5	—	281	316	—	98	20
4,75	—	—	242	—	181	— 65
5	—	—	161	—	269	160

([1]) Per correggere i pesi apparenti dei miscugli ci servimmo dei valori delle densità, che ottenemmo nelle esperienze stabilite colle soluzioni e loro miscugli preparati nel primo modo.

T	ClNa+ClK+ClNH$_4$	2ClNa+ClNH$_4$	ClNa+2ClNH$_4$
0°	1,0072808	1,0069098	1,0052291
0,25	+ 71	+ 65	+ 84
0,50	132	123	160
0,75	185	172	228
1	227	211	283
1,25	261	240	328
1,5	284	260	361
1,75	299	270	385
2	304	271	400
2,25	300	262	406
2,5	288	244	402
2,75	266	217	389
3	236	180	368
3,25	193	132	338
3,5	140	74	398
3,75	74	7	249
4	3	— 66	190
4,25	— 74	146	118
4,5	158	283	40
4,75	248	—	— 46
5	—	—	140

I numeri della prima colonna danno le temperature e quelli delle colonne successive esprimono in decimilionesimi le differenze ε, che la densità a T di ciascun liquido ha dalla rispettiva densità a 0°, segnata in testa alla colonna. Questi numeri furono trovati tracciando le curve, come nell' esempio dell' acqua, attraverso i punti rappresentanti i valori delle differenze fra la densità a T° ed a 0°, ottenuti per ciascun liquido nella prima e nella seconda serie di esperienze.

I valori delle densità a 0° delle soluzioni e dei loro miscugli rappresentano la media di tre distinte determinazioni. Due di esse fornirono i valori che servirono a dare le differenze ε, di cui le curve rappresentano il valor medio, ed una terza fu stabilita dopo le esperienze, credendo di poter togliere alcune piccole divergenze relative alla *corrispondenza*; dacchè sembrava strano che, come or ora diremo, verificandosi la regola con un accordo inatteso fra le curve, essa non si dovesse verificare collo stesso rigore anche fra i valori d' origine; ma queste divergenze non scomparirono.

Difatti, se poniamo a confronto per i miscugli i valori ε dati dall' esperienza con quelli calcolati mediante la media dei valori analoghi delle soluzioni primitive componenti i miscugli stessi, troviamo ch' essi sono, con una approssimazione superiore all'aspettativa, eguali fra loro. Ad esempio:

T	ClNa+ClK		ClNa+ClNH$_4$		ClK+ClNH$_4$		ClNa+ClK+ClNH$_4$		2 ClNa+ClNH$_4$		ClNa+2 ClNH$_4$	
	osserv.	calcol.	osserv.	calcol.	osserv.	calcol.	osserv.	calcol.	osserv.	calcol.	osserv.	calcol.
0°5	+ 100	+ 101	+ 139	+ 138	+ 155	+ 154	+ 132	+ 131	+ 123	+ 121	+ 160	+ 156
1	167	169	246	246	274	275	227	230	211	211	283	281
1,5	198	200	311	311	349	350	284	288	260	260	361	361
2	190	195	334	334	385	387	304	306	271	270	400	398
2,5	149	152	320	321	387	386	288	287	244	242	402	398
3	71	71	270	271	353	350	236	230	180	178	368	364
3,5	— 51	— 52	183	184	278	276	140	136	74	74	298	293
4	211	210	59	62	166	164	3	5	— 66	— 63	190	186

E tale *corrispondenza* ha luogo ancora per le densità a 0°, come qui sotto si osserva; ma con una coincidenza per qualche miscuglio meno perfetta;

Densità	ClNa+ClK	ClNa+ClNH$_4$	ClK+ClNH$_4$	ClNa+ClK+ClNH$_4$	2 ClNA+ClNH$_4$	ClNa+2 ClNH$_4$
Osserv.	1,0091400	1,0060648	1,0066362	1,0072808	1,0069098	1,0052291
Calcol.	1,0091368	1,0060686	1,0066364	1,0072808	1,0069019	1,0052353
Differ.	0,0000032	0,0000038	0,0000002	0,0000000	0,0000079	0,0000062

Tuttavia si può senz' altro stabilire, che le soluzioni in esame sono fra di loro *corrispondenti* per riguardo alla densità, cioè che le densità dei loro miscugli, composti colle stesse proporzioni del peso molecolare dei sali, corrispondono alla media aritmetica delle densità delle rispettive soluzioni, onde sono formati; e tale *corrispondenza* è rigorosamente mantenuta attraverso il massimo di densità.

Resta poi dimostrato che, dicendo μ il peso molecolare del sale, non solo pei miscugli binarî, ma ancora pei miscugli più complessi risultano nel caso nostro *corrispondenti* le soluzioni formate colle proporzioni

$$(\mathrm{ClNa})_{\frac{1}{5}\mu}, \quad (\mathrm{ClK})_{\frac{1}{5}\mu}, \quad (\mathrm{ClNH_4})_{\frac{1}{5}\mu};$$

le quali non corrispondono alle proporzioni indicate dal Bender (1)

$$(\mathrm{ClNa})_{n\mu}, \quad (\mathrm{ClK})_{n\mu}, \quad (\mathrm{ClNH_4})_{\frac{5}{4}n\mu}.$$

Egli stesso però ha espresso qualche incertezza su questa terza *proporzione*, e le sue esperienze furono istituite sulle densità a 15°, cioè molto al di là del *massimo*.

In secondo luogo, se prendiamo in esame i valori di ε, corrispondenti al massimo di densità, abbiamo che non si avvera più la relazione sovradetta, ma che il valore

(1) C. Bender, Ann. der Physik und Chem., N. F.; B. 22; S. 179, 1884.

osservato per ogni miscuglio è sempre inferiore a quello *calcolato* colla media aritmetica dei valori analoghi delle soluzioni primitive, come qui risulta chiaramente:

	T del massimo		differ.	$10^{-7}\varepsilon$ del massimo		differ.
	osserv.	calcol.		osserv.	calcol.	
$ClNa$	1,51	—	—	159	—	—
ClK	1,83	—	—	250	—	—
$ClNH_4$	2,68	—	—	556	—	—
$ClNa+ClK$	1,66	1,67	0,01	200	205	5
$ClNa+ClNH_4$	2,08	2,09	0,01	334	358	24
$ClK+ClNH_4$	2,27	2,26	0,01	390	402	12
$ClNa+ClK+ClNH_4$	2,02	2,01	0,01	304	321	17
$2\,ClNa+ClNH_4$	1,90	1,90	0	272	291	19
$ClNa+2\,ClNH_4$	2,28	2,29	0,01	406	424	18

In terzo luogo si rileva, ancora nella tabella qui sopra, che, se le soluzioni non sono *corrispondenti* per riguardo ai valori della densità massima, lo sono invece per rispetto alle temperature corrispondenti al massimo di densità. Cosicchè si può annoverare fra le costanti fisiche delle soluzioni, che danno luogo alla *corrispondenza*, eziandio il valore particolare della loro temperatura del massimo di densità, ovvero l' *abbassamento del massimo.*

E notiamo che tale *corrispondenza* ha luogo non solo per le temperature corrispondenti al massimo di densità, ma altresì per le temperature, cui spettano eguali variazioni di densità delle soluzioni, quando tali variazioni sieno prese fuori del campo del massimo.

Ad esempio, qui sono scritti i valori delle temperature, corrispondenti alle variazioni di densità 1×10^{-5}, 0, -1×10^{-5} (presa come origine la densità a 0°):

	ε	$ClNa$	ClK	$ClNH_4$	$ClNa+ClK$		$ClNa+ClNH_4$		$ClK+ClNH_4$		$ClNa+ClK+ClNH_4$		$2\,ClNa+ClNH_4$		$ClNa+2\,ClNH_4$		Diff. media
					osserv.	calcol.	osserv.	calcol.	osserv.	calcol.	osserv.	calcol.	osserv.	calcol.	osserv.	calcol.	
T per	1×10^{-5}	0,61	0,42	0,25	0,50	0,52	0,35	0,43	0,31	0,34	0,37	0,43	0,40	0,49	0,30	0,37	— 0,06
		2,40	3,24	5,16	2,84	2,82	3,85	3,78	4,24	4,20	3,65	3,60	3,39	3,32	4,31	4,24	+ 0,05
	0	2,96	3,65	5,43	3,31	3,31	4,20	4,20	4,56	4,54	4,01	4,01	3,78	3,78	4,61	4,61	0
	-1×10^{-5}	3,35	3,97	5,67	3,66	3,66	4,51	4,51	4,83	4,82	4,33	4,33	4,11	4,12	4,89	4,89	0

Per la variazione 1×10^{-5} abbiamo due valori di T, uno al di qua, l'altro al di là della variazione del massimo, dei quali nè l'uno nè l' altro presenta il carattere della *corrispondenza*; ma si discostano pressochè egualmente dalla media aritmetica, il primo in meno ed il secondo in più; mentre questa *corrispondenza* evidentemente si verifica per gli altri due valori surriferiti di T.

Cosicchè le curve sono tagliate in punti *corrispondenti* da un doppio sistema di rette; dalle rette parallele alle ordinate in punti *corrispondenti* rispetto alla densità in tutto il campo; dalle rette parallele alle ascisse in punti *corrispondenti* rispetto alle temperature di eguale variazione nella densità nel campo fuori del massimo.

È infine evidente che per le soluzioni *corrispondenti*, sia rispetto alle densità Δ_T, relative ad una data temperatura, che rispetto alle temperature T_ε, relative ad una data variazione nella densità, varranno le regole già incontrate per le soluzioni saline [1], cioè:

1° che le variazioni di Δ_T e di T_ε, che una soluzione produce mescolandosi a due altre, differiscono fra loro di una grandezza eguale alla variazione che queste altre due soluzioni producono fra di loro:

2° che le variazioni di Δ_T e di T_ε, che due soluzioni producono mescolandosi ad una terza, differiscono fra di loro di una grandezza eguale alla variazione, che quelle due soluzioni producono l'una sull'altra:

3° che la variazione di Δ_T e di T_ε, che una soluzione determina sul miscuglio di due altre è eguale ad un terzo della somma delle variazioni, che essa determina separatamente sulle due soluzioni del miscuglio.

7. Ed ora dalle cose suesposte possiamo concludere che:

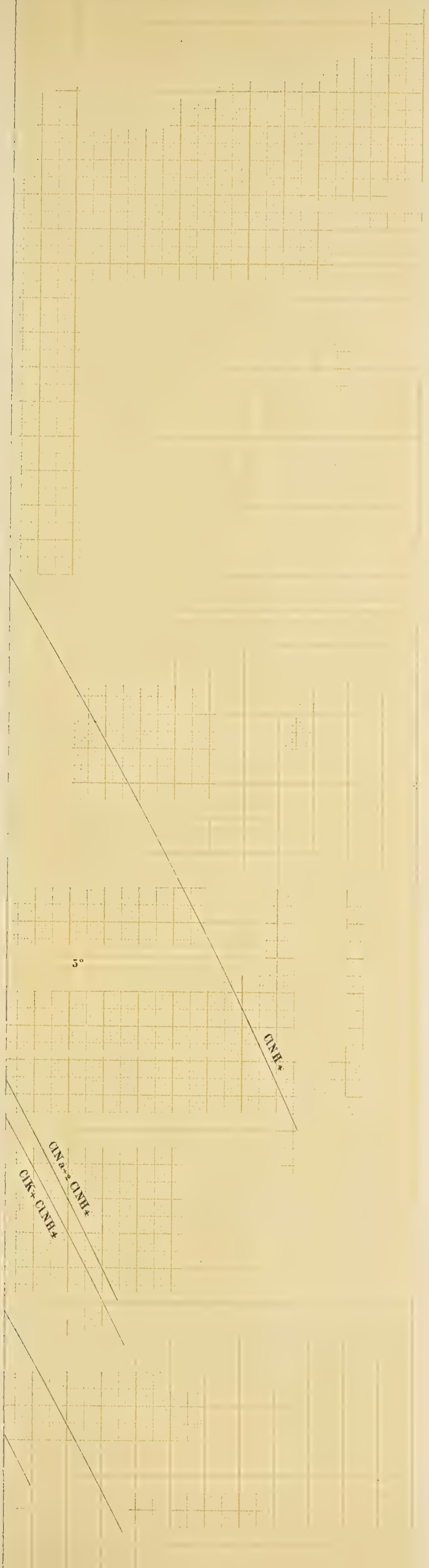
a) le variazioni di densità, che l'acqua distillata presenta alle temperature prossime al massimo, sono dalle tavole del Rossetti rappresentate con molta approssimazione;

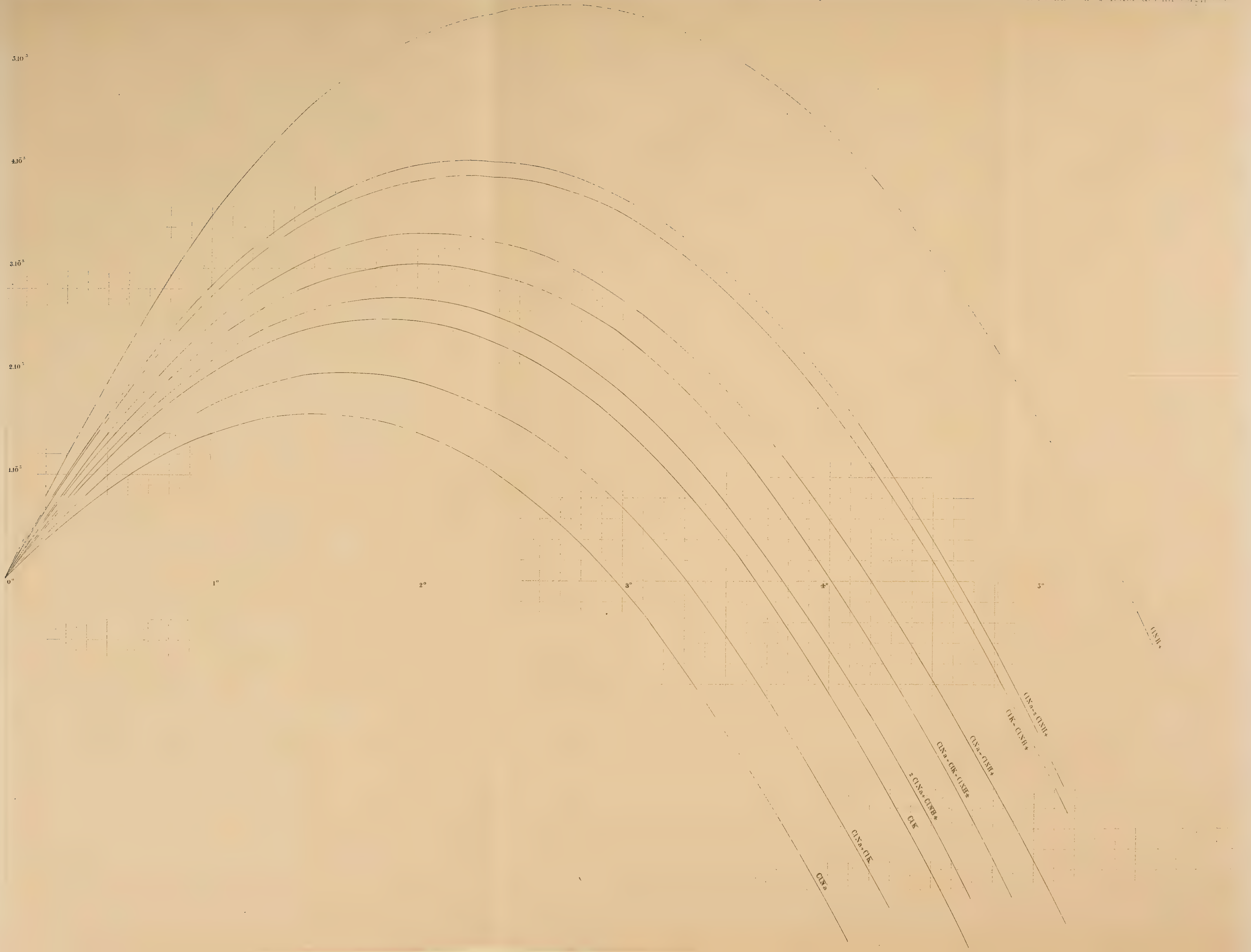
b) le soluzioni saline *corrispondenti* rispetto alla densità si conservano tali per ogni temperatura attraverso il massimo; e pertanto, poichè le temperature del massimo sono diverse da soluzione a soluzione, le densità relative al massimo non sono *corrispondenti*, ma quelle *osservate* sono inferiori a quelle *calcolate*;

c) le soluzioni saline *corrispondenti* si presentano tali anche rispetto agli *abbassamenti del massimo* e quindi ancora rispetto agli *abbassamenti molecolari*, che per le soluzioni *corrispondenti* sono a quelli proporzionali; inoltre esse sono *corrispondenti* rispetto alle temperature, cui corrispondono eguali variazioni di densità, contate da una stessa origine di temperatura; però la *corrispondenza* comincia ad aver luogo fuori del campo del massimo, ed entro di questo i valori *osservati* delle temperature, relativi a variazioni eguali nella densità dei miscugli, sono pressochè simmetricamente più piccoli o più grandi rispetto a quelli calcolati colla media aritmetica dei valori analoghi delle soluzioni primitive a seconda che siano prima o dopo della temperatura del massimo.

8. E da tutte queste cose resta sempre meglio posto in chiaro che, come gli elementi atomici *liberi* hanno, ad esempio, un caratteristico periodo di vibrazioni luminose, od *associati* recano nei composti i loro caratteri speciali, definiti e previsti dalla grande classificazione di Mendelejeff, così ogni molecola o gruppo molecolare ha *moduli* proprî rispetto ad ogni costante fisica, che direttamente manifesta, se la molecola è libera, o reca seco immutabili in ogni associazione con altre molecole omogenee od eterogenee, e di cui riappare sempre il valore costante, quando sia possibile, come nel caso delle soluzioni, di mettere in calcolo i fenomeni che accompagnano l'associazione.

[1] R. Accad. dei Lincei, Rendic. gennaio-marzo, 1886.


5°
ClNH4
ClNa+2 ClNH4
ClK+ ClNH4


5.10⁻⁵
4.10⁻⁵
3.10⁻⁵
2.10⁻⁵
1.10⁻⁵
0°
1°
2°
3°
4°
5°
ClNH₄
ClNa+2ClNH₄
ClK+ClNH₄
ClNa+ClNH₄
ClNa+ClK+ClNH₄
2ClNa+ClNH₄
ClK
ClNa+ClK
ClNa

Osservazioni e note sperimentali sulle mummie di Ferentillo.

Memoria del Socio A. MORIGGIA

letta nella seduta del 12 giugno 1887.

L'ultimo avvenimento, a cui serve di teatro il corpo dell'uomo e che lo priva perfino del titolo di cadavere, si è la disgregazione molecolare della sua compage organica, avvenga dessa fra la luce e lo scricchiolìo sull'ardente graticcio del crematoio o nell'oscurità e nel silenzio della fossa e del sepolcro; qui gli agenti fisici, i germi viventi, ciascuno strappa un lembo dalla massa inerte da essi circondata, ed invasa: un'armata di esseri invisibili, micrococchi, bacilli, vibrioni, spirilli, spore, dall'aria e dalla terra piombano sulla preda, veri artigiani di disorganizzazione, e nella morte trovano il rigolìo della loro vita, e così vien demolita in poche settimane un'architettura sempre meravigliosa, e talora secolare: e sotto forma di sali, vapori e gas, i materiali ne vanno dispersi nel seno della natura, a beneficio di altri viventi, ed a conforto del ciclo di circolazione della vita.

Non sempre però l'uomo si è rassegnato a lasciarsi così strappare e distruggere le fattezze de' suoi cari: è da millenî, che coll'imbalsamazione si è cercato di dare una specie di perennità all'invoglio corporale, conservandolo agli sguardi ed al culto dei viventi (¹).

La natura medesima sembra essere stata l'inspiratrice e la maestra della operazione, non mancando terre, caverne e sepolcri, dove senza l'arte, i cadaveri rimangono per se stessi preservati, e si direbbe imbalsamati (²).

Tra consimili terre, omai è da secoli, che va famoso il cimitero di Ferentillo, per la sua grande potenza a sottrarre le spoglie umane dall'edace dente del tempo,

(¹) Oltre gli Egiziani, si occuparono di questo argomento e con splendidi risultati, o pel cadavere intiero o per visceri isolati, i nostri italiani, tra cui basti citare Segato, Gorini, Marini, Brunetti ecc.

(²) La mummificazione ricorda pure due altri processi, pei quali la natura è capace perfino a raggiungere il medesimo scopo nei corpi ancora dotati di vita: coll'ostacolare od impedire l'arrivo degli umori animali ad una parte dell'organismo, si finisce per portarla alla cosidetta *cancrena secca (senile, ergotica)*, che in fondo non è che una specie di mummificazione sul vivo. Lo stesso si deve affermare pel *litopedio, foetus papyraceus;* in gravidanze eccezionali e specialmente nelle estrauterine, talora morto il feto, assòrbiti dalla madre gli umori proprî del medesimo, e quelli che lo circondano, finisce per caricarsi di sali, impiccolirsi, essiccarsi, senza putrefazione e senza quasi alterarsi i tessuti: la madre, come scrive Burdach, «non potendo sbarazzarsi del frutto del suo ventre, lo dissecca, lo mummifica, e gli fabbrica una tomba di pietra, conservandolo talora nel proprio seno anche per diversi lustri».

portandole al piu perfetto grado di mummificazione, che si conosca. Di simili mummie, ancor meglio, che per l'altre del convento dei cappuccini nei dintorni di Palermo, si potrebbe scrivere con Pindemonte (*Sepolcri*)

. . . . come
Simulacri diritti, intorno vanno
Corpi d'anima voti. . . . .
. . . .
. . . . le sembianze antiche
Non che le carni lor serbano i volti
Dopo cent'anni e più. Morte li guarda,
E in tema par d'aver fallito i colpi.

Medici, naturalisti, fotografi e profani curiosi si sono spesso dilettati di vederle, studiarle e ritrarle ([1]). Nel paese si afferma, che, lo stesso Napoleone I se n'ebbe ad occupare.

L'intelligente amministrazione comunale di Ferentillo, che tiene assai a questa specie di privilegio conservatore posseduto dal suo antico Cimitero, mosse lodevole istanza presso il Ministero dell'interno e della pubblica istruzione, perchè direi in via ufficiale si venisse sul luogo medesimo a constatarne gli ammirevoli effetti di mummificazione, nonchè, ove possibile, le cagioni di essa: massime che omai non si seppellisce più in siffatto cimitero, e le mummie esistenti, per circostanze speciali, come sentiremo, potrebbero perdere e perdono della loro conservazione.

Anzi parlando della potenza mummificatrice di detto cimitero coll'egregio e gentile Sindaco di Ferentillo, ebbe a manifestarmi, che in caso di morte di eminenti personaggi, lui ed il paese sarebbero stati orgogliosi di ricettarli nella loro terra preservatrice, e così concorrere pel meglio a mantenerne integra la salma e l'effigie all'affetto ed al culto dei presenti, e delle future generazioni: nè è senza fondamento la nobile ed umanitaria aspirazione, poichè, come si vedrà, il processo di naturale mummificazione è tale, che sotto certi aspetti, non soffre confronti coll'imbalsamazione.

S. E. il Ministro Coppino accogliendo i desiderî di Ferentillo, e sapendo, che io già altra volta col senatore Maggiorani in via privata mi era occupato di tale argomento ([2]), gentilmente mi volle affidato l'incarico di fare opportuna visita sul luogo, che eseguii nel luglio 1885: ebbi colà ogni sorta di cortesie e facilitazioni a miei studî, per parte dell'autorità comunale ed ecclesiastica, e qui pubblicamente ne faccio i ringraziamenti.

Innanzi di scendere alla descrizione dei fatti rilevati, parmi utile premettere breve descrizione di Ferentillo e del suo Camposanto.

Il fiume Nera, che nelle vicinanze di Orte si versa nel Tevere, scorre in una pittoresca valle, in varî punti, ristrettissima, e poco sopra l'industre città di Terni, convogliando le sue acque con quelle del Velino, viene a dar luogo alla magnifica cascata

([1]) Ancor ultimamente il valente fotografo prof. Pompeo Pesciaroli ne ritrasse ben riuscite tre insieme ed avendomene gentilmente offerti due esemplari, mi recai a premura presentarne uno a questa medesima Accademia dei Lincei.

([2]) *Sulla mummificazione de' cadaveri, osservazioni del prof. C. Maggiorani e del prof. A. Moriggia.* Atti della R. Accad. dei Lincei, 1872.

delle Marmore. Le acque del Nera e del Velino sono *molto calcarifere*, di ciò si ha una prova nelle incrostazioni lasciate anche attualmente sui terreni o sulle roccie incassanti. Andando a ritroso della corrente, al di là del punto, ove il Nera ed il Velino confluiscono, la valle, che dapprima si era venuta man mano così restringendo, che in alcuni tratti le sue pareti quasi stanno a perpendicolo, si allarga come in una specie di anfiteatro: fra i paesi, che ne coronano le alture havvi Castel di Lago, che ricorda col suo nome l'esistenza di quel bacino. Poi la valle di nuovo si rinserra, ed in guisa, che sembra il Nera farsi strada attraverso un'enorme spaccatura dei monti, da cui sfugge mugghiando. Proprio in quella stretta (2 ore circa di vettura salendo da Terni) è piantato lo scosceso paese di Ferentillo, metà sulla sponda destra e l'altra sulla sinistra: egli è in questa ultima che trovasi il cimitero, il cui uso è soppresso da circa 12 anni; in sua vece se ne costrusse un altro fuori del paese, come vuol la legge: il primo però sta ancora in molta venerazione e pel culto dei morti, e per la celebrità di cui gode (1). Il cimitero è fabbrica del secolo undecimo o duodecimo, che destinata in principio all'ufficio di chiesa, fu convertita circa duecento anni fa in abitazione dei morti. Il luogo si trova elevato di circa 30 metri dalla sottoposta pianura, in parte isolato: in buona parte è scavato nel masso vivo del monte: salendo alcuni gradini, vi si entra per porta ampia, ed esso si trova misurare in lunghezza circa metri 24; in larghezza quasi 9; in altezza circa 2 $^1/_2$. Una volta reale lo finisce in alto; l'aria vi è piuttosto fresca ed asciutta, come rilevarono il termometro, l'igrometro, il cloruro di calcio ecc. (in luglio gradi centes. 21 dentro, e 28 fuori all'ombra). Tre o quattro feritoie o finestre (aperte) praticate dal lato lungo del quadrangolo al mezzodì assicurano qualche poco di luce ed una continua e libera ventilazione: esse sono in faccia ad una montagna verde per olivi ed altre piante, e danno direttamente in una piccola e stretta valle, che poco lungi fa capo nel Nera, e nella quale sempre è vivace la corrente d'aria. L'altro fianco lungo del quadrangolo è senza aperture, più buio, e meno asciutto.

La terra del cimitero si presenta come una sabbia fina, asciutta, asciutta, con qualche sassolino e molti altri più piccoli con aspetti di calcinaccio.

La terra riempie buona parte dell'antica altezza della chiesa. D'onde è venuto tanto terreno di riempimento? In parte dall'antica chiesa diroccata? In parte vi sarà stata trasportata da fuori? (2).

La terra del cimitero, secondo l'analisi del chimico Vincenzo Latini, presenta sapore salato amarognolo, piuttosto pungente, senza effetto sulle carte reatorie; in 72

(1) Il dott. G. Mari, preside dell'Istituto tecnico di Cuneo, risaputo che io mi occupava del presente argomento, gentilmente me ne scrisse in proposito, accennando d'aver pur esso vedute le mummie, anzi mandandomi un suo articolo (Gazz. d'Italia 7 agosto 1887), in cui con brio ed erudizione, e non senza rilevare fatti importanti, vien narrando i risultati della sua visita al detto cimitero: anzi la descrizione sopra esposta di Ferentillo è appunto tolta, abbreviandola, dal suo pregevole lavoro.

(2) L'egregio capitano del Genio A. Verri ben conosciuto anche pe' suoi rimarchevoli lavori di geologia, in una gentile lettera a proposito dell'argomento, di cui si tratta, mi scrisse nel 1885 tra l'altre cose, questo: « da 7 anni abitante in Terni, ed occupatomi qualche poco della geologia locale, ebbi sempre la convinzione che la terra, nella quale si compie il processo di essiccazione dei cadaveri (cimitero di Ferentillo) sia stata portata da fuori: non mi parve ammissibile supporla prodotta dal disfacimento delle roccie lisiache, giuresi e cretacee componenti il monte ».

grammi trovò nitrati e cloruri (calcico, magnesiaco, ammonico) grammi 6: silicato d'allumina e di ferro, e solfato calcico, grammi 27: carbonati e fosfati (calcico e magnesiaco), 24: sostanza organica 15.

Secondo un saggio d'analisi da me instituito (25 anni dopo la citata analisi), l'*humus* risulterebbe un pochino più abbondante.

Confrontando poi la terra del cimitero con quella della vicinanza di fuori, si trova tra l'altre differenze che la prima è un po' più ricca in *humus* ed in sali calcarei, locchè potrebbe benissimo essere dipendente dal disfacimento di alcuni cadaveri.

Sebbene l'esame chimico di siffatte terre meritasse uno studio più dettagliato, però è già lecito conchiudere, che la grande abbondanza in sali calcarei non può mancare di avere una certa parte nel fenomeno della mummificazione.

La terra del cimitero contiene poche spore, bacilli e micrococchi, e benchè non abbia creduto di eseguire numerazioni precise, nè saggi di coltivazioni frazionate, pure si può affermare con qualche fondamento, che da questo lato si è lontani dai risultati annunciati da Miquel per altre località (*Les organismes vivants de l'atmosphère*, Paris, 1883).

Lo stesso si debbe affermare per l'aria del cimitero e per quella di fuori; io ne feci passare alcune centinaia di litri con opportuno apparecchio attraverso una soluzione assai allungata di bicloruro di mercurio: nè l'una nè l'altra mi parvero molto ricche di microrganismi, almeno così all'ingrosso, non avendo creduto che lo studio della mummificazione da me propostomi, mi obbligasse ad andar oltre per questa direzione. E giacchè mi venne di parlare dell'importante lavoro di Miquel non credo fuor dell'opera, rapportare qui alcune cifre trovate da cotesto paziente ed esperto osservatore, onde farsi un'idea in genere della popolazione microscopica dell'aria e della terra, sebbene il numero delle spore e de' microbi debba variare in larghissima scala per cagioni diverse, tra cui l'umidità, il calore, i venti, le stagioni, la natura del suolo e sua profondità ecc.

In quanto al suolo finora sono scarse le analisi intraprese; è conosciuto, che a profondità maggiore, i microrganismi decrescono in numero; eppure tali ricerche sarebbero assai interessanti anche per l'agricoltura, stante l'immenso lavorìo di cui sono capaci sui materiali della terra, e le profonde modificazioni, che col tempo vi possono indurre.

In un gramma essiccato di *humus*, Miquel afferma di avervi riscontrati circa un milione di bacteri (calcolando solo i vivi, capaci cioè ad agire sui liquidi sterilizzati di coltura), per cui sul suolo già una testa di spillo ne coprirebbe delle centinaia.

Al Laboratorio di micrografia dell'Osservatorio di Montsouris, trovò, che dall'aria ne cadono vivi nei recipienti *ad hoc* 2400000, per metro quadrato e per giorno: fuori però, nel parco di Montsouris soltanto 23000; di spore trovò circa 14000 in un metro cubo d'aria: esse sono numerose specialmente in estate; riscontrò 4000 microbi per metro cubo d'aria in una camera da letto *pulita* al 3° piano in contrada spaziosa ed anche il doppio in inverno (a cagione di minor ventilazione per le finestre chiuse). Negli ospedali di Parigi salirono anche a più di 11000 per metro cubo d'aria: assai meno numerosi però nell'aria libera delle contrade; nell'acqua di pioggia (per litro) 64000;

nell'acqua della Senna 48 milioni, ed in quella delle fogne 80 milioni. È meravigliosa tanta diffusione di microbi, e come ce l'indicano anche le malattie dei vegetali e degli animali, pare che oggi più che mai, la terra vada via diventando preda degli infinitamente piccoli, e dotati di potenza favolosa di generare, per il che sarebbe da far voti, che a beneficio dell'agricoltura, della scienza e dell'umanità, s'impiantassero anche in Italia diverse stazioni applicate allo studio continuo di questo regno animato e potente e delle sue vicissitudini.

Ritornando al nostro cimitero, nell'entrare s'incontra una specie di vestibolo, senza feritoia, più scuro, ed un poco meno asciutto; ci si sente colpiti da un'aria fresca ma non umida e quel che torna più singolare (è pero vero, che il cimitero è da un po' di tempo abbandonato), senza puzza alcuna, ad onta di tante spoglie umane sotterrate e libere sul suolo; appena è, se senti, come ben dice il dott. Mari, un odore come di legname ammucchiato in sotterraneo.

I lati del vestibolo sono ingombri di tavole e di bare vuote, ritte contro il muro, asciutte, senza *muffe* apparenti, col color naturale del legno, e benchè talune antiche, ancor assai bene conservate, per di più *leggerissime;* sebbene il confronto non si possa fare perfettamente, pure è stata questa la prima e grande impressione, che io m'abbia ricevuto intorno alla potenza preservatrice di siffatto luogo, avendo pur troppo sempre presente la orribile puzza cadaverica e l'alterazione delle casse mortuarie, come ebbi occasione di verificare in Roma per esumazioni di diversi cadaveri umani, e di animali avvelenati questi e seppelliti espressamente per certi lavori intrapresi dalla R. Commissione, di cui faccio parte fino dal 1880, per l'accertamento della prova generica nei reati di veneficio, onde portare qualche luce alla giustizia intorno alla capitale quistione, che nei casi di avvelenamento si vien sempre agitando, se cioè il veleno trovato ne' cadaveri vi sia stato introdotto da fuori, o non sia, che il portato naturale della putrefazione stessa del cadavere.

I morti vi si soleano seppellire vestiti, taluni incassati, altri non, secondo condizione sociale, alla profondità di un metro e spesso anche meno: dopo un anno o poco più, se levati da terra, già si trovavano mummificati; le mummie estratte venivano collocate ritte in piedi contro il muro dello stesso cimitero. Le migliori mummie venivano fornite dai cadaveri seppelliti in corrispondenza e non troppo lontani dalle finestre.

Nell'altro lato del cimitero, senza finestre, vi stanno casse immurate di sacerdoti, e questi cadaveri in generale riuscivano men bene.

Non essendo grande l'area complessiva del cimitero, nè tutta adatta all'interramento, e la popolazione di circa tremila, la rotazione pel seppellimento dovea esser abbastanza rapida.

I cadaveri non bene mummificati, e le mummie rotte nello scavare o per altre ragioni, insieme alle ossa provenienti da mummie già estratte e scomposte per cagioni diverse, e specialmente per opera di acari e topi, venivano riunite in una catasta dentro al cimitero, senza che per questo l'aria ne andasse infetta, od in modo speciale puzzasse. Io asportai pel mio laboratorio un cranio antichissimo e magnificamente conservato. Anzi e pel buono stato, in cui si riscontrano quelle ossa, e per istudî antropologici, il dott. Sergi, prof. di antropologia a Roma, desiderando una collezione di

100 simili cranî, scrissi a Ferentillo di questo suo desiderio scientifico, e quel Municipio generosamente lo soddisfece.

I cadaveri si presentano così bene mummificati da conservare distintamente i lineamenti del volto e potersi, come scrisse il senatore Maggiorani, dopo lungo intervallo di tempo, determinare ancora la identità della persona: havvi una mummia centenaria, in cui i discendenti ravvisano a colpo d'occhio le fattezze di famiglia.

La cute dissecca, ma non s'incolla del tutto alle ossa, d'onde avviene, che l'abito del corpo si allontani meno da quello che fu alla morte.

La sporgenza de' zigomi, e gl'infossamenti alle guancie non sono troppo marcati: le cose però variano in grado, secondo il periodo della mummificazione. Il color delle mummie inclina al giallognolo, e si diparte poco dalla tinta naturale dei cadaveri.

I capegli, la barba, le ciglia, i peli delle ascelle e del pube, le unghie, i denti rimangono ad ornare le regioni, dove sono distribuiti: gli occhi non sono ben conservati: le mummie non danno odor di muffa, nè muffe appaiono all'occhio sulla pelle: si osserva qualche piccola chiazza bianchiccia specialmente dove poggiava il cadavere nella cassa: si tratta di sali calcarei.

Disseccati e rasciutti i tessuti da parere quasi di carta pecora: le articolazioni irrigidite di maniera, che il corpo è tutto d'un pezzo ritto, come fosse in tetano, e si può trattare a modo di un palo.

V'hanno delle mummie alte, che a sollevarle ti crederesti incapace, o per lo meno parrebbe da prepararsi ad un grande sforzo, mentre in realtà le si sollevano, come si trattasse di corpicciuoli di bambini.

Una mummia che misurava ancora in altezza (partendo dal calcagno, essendo sempre il piede inclinato in modo da poggiar sulla terra colla punta delle dita) metri 1,64, non pesava, che chilogramma 7; un'altra disseppellita da molto tempo, ne pesava 6, misurando in altezza 1,50. Varia però assai il peso, secondo il grado di mummificazione: non son che le mummie centenarie quelle che si riducono a tanta leggerezza.

Burdach (*Trattato di fisiologia*, tradotto in francese, vol. V, pag. 448) riferisce, che una mummia naturale, di 180 anni, pesava 10 libbre (tedesche): non riporta la località, nè l'altezza della mummia. È veramente sorprendente la leggerezza, che può toccare per tal modo il cadavere, mentre quello fresco di adulto pesa in media chilogramma 65, dei quali, pur calcolando tutta svaporata l'acqua rappresentata da circa $\frac{7}{10}$, dovrebbero residuare quasi 20 chilogrammi in parti solide: considerando poi lo scheletro da solo, essiccato, senza midollo, cartilagini, periostio ecc., esso pesa già per sè da 5 a 6 chilogrammi, che colla cremazione si riducono a circa 3.

Bisogna dunque pensare, che oltre l'essiccamento, le mummie patiscono perdita di sostanza propria organica, e tanto più ciò si deve affermare, riflettendo al ricco polviscolo atmosferico, che le invade, ed al numero sterminato di microrganismi, che le varie parti della mummia, esaminate, presentano; le quali parti tutte concorrono nel peso totale delle mummie. Questo fatto è da ascriversi al lavorìo di microbi, d'ifomiceti e finalmente di acari, nonchè alle svariate fermentazioni, che avvengono nelle fasi della mummificazione.

Io segai il cranio a diverse mummie, onde scoprire cosa fosse avvenuto del

cervello: e questo io trovai sempre quasi del tutto distrutto: ridotto a pochissimi grammi (7 a 15), mentre nell'adulto fresco peserebbe circa grammi 1400, da cui pur deducendo ad essiccamento completo, circa l'80 % (parte acquosa), dovrebbero residuarne ancora circa grammi 280.

Forse come nei cadaveri ordinarî qualche parte di cervello potrà esserne uscita sotto forma di melmosa poltiglia per le occhiaie, concorrendo a guastare gli occhi: talora una parte di liquido animale pur si perde da certe regioni della pelle del cadavere, in corrispondenza delle parti più declivi del medesimo, massime quando questo è collocato sul fianco: se il cadavere si trova in contatto colla terra, ne succede una specie d'impasto alla pelle, come è a vedere anche per il vestito quando è assai stretto al corpo.

Gli Egiziani, maestri antichi d'imbalsamazione, già conosceano il facile guastarsi del cervello, e ne lo esportavano per mezzo delle cavità nasali od anche dalle occhiaie: anche nel *foetus papyraceus*, di cui si disse, è conosciuta la quasi refrattarietà ad essiccarsi del cervello.

Del resto, specialmente per quanto riguarda le ossa, è stato da lungo tempo constatato, che le fossili diminuiscono nella loro parte organica, ed alcuni sali perfino mutano di natura. Nei cranî pompejani (*Crania pompejana*, Memoria di G. Nicolucci, Atti della R. Accad. delle scienze in Napoli 1882), secondo le analisi del prof. Lehman, la sostanza organica era ridotta anche al minimum di 12 % con discreta quantità di fluorato calcico (3, 14 %).

Le mummie di Ferentillo sorpassano assai quelle del cimitero del convento dei cappuccini nei dintorni di Palermo, quelle del convento degli stessi frati in Roma, ed anche l'altre della chiesa di Venzone nel Friuli, se, come scrisse il dott. Pari, la mummificazione vi si verifica soltanto in alcuni dei tumuli esistenti, e per di più i cadaveri e le mummie presentavano sulle superficie dei piccoli funghi bianchi.

L'aspetto d'insieme delle mummie di Ferentillo non ispira quel disgusto, che sogliono eccitare i corpi morti conservati coi mezzi dell'arte, come è a vedere per es. nelle classiche mummie d'Egitto.

La mummificazione oltre di non costar nulla, mentre l'imbalsamazione in Egitto andava da L. 1500 a L. 4500 per cadavere, secondo condizioni sociali, salvo pei poveri, per i quali era a gratis, richiedea un maneggiamento di cadavere di 80 a 90 giorni negli stabilimenti ad *hoc*; spesso occorrea il sagrificio oltre del cervello, di tutti i visceri del petto e del ventre, dove si sostituivano con sostanze bituminose, od aromatiche antisettiche: e sebbene i metodi odierni d' imbalsamazione sieno molto più semplici e spicci, sempre però son costosi, nè tutti i cadaveri ne sono ben capaci.

Le mummie d'Egitto, specialmente quelle ottenute col bitume sono nere, pesanti, colle fattezze meno bene conservate; i ricchi ed i personaggi distinti riuscivano però un po' meglio, perchè imbalsamati specialmente cogli aromi, oltre della solita immersione per 70 giorni nel natro [1] e quindi la fasciatura.

Ultimamente fu trovata ancora discretamente conservata dopo 40 secoli la famosa mummia di Ramsete II (Sesostri), ma la pelle è color di terra, e qua e là con chiazze

(1) Un misto di carbonato, solfato e muriato sodico.

nere: essa venne alla luce per cura del celebre egittologo prof. Maspero, e collocata nel Museo di Boulag.

Anche i cadaveri trovati essiccati nelle sabbie cocenti del Sahara si presentano male conservati; sarebbe impossibile riconoscere la fisionomia naturale: non differiscono dagli scheletri, che per la cute, che ancora li ricopre.

In ogni modo però anche se fosse alla mano il processo di mummificazione, come quello dell' imbalsamazione, in via economica ed igienica non sarebbe mai desiderevole elevato a metodo generale.

A tal uopo basterà solo pensare alla recente statistica, quale fu comunicata dal dott. H. Brugsch alla Società geografica di Francoforte, dalla quale risulta il numero delle mummie egiziane salire a circa 600 milioni, di cui molte esportate dagli Arabi e dagli Europei.

La fantasia rifugge dal pensare l'area, che occorrerebbe sulla terra colle presenti popolazioni addensate, per cui anche senza averne molta voglia, si presenta naturalmente il problema della cremazione.

Non tutte però le mummie di Ferentillo sono ugualmente ben conservate; alcune anzi vanno in isfacelo, e stupisce come le altre possano conservarsi tanto bene e per anni e secoli, abbandonate come sono, senza cura d'arte alcuna, alla polvere, agli insetti e peggio ai topi; io penso, che giunte a perfetta mummificazione curandole con opportuni liquidi, con vernici e con adatto governo per l'aria ambiente, si potrebbe conservarle quasi indefinitivamente e belle come vengono estratte dalla terra. Ora ve ne sono buone da circa 30 a 40 di diverse età, ed in diverso grado di mummificazione.

A questo proposito feci l'osservazione, che le mummie state a lungo sotterra, sono quelle, che resistono assai più tenacemente al lavorìo demolitore del tempo, e vengono meno intaccate dagli animali.

I cadaveri troppo carichi di vestiti, specialmente se questi sono assai stretti, si conservano men bene.

I cadaveri sepolti più superficialmente come pure quelli sepolti in cassa, si conservano meglio, che interrati: meglio poi i vecchi o morti dimagriti; però come si sentirà, io esportai una bellissima mummia di soggetto giovine, quantunque grasso assai e muscoloso, locchè si potea ben constatare, in grazia del processo di mummificazione poco avanzato.

I sacerdoti non vengono sepolti nella terra del cimitero, ma le casse sono murate e sopraposte le une alle altre, ove occorra, lungo il lato cieco del cimitero, che è anche il meno ventilato ed asciutto: ebbene in generale la conservazione non va compagna colla distinzione di sepoltura: un cadavere di sacerdote murato da circa 20 anni, avea conservato bene il fianco superiore, mentre l'altra metà inferiore del corpo era un poco guastata, essendo la cassa stata messa in modo, che la salma vi giaceva di costa: il fianco conservato fu quello, che era volto in aria: le casse degli ordini inferiori erano meno bene conservate.

Un altro caso abbastanza istruttivo ebbi a verificare di cadavere sepolto in terra da circa 15 anni, il quale non portò mummificato, che il ventre e le estremità inferiori, mentre il resto andò in isfacelo, e ciò perchè la sepoltura era avvenuta in troppa vicinanza di una finestra, colla testa precisamente volta a questa apertura, in modo che

entratavi della pioggia, si venne a guastare quanto si trovava nel pezzo di terreno soggetto ad inumidirsi.

Questo è uno tra i molti fatti, che debbono aiutarci a spiegare certe apparenti e singolari eccezioni, per quanto riguarda la mummificazione: vedremo più oltre, quanto sono numerosi i fattori che concorrono in questo processo, e mancandone qualcuno dei più influenti, gli altri non bastano a condurlo a termine, ed allora si presenta quasi coll'apparenza di scherzo o di capriccio di natura, quello che non è in fondo che il portato naturale delle condizioni, in cui si trova il cadavere; anche qui l'eccezione viene a confermar la regola: simili eccezioni si riscontrano non solo a Ferentillo ma in molte altre località adatte alla mummificazione, ed ancora ultimamente il mio antico allievo, ed ora distinto professore a Camerino, prof. F. Legge, mi scrivea che ivi nel sotterraneo della chiesa di S. Annunciata tra le mummie si riscontrano cadaveri non mummificati; anzi Thouret e Fourcroy c'informano, che si trovarono delle mummie naturali nell'esumazione del cimitero degl'Innocenti, in terreno umido, fra altri mucchi immani di cadaveri non conservati.

A scopi d'indagine esportai diverso materiale: varî pezzetti presi a diverse regioni di mummie state tempo differente sottoterra, e da non egual tempo estratte, anzi annuenti le autorità ecclesiastiche e civili, portai meco una mummia intiera (femmina di circa 12 anni, e forse da altrettanto tempo mummia), da pochi mesi estratta dalla terra.

La mummia, benchè piccola, pesa assai, perchè grassa-muscolosa, come si scorge coll'occhio, e meglio palpando le polpute coscie e natiche, e come dappoi si confermò coll'esame anatomico-istologico: ora la si conserva nel Laboratorio, dopo averle aperto il cranio, il petto, ed il ventre in guisa da poterla studiar dentro, e richiudere dappoi queste cavità, senza che quasi appaia lesione alcuna esterna.

Non possedendo materiale appartenente a mummie di abbastanza svariate fasi di tempo, anzi conoscendo in generale poco intorno al tempo, in cui i cadaveri erano restati sottoterra, o liberi dappoi nel cimitero, ho cercato supplire a queste deficienze col far seppellire animali nella stessa terra a diverse profondità per durate varie ed in condizioni svariate (cioè a nudo, con piume, o con panni, in cassette o senza) poichè non seppellendovisi più cadaveri, non mi restava, che questa via, che m'ha anche condotto a ritardare la Relazione finora a S. E. il Ministro Coppino sul mio operato (1).

Per mezzo di tagli, isolamenti, e liquidi diversi, esaminati pezzi di pelle, muscoli, visceri, attinenti a mummie scavate la maggior parte da tempi immemorabili (2), venni pressochè ai medesimi risultati, se si eccettua una copia minore di muffe, che insieme al compianto senatore Maggiorani, ebbi già altra volta a trovare ed esporre, per cui non credo qui di ripetermi. Volli però cercare in modo speciale il contenuto dei cranî: esso era ridotto ad una sottile focaccietta, polverosa, friabile, grigio giallorossastra, costituita da grasso, mielina, colesterina, polviscolo minerale, sporule per lo più senza

(1) Mi corre qui l'obbligo di ringraziare in modo speciale il distinto collega Egisto Lucchi, dottore di Ferentillo, il quale con estrema gentilezza e precisione s'incaricò di tutte le operazioni occorrenti per cotesti seppellimenti di animali, nonchè del loro invio in Roma.

(2) Non voglio lasciar sfuggire quest'occasione per dire due parole in lode del mio primo assistente dott. Magini, nonchè del secondo assistente dott. Marchesini, i quali con zelo ed intelligenza mi coadiuvarono nelle ricerche, e specialmente il dott. Magini colla ben nota sua abilità tecnica.

ifi, qualche acaro, ed ovicini e da un numero sterminato di micrococchi, bacteri, bacilli: a cagione di alcune granellazioni nerastre si tentò la reazione per l'emina, ma invano.

Merita esame più lungo la mummia portata in Laboratorio: il cadaverino mostra ancora adesso e nel collo e nella faccia, segni distinti di male sofferto in quelle regioni: il color della pelle era paglierino, i lineamenti, benchè un po' contorti per le sofferenze della detta località, facilmente riconosciuti dai parenti e conoscenti: questa recentissima mummia facea strano contrasto con le altre più vecchie.

Pel suo peso maggiore e per la ricchezza delle parti molli, si sarebbe detto un cadaverino fresco fresco, sebbene contasse circa 12 anni passati sottoterra: non tramandava puzzo, o meglio dirò tenea odor di vecchio cacio: però nel Laboratorio nei mesi caldi cominciò esser invaso da tarli, e puzzare un poco, cosicchè si dovette ricorrere a speciali liquidi e vernici per conservarlo ulteriormente, e tale ora si mantiene, come già lo poterono constatare diversi distinti osservatori, tra cui il prof. Bizzozero, Golgi; se la mummia fosse rimasta libera nel cimitero di Ferentillo, è certo che si sarebbe ben conservata pur proseguendo le ulteriori fasi di essiccamento e di mummificazione.

La mummia presentava alla superficie un lieve polviscolo, color tabacco, che raccolto con pennellino, e studiato, si mostrò composto da polviscolo inorganico, sporule, ifi, acari, ovicini.

Nel cranio si trovò qualche traccia di dura madre, ed una crosta sulla base di esso non perfettamente secca, un po' untuosa al tatto, fatta nel modo già descritto: tra i micrococchi si trovarono anche dei macrococchi e diplococchi, il tutto ben colorantesi col violetto di genziana (metodo a secco).

Guardando e toccando nel petto si trovano i polmoni neri, sottili, a modo di lamine attaccati alla trachea e rattratti al dorso, con nel mezzo un pacchettino piccolo, leggero, giallo-nerastro (cuore e vasi).

Nell'addome, la visceratura si può dire è raccolta tutta insieme in basso: vi si distingue bene specialmente l'intestino ridotto come a budella seccate di maiale: si presenta a pareti giallognole e quasi trasparenti: messo un pezzo in acqua calda, si rigonfia e presenta lamine diverse: il parenchima dei visceri è come scomparso e ridotto quasi ad invoglio membranoso sottile: il diaframma, che fa alta cupola in alto, diventò sottilissimo e mostra un largo vuoto tra esso ed il pacchetto generale dei visceri in basso.

Di questa mummia si studiarono largamente la pelle, i muscoli, i polmoni e le intestina: tra i liquidi specialmente usati, oltre le materie coloranti, è da citare il miscuglio acetico forte di Moleschott, l'alcool, la potassa 40 $^0/_0$.

I muscoli si presentano molleggianti a modo di cera, non friabili, di colore rosso assai scuro: la fibra giallognola si presta assai bene alle colorazioni: alcune fibre presentano la striatura distintissima, ed altre, appena accennata: non mancano sporule ed ifi.

Nella pelle alcune papille stanno ancora coperte da epidermide, si vedono tracce di ghiandole sebacee giallognole, cellule adipose raggrinzate, fasci connettivi assai belli e fibre elastiche: qualche vaso e nervulo: qua e colà talora sparsi, e tal'altra come a gruppi delle sporule piccole giallognole, aschi incolori, taluni isolati, altri in continuazione con ifi, alcuni con sporule, altri senza.

In alcuni siti nell'altezza della pelle gli ifi sono intrecciati da costituire un micelio: degli ifi ve n'ha di diversa larghezza: alcuni assai sottili, ed omogenei, altri con articoli o spore dentro, acari rari, micrococchi e bacilli rari assai.

Nel polmone si vedono bene gli alveoli, qualche vaso e nervulo, sporule ed ifi pochi, qualche micrococco, acaro ed ovicino.

Nell'intestino, qualche discreto villo, belle fibre lisce isolate ed in nastricini: tracce di ghiandole del Galeati: bel connettivo ed elastico: grande copia di micrococchi sparsi in tutta l'altezza dei tagli, bacteri ammassati qua e là: poche sporule ed ifi: rari acari (1).

Fra gli altri animali, che avea disposto, si seppellissero nel cimitero, onde meglio tener dietro alle fasi diverse del fenomeno di mummificazione, dirò di 3 polli e d'un barbagianni.

Un galletto, piuttosto grosso, che diremo pollo n. 1, ucciso come gli altri animali di morte violenta (colpo in testa), sepolto colle piume, direttamente nella terra del cimitero alla profondità di un metro in piena state, dissotterrato dopo due mesi, la mummificazione non era ben compiuta: si risotterrò per diversi altri mesi, ma estratto si vide men bene conservato di questi altri, di cui vado a scrivere.

Barbagianni.

Esso fu sepolto colle penne in cassetta alla profondità di 60 cent. in settembre: si estrasse dopo 4 mesi: era perfettamente conservato, colle piume tenacemente adese, assai leggero, ritto su piedi con un'asta di ferro nel petto per reggerlo nella cassetta: l'animale pare imbalsamato: ancora si conserva in laboratorio: l'asta di ferro non era irruginita: al petto si tocca della carne distintamente molleggiante alla pressione: non puzza. Tolto un pezzo di muscolo sotto un'ala, che s'è dovuta con forza elevare, si trovò piuttosto molle e di color grigioscuro: le fibre muscolari belle: e nei tagli e coll'isolazione si trovarono moltissimi micrococchi, parecchi bacteri e bacilli poco lunghi e non sottili, molte spore, di cui qualcuna con micrococchi dentro, alcune sporule con ifi diramati: i micrococchi erano piccoli disposti lungo le fibre muscolari ed i fascicoli connettivali: in alcuni stavano così ben allineati e ravvicinati da parere come certi filamenti di muffe: le piumine più vicine alla pelle offrivano ricchezza di spore ed ifi: dall'interno dell'occhiaia si levò un polviscolo, in cui abbondavano le sporule grandi a pareti erte, qualcuna con ifi: non mancavano micrococchi e bacilli di diverse lunghezze.

Pollo n. 2.

Sepolto d'inverno, spennato, a 60 cent. dentro cassetta di legno per 11 mesi circa: esaminato dopo 2 giorni dal dissotterramento, offerse le seguenti particolarità.

Esso era irrigidito, di color naturale, ben conservato, non puzzava che di cacio vecchio: alcune piumette non state estratte erano tenacemente adese, come pure il becco e le unghie: gli occhi non ben conservati: la cresta nei polli è sempre

(1) Czermach esaminando una mummia artificiale di 3 mila anni, trovò anche esso ben conservati i tessuti, senonchè nel caso nostro, lo sono per processo naturale.

magnificamente conservata: il pollo deve esser stato collocato sul fianco destro dove si trova una zona annerita e la pelle non integra; spennellando l'epidermide si ha grandissima copia di sporule grandi e piccole, ascospore piene di spore con ifo lungo a segmenti lunghi: alcuni bacilli: moltissimi micrococchi, polviscoli, acari, ovicini: micrococchi e spore molte sotto la pelle, numerosi sporangi con ifi intrecciati.

I muscoli sono ben conservati: le fibre col solforico 20 $^0/_0$, molte mostravano ancora i loro nuclei: bellissime le strie (alcool, carminio borico, alcool, olio garofani, chiusura con balsamo in xilol): non mancavano spore, micelii, acari ed ovicini, e qualche goccia grassosa.

Si distinse qualche arteriuzza: il nervo ischiatico offerse goccie di mielina e mazzi di fibre nervose sottilissime.

Il cervello era ridotto ad una sostanza cerea giallorossigna, con colesterina e con mielina sotto tutte forme, micrococchi, bacilli e sporule.

Le cartilagini articolari mostravano le cellule non grassose, ma raggrinzate nelle capsule, e capaci di colorirsi bene.

I visceri, grigi scuri, papiracei e raccolti insieme come in pacchetti nelle rispettive cavità: il ventriglio durissimo con entro pietruzze ed altro cibo asciutto, a modo di crusca: diverse parti esaminate nel ventriglio, polmone, intestino si trovarono ancora bene distinguibili, dapertutto abbondavano spore, ifi, micrococchi, bacteri e bacilli; nel fegato poi ve n'era una grande quantità.

Pollo n. 3.

Sepolto senza piume, avvolto in cencio pulito e senza cassa, a 60 cent. in inverno e dissotterrato dopo 11 mesi circa: esso offerse risultati consimili a quelli del n. 2 per quanto riguarda l'aspetto esterno, sol che le sporule e gli ifi sopra la pelle erano più copiosi: inoltre tra il cencio e la pelle nel punto più declive si era formata come una specie di lieve incrostazione bianco-grigiastra fatta di sali calcarei e di sostanze organiche.

Il pollo si presenta anche oggi (dopo un anno e mezzo) molto ben conservato, sebbene le condizioni del mio laboratorio sieno molto meno propizie di quelle del cimitero di Ferentillo.

Siccome tornava non indifferente il rilevare bene la presenza e la copia nelle varie parti delle mummie ed a diversi periodi, delle muffe (*hormiscium o torulae*), che già altra volta vi riscontrai, così stante la grande difficoltà, che talora s'incontra nel metterle bene in evidenza (per l'antichità loro e per altre condizioni) massime per quanto riguarda certi ifi, dovetti ricorrere anche a mezzi speciali d'indagine, che espongo nella credenza, che eventualmente potessero pur giovare a botanici.

Per quanto riguarda gl'ifomiceti ancora capaci di vita, avrei ben potuto metterli in evidenza con pezzi interni di mummie messi a vegetare opportunamente in liquidi sterilizzati, ma credetti pel mio scopo di limitarmi piuttosto a constatare quanto direttamente il microscopio vi potea rilevare.

Mi procurai delle muffe recenti nell'acido lattico 1 $^0/_{00}$, e dall'infuso di mela con o senza pezzi di mummia: il liquido con mummia diede più rapida e ricca vegetazione, con ifi in generale più sottili, sebbene di questi ve ne fossero anche negli altri liquidi.

Gli ifi sottili, e le spore si colorano bene nel violetto di genziana (trattamento a secco o non), ma facilmente si decolorano nell'alcool, eccetto che si lascino nel violetto per molte ore (24^h): gli ifi sottili trattati per pochi 1′ con potassa 20 $^0/_0$, poi lavati o non, e trattati con cloruro di zinco iodato, non si colorano in azzurro, ma solo alcuni in giallognolo: la tintura di iodio vi fa ben apparire dentro la divisione in bastoncelli chiari rifrangenti, vicini o lontani tra loro.

Un mezzo potente per distinguere bene gli ifi ed il loro contenuto è il solforico 25 a 50 $^0/_0$: però il solforico 50 $^0/_0$ o più concentrato, agendo un po' a lungo, tende a sciogliere la parete degli ifi, lasciando libero il contenuto. Il solforico presenta alcuni ifi omogenei, altri con spore e segmenti: qualcuno con contenuto granelloso e distaccato dalle pareti dell'ifo, da pigliar l'aspetto come di fibra nervosa a midolla, trattata per vedervi bene il cilindro dell'asse.

Il solforico rende ancor miglior servizio, se dopo breve suo agire, si mette in opera della tintura di iodio, la quale tingendo solo le parti figurate contenute, in giallo scuro, queste spiccano nell'ifo, che rimane quasi trasparente ed incolore.

Il solforico e la tintura di iodio tendono a restringere gli ifi e farne uscire libere le sporule colorite: esse si vedono belle colorite, impicciolite dentro gli aschi: però l'aggiunta dell'jodio, se là per là fa spiccatissimi gli ifi, non tarda a far dell'insieme una massa troppo colorata ed indistinta: il solforico solo conserva i preparati assai più a lungo.

Molti preparati istologici e delle mummie e delle muffe ancora conservo, di cui alcuni presentai all'Accademia.

Gli ifi larghi massime dal lattico, neutralizzati, poi lavati in acqua non si colorano nel violetto di genziana, nè coll'eosina: le sporule si: gli aschi senza sporule non: e nemmeno si colorano col solforico e jodio, o col cloruro di zinco iodato. Si è specialmente col solforico e col iodio, che ho potuto constatare in diverse regioni delle mummie anche antichissime la presenza degli ifi.

Cerchiamo ora di mettere a profitto i risultati delle osservazioni e delle sperienze, per veder modo di render ragione per quanto sia possibile, del processo di mummificazione, che si verificò nell'ex-cimitero di Ferentillo.

Diversi paiono essere i fattori, che influenzano la mummificazione: nè è indifferente la condizione del cadavere: è stato osservato, che men facilmente si conservano i suicida, i giustiziati, i morti di malattia acuta, che quelli per cronica; i vecchi meglio dei giovani, i corpi asciutti più che i polisarcici e gl'infarciti: da questo lato la corporatura asciutta degli antichi egiziani dovea costituir una condizione favorevole: anche la luce è da presumere e la pressione dell'aria, abbiano i loro effetti: la natura della malattia mostra pure una certa influenza, conservandosi men bene i cadaveri dei morti per scorbuto, febbre putrida ecc., la posizione del cadavere, sul fianco o non, la sepoltura in terra od in cassa, l'ertezza delle pareti, il legno stagionato, il grado di chiusura della medesima, la profondità in cui è messa nel suolo, la sua esposizione alla pioggia o non, ecc. ecc., sono altrettante condizioni da tener presenti.

Queste influenze, come altre, di cui diremo, possono tra loro variamente intrecciarsi, e dispiegarsi ciascuna in varia misura, e l'una preponderare sull'altra ed

eliderne gli effetti: così la mummia, che tengo nel laboratorio, quantunque assai grassa e muscolosa, e si tratti di morte acuta, si presenta benissimo conservata, come già si scrisse.

I fattori principali però della mummificazione si devono ripetere dalla terra, dall'aria, dal grado di umidità, dalla temperatura e dai microrganismi.

Certo la terra non manca della sua influenza, sia dal lato fisico che chimico, emanando principî, modificando l'aria, assorbendo umidità, favorendo certi microrganismi, ecc.

Orfila fece sperienze, seppellendo pezzi di medesimo cadavere in terre diverse e trovò guastarsi meno sollecitamente nella sabbia silicea, e più prontamente nel terriccio: nella terra calcarea di Bicêtre la putrefazione fu lenta dapprincipio, poi andò regolare senza formazione di grasso.

Si constatò pure l'influenza per alcune terre del Perù, massime ad Arica, dove in fosse scavate in suolo salino ed asciutto, vi si riscontrarono mummie belle e ben conservate.

In un recentissimo lavoro, premiato, sta scritto, in proposito anche delle mummie egiziane: « Il est évident, que cette longue conservation (anche di 6000 anni) doit « être attribuée non seulement aux substances employées dans ce but, mais aussi « en grande partie au climat de l'Égypte, à la sépulture dans des temples et des « catacombes, à l'abri de l'air, et surtout à la *nature du sol*.

« Il y a dans certaines localités des terrains très perméables calcaires, qui con- « tiennent de petites quantitès d'arséniate de soude et de fer, et conservent bien à « travers des longues périodes les corps inhumés.

« Il y a également des caveaux, dans quelques églises, qui grâce à une venti- « lation spéciale, produisent les mêmes effets, par exemple, le caveau des jacobins, « St. Michel à Bordeaux » (*L'embaumement*, par le prof. S. Laskowski, Genève, 1886.

La terra però non ha nel fatto, di cui si tratta, tutta quella importanza, che a primo aspetto parrebbe, locchè si può dedurre specialmente dalle seguenti osservazioni. I sacerdoti, benchè non interrati, si sono quasi egualmente mummificati, massime nelle casse e nelle parti dei cadaveri più esposte a sentir l'influenza dell'aria (casse degli ordini superiori, e fianchi dei cadaveri volti in alto) (1).

I cadaveri sepolti nel nuovo cimitero di Ferentillo non vi si mummificano, quantunque la terra si possa presumere non tanto difforme da render ragione della grande differenza dei risultati (2).

I cadaveri sepolti a grande profondità nella terra dell'ex-cimitero si mummificano meno bene di quelli interrati più superficialmente. La terra vicina alle finestre e

(1) Le mummie estratte dalla terra del cimitero, non ancora giunte a mummificazione spinta, e contenenti materiali putrescibili, non ostante all'aria libera del cimitero, si conservano esenti da putrefazione, benchè esse contengano molti microrganismi atti al processo putrefattivo.

(2) A dilucidare ancora meglio questo punto, si potrebbero seppellire animali nell'ex-cimitero in terra ivi trasportata dal nuovo cimitero, al riparo della pioggia, ed inumarne altri in terra dell'ex-cimitero levata di là e trasportata in altro luogo.

L'antico dottore di Ferentillo, Peletti, assicurava già non essersi mai trovati animali mummificati nelle terre vicine al cimitero.

bagnata da pioggie, si mostrò inetta alla mummificazione: i cadaveri sepolti direttamente nella terra si mummificano meno bene che in casse: dei cadaveri sepolti di costa, si mummifica meglio il fianco superiore.

D'altra parte la terra dell'ex-cimitero ricca in sali calcari e pietrucce, asciuttissima, porosa, deve concorrere alla mummificazione, permettendo l'accesso dell'aria ai cadaveri e l'evaporizzazione dai medesimi, in misura tale, che sia ostacolata la troppo rapida ossidazione dei tessuti, e l'asciuttamento troppo celere della periferia del corpo, e conseguente scemata facilità agli umori interni del cadavere di potersi via via sprigionare: le varie fermentazioni cadaveriche rimangono per tal modo modificate ed infrenate dentro certi limiti.

È conosciuto, che il cadavere sotto l'acqua entra più tardi in putrefazione, ma venuto di là in contatto all'aria libera, la putrefazione procede rapidissima, a cagione, anche per non toccare dei microrganismi, della maggiore ricchezza in ossigeno.

Potrebbe pur darsi, che l' aria e la terra dell'ex-cimitero fossero favorevoli alla vita di certi microrganismi capaci a concorrere nel processo della mummificazione e contrarî a quella della putrefazione: sarebbe anche questa materia non dispregevole di studio.

Anche la cassa deve aver la sua parte nel processo di cui si tratta concorrendo colla terra, massime se di legno stagionato, a tener nelle volute misure l' accesso dell' aria e la evaporazione del cadavere: questa, ove rimanga troppo ostacolata (vestimenta pesanti e strette al corpo, terra in contatto al cadavere con formazione di una crosta, cadavere collocato sul fianco ecc.) la mummificazione riesce meno completa.

L' aria agitata sempre, che entra per le feritoie ed assai asciutta contribuisce potentemente alla mummificazione.

Gay-Lussac conservò fresca la carne per diversi mesi tenendola sotto campana, dove vi stava del cloruro di calcio.

Esistono mummie naturali peruviane nel Museo zoologico di Napoli e nel Civico di Milano, delle quali discorrendo il prof. Panceri, scrive che non istupisce, che in quelle altitudini (Perù), l'aria rarefatta sia agente naturale di mummificazione: nella mummia da esso descritta, non vi erano nè aromi nè sale, benchè in quei luoghi del salgemma trovisi commisto alle arene: anche i fiori e le erbe appena colte ivi si disseccano come a stento in altre regioni ottengono i botanici: del resto vi si trovano mummie ben conservate anche in sarcofagi, dove non avrebbe potuto agire il sale.

L' Humboldt trovò molti corpi di Spagnuoli e Peruviani giacenti ancora sul campo di battaglia, secchi e conservati all' aria aperta (1).

Cadaveri mummificati all' aria se ne constatarono nelle catacombe romane, nel convento presso Palermo, in quello del monte di s. Bernardo, nell' ospedal maggiore

(1) A proposito della conservazione delle mummie Peruviane, ultimamente si parlò di una superba collana fatta dai fratelli gioiellieri Tiffany di New-York, composta di begli occhi di mummie peruviane, portati dall' America del Sud dal signor W. E. Curtis, membro della Commissione scientifica inviata in quella regione dal Governo degli Stati Uniti; tutto però fa credere, che si tratti invece di occhi di pesci sostituiti agli umani.

di Vercelli, nella Sagra di S. Michele e di Giaveno, nelle tombe murate di Venzone, in nicchie nascose nel seno di spesse muraglie, come avvenne nel Duomo di Treviso, ed in camere sepolcrali come a Torino, nelle tombe di S. Michele a Dublino (in terra calcarea), nei sotterranei di Tolosa: anzi v' hanno certe caverne, in cui quasi tutti i cadaveri si mummificano (all' aria): Isenflamm ne diede una lista (*Anatomische Untersuchungen*, p. 309).

L' aria molto calda è capace a produrre un perfetto essiccamento dei cadaveri, i quali però, come già si scrisse, sono assai lontani dal presentarsi con quell' aspetto quasi naturale, in cui li offre la mummificazione di Ferentillo.

Sappiamo, che i Guanci medesimi, antichi abitatori delle isole Canarie, le cui mummie vengono descritte da Bory de Saint-Vincent nel suo *Essai sur les isles Fortunées*, dopo d'aver imbalsamati i cadaveri in una delle maniere egiziane, con aromi, li lasciavano dappoi seccare per 15 giorni al sole od alla stufa.

Nella sabbia infuocata dei deserti dell'Africa si essiccano rapidamente e si conservano le forme delle pianticelle e dei cadaveri: ed in questo forse v' ha una ragione per ritenere l' imbalsamazione come un prodotto naturale dell' Egitto, perchè gli abitanti doveano certo rimanere impressionati da queste mummificazioni naturali, che del resto sono comuni ad altri paesi caldi e ventilati.

Nelle terre Magellaniche, la *sécheresse est telle dans l'intérieur, que le peu de pluie qui tombe est aussitôt évaporé, et que les cadavres des animaux abandonnés à la surface du sol se momifient et restent ainsi plusieurs années sans se décomposer* (*Dict. encycl. des scien. méd.* Paris 1870).

Intorno a consimili mummie, Raynaud, Garmann e Medicus hanno riunito un certo numero di fatti (Hamburger Magazin t. X, p. 490).

Il nostro prof. Albini (Acc. scien. Napoli 1881), partendo anche dal fatto della conservazione delle emazie essiccate su vetrino, ottenne un feto umano ben disseccato, però un poco abbrunito, colla diminuzione in peso di più della metà, tenendolo sospeso in opportuno apparecchio per 4 o 5 giorni con aria affluente ed alla temperatura di 70 a 80 del centigrado.

Le basse temperature non occasionano una vera mummificazione, ma impediscono la putrefazione, conservandosi anche per secoli i cadaveri nelle inospitali caverne del mar glaciale. Sulle rive della Lena, e di altri fiumi, che si gettano nel mar glaciale, si riscontrarono cadaveri intieri di mammouth e di rinoceronti colle loro carni dopo migliaia d'anni bene conservate da poter servire ancora come fresco pasto agli animali.

Una temperatura media, con aria umida e non mossa tende a favorire la putrefazione; è piuttosto bassa in generale quella del cimitero di Ferentillo; e di più osservai meglio mummificarvisi gli animali sepolti d' inverno che di state, anche forse perchè morendo in stagione calda, pur il cadavere volge più facilmente ai processi putrefattivi.

Se ora vogliamo farci ad esaminare, quale e quanta parte abbiano i microrganismi nel processo di mummificazione, troveremo non esser facil cosa il dirlo.

D' ifomiceti e di schizomiceti, o meglio di protisti, per dirlo con Haeckel, e con una parola che abbracci anche le varie gradazioni intermedie tra i microzoi e le crittogame, abbiam sentito esserne cariche l'aria, la terra, l' acqua e le mummie; anzi

non solo i cadaveri, ma pur gli animali viventi compreso l' uomo, ne contengono in copia in bocca, nelle narici, in tutto il tramite delle vie digestive, nelle feccie, nelle strade respiratorie, nelle uro-genitali, e sulla pelle, e ciò anche in condizioni pienamente fisiologiche, tendendo ad aumentare nelle malattie, nell' agonia e nella morte, ed invadere l' intiero organismo: anzi abbiamo ormai già una serie grande di malattie, e molte di esse gravi, prodotte da siffatti microrganismi, e coi progressi continui della microscopia, l' elenco di esse va via ognor crescendo, e sempre più si vien dimostrando la terribile potenza di questa innumerevole falange di commensali fisiopatologici. Che sarebbe poi, se si verificasse quanto Béchamp ed altri scrivono intorno ai *microsima*?

Secondo le mie ricerche rimane cerziorato, che il cervello delle mummie non si mummifica, ma passa pel processo putrefattivo colle relative conseguenze: però se i micrococchi ed i bacilli sono compagni o cause di putrefazione, allora stando ai risultati delle ricerche sui tessuti delle mummie prese a diverso periodo, bisogna dire che anche questi almeno per una parte sieno passati pel processo putrefattivo, processo, che può accentuarsi, come si scrisse, quando la mummia non matura ancora, venga esportata dal cimitero in altra località, in cui non si verifichino le condizioni che in quello hanno luogo.

D' altra parte bisogna notare, che in mummie ancora polpute, state però molti anni sotto terra, non vien fatto di notare puzzo di putrefatto, i tessuti non vi sono distrutti, ma anzi conservati si direbbe colle caratteristiche loro, massime per quanto riguarda le fibre muscolari striate, le lisce, il connettivo-elastico; il qual fatto sarebbe incompatibile coll' avvenuta putrefazione (1): sarà cominciato nelle mummie il processo di putrefazione e dappoi rapidamente si sarà arrestato per condizioni ad esso non favorevoli di quel cimitero?

D'altra parte la presenza di sporule, ifi, micelii sulla pelle, dentro ai tessuti, ai visceri, in mummie a diversi periodi, attesta o che non è vero l'antagonismo, che forse in modo troppo assoluto vien affermato (2) da Cohnheim, ed altri, tra questi ifomiceti ed i microrganismi della putrefazione, oppure qui si tratta di protisti speciali per se medesimi, o resi tali dalle specialissime condizioni create al cadavere, sopra cui o dentro cui alloggiano nel detto cimitero (3).

Nel caso nostro concreto, sarebbe non senza qualche interesse injettare in animali morenti, in regioni diverse, sporule in genere, o bacteri e micrococchi, oppure l'insieme de' microrganismi trovati nelle mummie specialmente le più polpute e fresche,

(1) Secondo le ricerche del prof. Tamassia, a circa 13 gradi C. nell' aria (e non vi ha molta differenza da questo lato anche sotterra) in circa 34 giorni non rimane più una rappresentanza della fibra striata muscolare: nella putrefazione, essa non subisce nè la degenerazione cerea, nè la grassosa, ma si frammenta in corpuscoli gialli rifrangenti, che alla lor volta danno luogo dappoi a piccole granellazioni opache; segue quindi la distruzione del connettivo, e poi quella dell'elastico: queste operazioni sarebbero facilitate, qualora il mezzo sia o venga reso alcalino.

(2) Nella sanie cancrenosa oltre i vibrioni, spirilli, bacteri (*termo*, e *catenula*) furono da molti nel medesimo tempo trovate presenti delle spore (*oidium*, *aspergillus*).

(3) Si afferma aversi avuti risultati negativi di sviluppo, portando spore di *penicillium*, *aspergillus*, ecc., nel sangue, sotto la pelle, nella trachea, nel cavo addominale di animali, anzi esser le medesime a breve andare scomparse.

poi riporre i cadaveri in certe date condizioni di terra, aria, temperatura, umidità, ecc., ed indagare così più davvicino l'azione complessiva e rispettiva, se possibile, di siffatti microrganismi: rimarrà però sempre difficile far la dovuta parte ad essi, stante la necessità del concorso di fattori diversi nel fatto della mummificazione; avea già tentato qualche sperimento in siffatta direzione, ma non se ne venne a termine, a cagione di guasti avvenuti nel terreno scelto a seppellire.

Certo non mi par fuor di proposito pensare che tante miriadi di microrganismi presenti in tutte le mummie, anche in quelle appena estratte dalla terra, possano concorrere, specialmente gli ifomiceti, vegetando e moltiplicandosi, a consumare gli umori animali e così rasciuttare il cadavere, se pur nel detto processo non vi concorrono tutti qual più qual meno anche direttamente in via chimica [1].

Ripensando però in genere ai numerosi casi di mummificazione senza interro de' cadaveri, ed ai fatti rilevati nel cimitero di Ferentillo, si viene naturalmente nell' opinione, che qui il processo riconosca, oltre l'azione dei microrganismi viventi in condizioni speciali, quella principalissima dell' aria asciutta, rinnovata, non calda, ed accedente ai cadaveri in modo molto misurato attraverso la terra calcarea, asciutta e porosa.

[1] Già il dott. Gualandi ebbe a riscontrare in mummie di Ferentillo la presenza di sporule e micelii nei tessuti. — Il dott. Zecchini poi nel fasc. 63 del Politecnico di Milano, e dappoi il dott. Antongiuseppe Pari (*Esposizione teorico-sperimentale sulle mummificazioni in Venzone*, Udine 1868) hanno propugnata la dottrina, che la mummificazione nelle tombe di Venzone avvenisse per causa nè fisica nè chimica, ma vitale, cioè in dipendenza di lavorìo di crittogame: anzi il dott. Zecchini paragona le mummie al filugello morto di *calcino*.

RELAZIONE

letta dal Socio G. Battaglini, relatore, a nome anche del Socio Cremona nella seduta del 12 giugno 1887, sulla Memoria del prof. F. Aschieri, intitolata: *Sulla curva normale di uno spazio a quattro dimensioni.*

« Oggetto di questo lavoro è una rappresentazione dello spazio lineare a quattro dimensioni sul sistema costituito dalle rette dello spazio ordinario, ottenuta col riferire proiettivamente tra loro due *curve normali* degli spazî medesimi. L'autore richiama il noto modo di generazione della cubica gobba, o curva normale dello spazio ordinario, e le note formole con le quali si esprimono, per una conveniente scelta degli elementi fondamentali, le coordinate di un punto qualunque della cubica per mezzo delle potenze di un parametro variabile, ed estende l'analoga generazione, e l' analoga rappresentazione parametrica, alla quartica normale dello spazio a quattro dimensioni: in seguito egli considera le rette bisecanti, ed in particolare le tangenti, le rette trisecanti, ed in particolare le rette osculatrici, della quartica, gli spazî a tre dimensioni determinati da quattro punti della quartica, ed in particolare gli spazî a tre dimensioni osculatori della medesima curva, e dà le formole con le quali si rappresentano questi diversi enti geometrici, ed i loro sistemi; infine studia le quadriche a tre dimensioni circoscritte alla quartica. Dopo ciò l' autore riferisce proiettivamente la quartica normale dello spazio a quattro dimensioni, alla cubica normale dello spazio a tre dimensioni, considerando come corrispondenti due punti di queste curve, quando sono determinati dallo stesso valore del parametro nella rappresentazione parametrica esposta precedentemente; con ciò egli perviene a stabilire una corrispondenza univoca tra i punti dello spazio a quattro dimensioni e le rette dello spazio ordinario; indi sviluppa questa corrispondenza, applicandola a diversi sistemi di punti del primo spazio, e determinando i sistemi corrispondenti di rette del secondo spazio.

« Crediamo che questa Nota del prof. Aschieri, come notevole contribuzione alla Geometria dello spazio a quattro dimensioni, possa essere inserita negli Atti dell' Accademia ».

Sulla curva normale di uno spazio a quattro dimensioni.

Memoria di FERDINANDO ASCHIERI

Oggetto principale della presente Nota è una rappresentazione dello spazio lineare di 4ª specie sullo spazio composto delle rette di uno spazio ordinario. La rappresentazione si ottiene riferendo projettivamente fra loro due *curve normali* degli spazî stessi; e ci è parso utile di esporla perchè da essa si possono dedurre in modo semplice molte interessanti proprietà della *quartica normale.* Il metodo tenuto per iniziare, in tal modo, lo studio della quartica è l' estensione di quello dato dal prof. Cremona, nel Tomo I degli Annali del Tortolini per lo studio della cubica gobba o curva normale dello spazio ordinario. Risulterà ovvia l' estensione del metodo stesso alle curve normali degli spazî di specie qualunque.

1. Indico in generale con S_r uno spazio lineare corrente di specie r; e con Σ_l, A_{k_1}, B_{k_2}.... spazî lineari fissi rispettivamente di specie l, k_1, k_2...

In uno spazio fondamentale Σ_n chiamo *stella* $(A_r)_k$ ogni spazio lineare di specie k formato dagli S_{r+1} che projettano da A_r i punti di un M_k; oppure dagli S_{r+k} che projettano da A_r gli S_{k-1} di M_k; essendo poi $r+k \geqq n-1$. Lo spazio A_r si dice il *sostegno* o *centro* della stella. Chiamo inoltre *cono* $(A_r)_t^{(n)}$ ogni spazio algebrico di ordine n e di specie t formato con elementi di una stella $(A_r)_k$.

Indico, al solito, con $S_l^{(k)}$, $M_{l'}^{(k')}$.... spazî algebrici di ordine k, k'... e di specie l, l'...; e chiamo *rigata* uno spazio di Σ_n se composto di S_1 di Σ_n. Finalmente per uno spazio Σ_3, ossia per uno spazio ordinario, farò uso delle consuete notazioni e definizioni.

2. Siano $(A)_2$, $(B)_2$ due stelle di 2ª specie di uno spazio Σ_3 riferite fra loro projettivamente in modo generale; sicchè quelle stelle producano una *curva normale* $C_1^{(3)}$ di Σ_3, luogo dei punti ove si tagliano le coppie di raggi corrispondenti delle stelle stesse projettive. La curva $C_1^{(3)}$ passa per i centri A, B delle due stelle; e come dai centri A, B, così, risulta subito, che da un suo punto qualunque M, $C_1^{(3)}$ viene projettata da un cono quadrico $(M)_2^{(2)}$. Quindi $C_1^{(3)}$ è il luogo dei punti ove si tagliano le coppie di generatrici corrispondenti di due coni quadrici projettanti la curva e riferiti fra loro projettivamente dal fascio di piani che ha per asse la generatrice comune.

In altri termini: $C_1^{(3)}$ è prodotta da due stelle projettive che hanno i centri in due punti quali si vogliano della curva; e la cui corrispondenza è determinata dall' assumere come corrispondenti quattro coppie di raggi projettanti quattro altri punti della cubica. Di qui segue subito che $C_1^{(3)}$ è determinata da sei dei suoi punti;

che: se due cubiche di Σ_3 sono riferite projettivamente fra loro ed hanno cinque punti comuni, le due cubiche coincidono ecc.

3. Ciò posto, siano x_r $(r = 1, 2, 3, 4)$ le coordinate omogenee di un punto X di Σ_3 e siano

$$\frac{x_1}{\lambda} = \frac{x_2}{\mu} = \frac{x_3}{\nu}$$

$$\frac{x_2}{\lambda_1} = \frac{x_3}{\mu_1} = \frac{x_4}{\nu_1}$$

ossia

$$\lambda\, x_1 + \mu\, x_2 + \nu\, x_3 = 0$$

$$\lambda' x_2 + \mu' x_3 + \nu' x_4 = 0$$

l'equazioni delle stelle $(A)_2$, $(B)_2$ al variare di λ, μ, ν; λ', μ', ν'.

Sia inoltre $x_1 = 0$ il piano osculatore in A alla cubica $C_1^{(3)}$; $x_2 = 0$ il suo corrispondente nella stella $(B)_2$; $x_3 = 0$ il corrispondente di $x_2 = 0$ quando $x_2 = 0$ si riguardi della stella $(A)_2$; e finalmente $x_4 = 0$ il piano osculatore a $C_1^{(3)}$ in B; ossia il piano corrispondente di $x_3 = 0$ considerato come appartenente ad $(A)_2$. Se supponiamo inoltre che $C_1^{(3)}$ passi pel *punto unità*, cioè pel punto di coordinate $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$, allora le stelle projettive $(A)_2$, $(B)_2$ generatrici di $C_1^{(3)}$ saranno rappresentate, al variare di λ, μ, ν, dalle equazioni:

$$\frac{x_1}{\lambda} = \frac{x_2}{\mu} = \frac{x_3}{\nu}$$

$$\frac{x_2}{\lambda} = \frac{x_3}{\mu} = \frac{x_4}{\nu}$$

o dalle

$$\lambda x_1 + \mu x_2 + \nu x_3 = 0$$

$$\lambda x_2 + \mu x_3 + \nu x_4 = 0$$

e le coordinate di un punto X corrente di $C_1^{(3)}$ saranno espresse per mezzo di un parametro θ dalle formole

(1) $$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \theta^3 : \theta^2 : \theta : 1$$

che sono quelle da cui parte il sig. Cremona per lo studio della cubica gobba $C_1^{(3)}$.

4. Assumiamo ora per spazio fondamentale un Σ_4 e siano date in esso due stelle $(A_0)_3$, $(B_0)_3$ di 3ª specie riferite fra loro projettivamente in modo generale per cui venga generata una curva normale $C_1^{(4)}$ di Σ_4, come luogo dei punti in cui si tagliano coppie di S_1 corrispondenti delle due stelle. La quartica $C_1^{(4)}$ contiene i centri A_0, B_0 delle stelle; e come dai centri stessi A_0, B_0 così da un punto qualunque M_0 di essa, la $C_1^{(4)}$ viene projettata da un cono cubico $(M_0)_2{}^{(3)}$ (curva normale della stella $(M_0)_3$).

La quartica $C_1^{(4)}$ è quindi il luogo dei punti ove si tagliano gli S_1 corrispondenti dei due coni cubici $(M_0)_2{}^{(3)}$, $(N_0)_2{}^{(3)}$ che la projettano da due punti M_0, N_0. Questi coni avendo in comune la generatrice $G_1 = M_0 N_0$, sono riferiti projettivamente dal cono quadrico $(G_1)_3{}^{(2)}$ projettante da G_1 la quartica $C_1^{(4)}$.

Di qui segue immediatamente che $C_1^{(4)}$ è prodotta da due stelle $(M_0)_3$, $(N_0)_3$ che, avendo i centri in due punti M_0, N_0 qualsivogliano della linea, sono riferiti fra loro projettivamente in modo determinato, fissando che siano fra loro corrispondenti

le coppie di raggi che projettano altri cinque punti della curva. La quartica $C_1^{(4)}$ è dunque determinata da sette dei suoi punti.

5. Due S_2 corrispondenti delle stelle $(A_0)_3$, $(B_0)_3$ projettive generatrici di $C_1^{(4)}$ si tagliano in generale in un punto M_0 di Σ_4; e se si tagliano in un S_1 questo sarà una *corda* o *bisecante* di $C_1^{(4)}$. Se siano R'_1, R''_1 gli S_1 di $(A_0)_3$, $(B_0)_3$ che corrispondono all' $S_1 = A_0 B_0 = R_1$ comune alle due stelle, allora alla stella $(R_1)_2$ comune alle due stelle $(A_0)_3$, $(B_0)_3$ corrisponderanno le stelle $(R'_1)_2$, $(R_1'')_2$ riferite projettivamente ad $(R_1)_2$; e quindi anche fra loro. Il luogo degli S_1 comuni alle terne di S_3 corrispondenti è una *rigata* $S_3^{(3)}$ del 3° ordine costituita dalle corde di $C_1^{(4)}$.

Al sistema delle corde di $C_1^{(4)}$ appartengono le *tangenti*. È subito visto che i raggi R'_1, R''_1 corrispondenti ad R_1 nelle stelle $(A_0)_3$, $(B_0)_3$ sono le tangenti in A_0 e B_0 a $C_1^{(4)}$.

6. Due S_3 fra loro corrispondenti nelle due stelle projettive $(A_0)_3$, $(B_0)_3$ si taglieranno in una *trisecante* di $C_1^{(4)}$; cioè in un S_2 che contiene tre punti di $C_1^{(4)}$. Le trisecanti formano un sistema $[\Sigma]_3$ tre volte infinito, tale che in ogni S_3 di Σ_4 vi sono al più sei trisecanti e per ogni punto M_0 di Σ_4 ne passano infinite costituenti un cono quadrico $(M_0)_3^{(2)}$.

Al sistema $[\Sigma]_3$ delle trisecanti appartengono le *trisecanti osculatrici*. In ogni punto di $C_1^{(4)}$ resta determinata la relativa trisecante osculatrice. Così l'S_2 di $(A_0)_3$ corrispondente all' S_2 di $(B_0)_3$ determinato da R_1. R'_1 è la trisecante osculatrice in A_0.

Ogni S_3 taglia $C_1^{(4)}$ in quattro punti; quando questi punti sono contigui allora l' S_3 si dirà *osculatore* a $C_1^{(4)}$.

In ogni punto di $C_1^{(4)}$ resta determinato il relativo S_3 osculatore. Così l'S_3 della stella $(A_0)_3$ corrispondente all' S_3 di $(B_0)_3$ determinato da R_1 e dall' S_2 osculatore in A_0, è l' S_3 osculatore in A_0 a $C_1^{(4)}$.

7. Siano ora X_r $(r = 1, 2 \ldots 5)$ le coordinate omogenee di un punto X_0 di Σ_4; e siano:

$$\frac{X_1}{\lambda} = \frac{X_2}{\mu} = \frac{X_3}{\nu} = \frac{X_4}{\tau}$$
$$\frac{X_2}{\lambda'} = \frac{X_3}{\mu'} = \frac{X_4}{\nu'} = \frac{X_5}{\tau'}$$

od anche

$$\lambda X_1 + \mu X_2 + \nu X_3 + \tau X_4 = 0$$
$$\lambda' X_2 + \mu' X_3 + \nu' X_4 + \tau' X_5 = 0$$

l'equazioni delle stelle $(A_0)_3$, $(B_0)_3$ al variare di λ, μ, ν, τ; $\lambda', \mu', \nu', \tau'$. Sia $X_1 = 0$ l' S_3 osculatore in A_0 a $C_1^{(4)}$; $X_2 = 0$ quello che nella stella $(B_0)_3$ corrisponde al primo; $X_3 = 0$ quello che nella stella $(B_0)_3$ corrisponde ad $X_2 = 0$ considerato appartenente ad $(A_0)_3$; $X_4 = 0$ quello che nella stella $(B_0)_3$ corrisponde ad $X_3 = 0$. Finalmente sia $X_5 = 0$ l' S_3 che in $(B_0)_3$ corrisponde ad $X_4 = 0$ considerato della stella $(A_0)_3$; ed X_5 sarà l' S_3 osculatore in B_0 a $C_1^{(4)}$. Supponendo inoltre che $C_1^{(4)}$ passi pel punto *unità*, ossia pel punto di coordinate eguali, saranno:

$$(a) \quad \begin{cases} \dfrac{X_1}{\lambda} = \dfrac{X_2}{\mu} = \dfrac{X_3}{\nu} = \dfrac{X_4}{\tau} \\[2ex] \dfrac{X_2}{\lambda} = \dfrac{X_3}{\mu} = \dfrac{X_4}{\nu} = \dfrac{X_5}{\tau} \end{cases}$$

ossia

$$(a)' \left\{ \begin{array}{l} \lambda X_1 + \mu X_2 + \nu X_3 + \tau X_4 = 0 \\ \lambda X_2 + \mu X_3 + \nu X_4 + \tau X_5 = 0 \end{array} \right.$$

l' equazioni delle stelle projettive $(A_0)_3$, $(B_0)_3$ generatrici di $C_1^{(4)}$; e le coordinate X_r di un punto corrente di $C_1^{(4)}$ si esprimeranno per mezzo di un parametro θ colle formole:

$$(6) \qquad X_1 : X_2 : X_3 : X_4 : X_5 = \theta^5 : \theta^4 : \theta^3 : \theta^2 : 1 .$$

Indichiamo in generale con $(\theta_r)_0$ il punto di $C_1^{(4)}$ di parametro θ_r; e poniamo altresì al solito:

$$\begin{array}{l} \Sigma\theta_r = \theta_1 + \theta_2 + \cdots\cdots \\ \Sigma\theta_r\,\theta_s = \theta_2\,\theta_3 + \theta_3\,\theta_1 + \theta_1\,\theta_2 + \cdots \\ \Sigma\theta_r\,\theta_s\,\theta_t = \theta_1\,\theta_2\,\theta_3 + \theta_2\,\theta_3\,\theta_4 + \cdots \end{array}$$

allora saranno:

$$(c) \left\{ \begin{array}{l} X_1 - X_2\,\Sigma\theta_r + \theta_1\,\theta_2\,X_3 = 0 \\ X_2 - X_3\,\Sigma\theta_r + \theta_1\,\theta_2\,X_4 = 0 \\ X_3 - X_4\,\Sigma\theta_r + \theta_1\,\theta_2\,X_3 = 0 \end{array} \right.$$

l' equazioni della corda che unisce i punti $(\theta_1)_0$, $(\theta_2)_0$; e:

$$(d) \left\{ \begin{array}{l} X_1 - X_2\,\Sigma\theta_r + X_3\,\Sigma\theta_r\,\theta_s - \theta_1\,\theta_2\,\theta_3\,X_4 = 0 \\ X_2 - X_3\,\Sigma\theta_r + X_4\,\Sigma\theta_r\,\theta_s - \theta_1\,\theta_2\,\theta_3\,X_5 = 0 \end{array} \right.$$

saranno l' equazioni della trisecante che contiene i punti $(\theta_1)_0$, $(\theta_2)_0$, $(\theta_3)_0$.

Finalmente l' equazione:

$$(e) \qquad X_1 - X_2\,\Sigma\theta_r + X_3\,\Sigma\theta_r\,\theta_s - X_4\,\Sigma\theta_r\,\theta_s\,\theta_t + X_5\,\theta_1\,\theta_2\,\theta_3\,\theta_4 = 0$$

sarà quella dell' S_3 che congiunge i 4 punti $(\theta_r)_0$ $(r = 1, 2, 3, 4)$ di $C_1^{(4)}$. L' equazioni scritte sono, estese alla quartica, le equazioni fondamentali del sig. Cremona per lo studio della cubica gobba. Risulta subito intanto che l' equazioni;

$$(c') \left\{ \begin{array}{l} X_1 - 2\theta X_2 + \theta^2\,X_3 = 0 \\ X_2 - 2\theta X_3 + \theta^2\,X_4 = 0 \\ X_3 - 2\theta X_4 + \theta^2\,X_5 = 0 \end{array} \right.$$

sono quelle della tangente a $C_1^{(2)}$ nel punto $(\theta)_0$.

Invece le:

$$(d') \left\{ \begin{array}{l} X_1 - 3\theta X_2 + 3\theta^2\,X_3 - \theta^3\,X_4 = 0 \\ X_2 = 3\theta X_3 + 3\theta^2\,X_4 - \theta^3\,X_5 = 0 \end{array} \right.$$

sono quelle della trisecante osculatrice nel punto $(\theta)_0$. Finalmente l' equazione:

$$(e') \qquad f^{(4)}(\theta) = X_1 - 4\theta X_2 + 6\theta X_3 - 4\theta^3\,X_4 + \theta^5\,X_5 = 0$$

è quella dell' S_3 osculatore nel punto stesso $(\theta)_0$. Chiamando con I, J, Δ rispettivamente l' invariante quadratico, il cubico ed il discriminante della forma biquadratica $f^{(4)}(\theta)$; essendo cioè:

$$I = 3X_3^2 - 2X_2\,X_4 + X_1\,X_5$$

$$J = \left| \begin{array}{ccc} X_1 & X_2 & X_3 \\ X_2 & X_3 & X_4 \\ X_3 & X_4 & X_5 \end{array} \right| ;$$

$$\Delta = I^3 - 27\,J^2$$

avremo che l' equazione:

$$J = 0$$

sarà quello della rigata cubica $S_3^{(3)}$ formata dalle corde di $C_1^{(4)}$.

L' equazioni invece:

$$I = 0 \qquad J = 0$$

saranno quelle della rigata $S_2^{(6)}$ a due dimensioni formata dalle tangenti di $C_1^{(4)}$. Quindi $S_2^{(6)}$ è del 6° ordine.

Finalmente:

$$\Delta = 0$$

sarà l' equazione della rigata a tre dimensioni $S_3^{(6)}$ formata dalle trisecanti osculatrici di $C_1^{(4)}$, che sarà pure del 6° ordine.

8. Da un punto Y_0 di Σ_4 partono al più quattro S_3 osculatori a $C_1^{(4)}$; cioè $S_3^{(6)}$ è della 4ª classe; e i parametri θ_r dei quattro S_3 osculatori a $C_1^{(4)}$, uscenti da Y_0, sono le radici dell' equazione biquadratica:

$$Y_1 - 4\theta Y_2 - 6\theta^2 Y_3 - 4\theta^3 Y_4 + \theta^5 Y_5 = 0 ;$$

e si avrà quindi:

$$Y_1 : 4Y_2 : 6Y_3 : 4Y_4 : Y_5 = \theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4 : \Sigma\theta_r \theta_s \theta_t : \Sigma\theta_r \theta_s : \Sigma\theta_r : 1 .$$

L' equazione dell' S_3 individuato dai punti $(\theta_r)_0$ $(r = 1, 2, 3, 4)$ sarà dunque:

$$X_1 X_5 + X_5 Y_1 - 4 (X_2 Y_4 + X_4 Y_2) + 6Y_3 X_3 = 0 .$$

L' S_3 considerato non è altro che l'Y_3 *polare del punto* Y_0 *rispetto alla quadrica* $I_3^{(2)}$ *rappresentata dall'equazione*:

$$I = 0 .$$

Si vede subito che $I_3^{(2)}$ *passa per* $C_1^{(4)}$ *e che l'* S_3 *polare di un punto* X_0 *di* $C_1^{(4)}$ *rispetto ad* $I_3^{(2)}$ *non è altro che l'*S_3 *osculatore in* X_0 *a* $C_1^{(4)}$; *cioè*: $C_1^{(4)}$ *ha per polare reciproca rispetto ad* $I_3^{(2)}$ *la sua sviluppabile circoscritta* $S_3^{(6)}$, *considerata come inviluppata dai suoi* S_3 *tangenti.*

Chiamando *assi* della sviluppabile, gli S_1 intersezioni di tre S_3 tangenti di essa, allora il sistema $[\Sigma]_3$ delle trisecanti di $C_1^{(4)}$ avrà per polare reciproco il sistema $[\sigma]_3$ degli assi di $S_3^{(6)}$ ecc. ecc.

Ponendo:

$$L = X_2 X_4 - X_3^2 \qquad L' = X_1 X_5 - X_2 X_4$$
$$M = X_2 X_3 - X_1 X_4 \qquad M' = X_2 X_5 - X_3 X_4$$
$$N = X_1 X_3 - X_2^2 \qquad N' = X_3 X_5 - X_4^2$$

si trova subito, per le (6), che, se una quadrica $S_3^{(2)}$ di Σ_4 contiene $C_1^{(4)}$, la sua equazione deve avere la forma:

$$(h) \qquad A' L + B' M + C' N + AL' + BM' + CN' = 0 .$$

Dunque le quadriche circoscritte a $C_1^{(4)}$ formano un sistema lineare cinque volte infinito $[\Sigma_5]$.

A $[\Sigma_5]$ appartengono in particolare i coni quadrici $(Y_0)_3^{(2)}$ formati dalle trisecanti

di $C_1^{(4)}$ passanti per un punto Y_0 di Σ_4. E difatti poi si trova subito, che l' equazione del cono $(Y_0)_3^{(2)}$ è

$$\begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 \\ Y_2 & Y_3 & Y_4 & Y_5 \\ X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ X_2 & X_3 & X_4 & X_5 \end{vmatrix} = 0$$

ossia

$$L'_y L + M'_y M + N'_y N + L_y L' + M_y M' + N_y N' = 0$$

ove con L_y, M_y... indichiamo i binomî L, M... in cui il luogo delle coordinate X_r di un punto corrente X_0 di Σ_4 si pongono le coordinate Y_r del punto fisso Y_0.

Fra le superficie (h) vi è la $(I)_3^{(2)}$ la quale può essere definita il luogo dei punti di Σ_4 da cui partono quaderne equianarmoniche di S_3 osculatori a $C_1^{(4)}$.

Egualmente la superficie $S_3^{(3)}$ delle corde di $C_1^{(4)}$ può essere definita il luogo dei punti di Σ_4 da cui partono quaderne armoniche di S_3 osculatori.

9. Riferiamo ora la curva normale $C_1^{(4)}$ di Σ_4 projettivamente alla cubica normale $C_1^{(3)}$ di Σ_3. Ciò sarà fatto quando siano fissati fra loro corrispondenti due punti X_0, X che nelle due curve siano individuati dallo stesso valore del parametro θ. Ai centri A, B delle due stelle generatrici di $C_1^{(3)}$ corrisponderanno i centri A_0, B_0 delle stelle generatrici di $C_1^{(4)}$. Fra ogni stella $(M_0)_3$ di 3^a specie avente il centro in un punto M_0 di $C_1^{(4)}$ e lo spazio Σ_3 è posta una corrispondenza projettiva determinata dal cono cubico $(M_0)_2^{(3)}$ projettante $C_1^{(4)}$ da M_0, che è riferito projettivamente, in modo determinato, alla cubica $C_1^{(3)}$. In particolare la stella $(A_0)_3$ sarà riferita projettivamente a Σ_3 in modo che al raggio S_1 di $(A_0)_3$ rappresentato dall' equazione

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = \lambda : \mu : \nu : \tau$$

corrisponderà il punto X le cui coordinate sono

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \lambda : \mu : \nu : \tau \,.$$

10. Ciò posto assumiamo in Σ_4 un punto qualunque Y_0 di coordinate Y_r. Al raggio $Y_0 B_0$ della stella $(B_0)_3$ corrisponderà in $(A_0)_3$ un raggio che con Y_0 individua un S_2 di $(A_0)_3$ il cui corrispondente in $(B_0)_3$ passerà per Y_0. Cioè, come due S_2 corrispondenti delle stelle projettive $(A_0)_3$, $(B_0)_3$ generatrici di $C_1^{(4)}$ si tagliano in generale in un sol punto di Σ_4, così viceversa per ogni punto preso arbitriamente in Σ_4 passano due soli S_2 fra loro corrispondenti in $(A_0)_3$, $(B_0)_3$. Di qui segue una corrispondenza univoca fra i punti Y_0 di Σ_4 e le rette y di Σ_3. Ed invero: un punto Y_0 di Σ_4 individua un S_2 di $(A_0)_3$ il cui corrispondente in $(B_0)_3$ passa per Y_0; l' S_2 stesso di $(A_0)_3$ ha per corrispondente in Σ_3 una retta y che evidentemente, una volta data in Σ_3, individua reciprocamente il punto Y_0 di Σ_4.

Segue immediatamente che per le coordinate locali x_{rs} della retta y si ha:

$$x_{23} : x_{31} : x_{12} : x_{11} : x_{22} : x_{33} = L_y : M_y : N_y : L'_y : M'_y : N'_y$$

e le coordinate Y_r di Y_0 sono espresse per le coordinate locali x_{rs} di y dalle formole

$$(f) \left\{ \begin{aligned} &\frac{Y_1}{x_{12}x_{23} - x^2_{31} + x_{11}x_{12}} = \frac{Y_2}{x_{23}x_{31} + x_{22}x_{12}} = \frac{Y_3}{x_{12}x_{33} - x^2_{23}} = \\ &= \frac{Y_4}{-x_{22}x_{23} - x_{33}x_{31}} = \frac{Y_5}{x_{11}x_{33} - x^2_{22} + x_{33}x_{23}} \,; \end{aligned} \right.$$

perchè, essendo ϱ_r, ζ_r ($r = 1, 2, 3, 4$) le coordinate di due piani passanti per la retta y, e quindi

$$\xi_{23} = (\varrho_2 \zeta_3) \qquad \xi_{31} = (\varrho_3 \zeta_1) \qquad \xi_{12} = (\varrho_1 \zeta_2)$$
$$\xi_{11} = (\varrho_1 \zeta_4) \qquad \xi_{22} = (\varrho_2 \zeta_4) \qquad \xi_{33} = (\varrho_3 \zeta_4)$$

le *coordinate tangenziali* di y, sarà:

$$\begin{vmatrix} \Xi_1 & \Xi_2 & \Xi_3 & \Xi_4 & \Xi_5 \\ \varrho_1 & \varrho_2 & \varrho_3 & \varrho_4 & 0 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & \zeta_4 & 0 \\ 0 & \varrho_1 & \varrho_2 & \varrho_3 & \varrho_4 \\ 0 & \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & \zeta_4 \end{vmatrix} = 0$$

l' equazione tangenziale del punto Y_0 corrispondente alla retta y.

Si può osservare che le espressioni delle coordinate locali della retta y per mezzo di quelle del punto Y_0 corrispondente, non sono altro che quelle di y quando per determinarla si prendono i punti in cui la retta sega i raggi delle stelle $(A)_2$, $(B)_2$ corrispondenti agli S_2 di $(A_0)_3$, $(B_0)_3$ che si segano in Y_0: cioè i punti ove y sega due raggi corrispondenti nelle stelle $(A)_2$, $(B)_2$ projettive generatrici di $C_1^{(3)}$.

11. Resta quindi rappresentato Σ_4 sullo spazio $R_4^{(2)}$ formato dalle rette di Σ_3 e di tale rappresentazione risultano le seguenti proprietà:

I punti di una trisecante di $C_1^{(4)}$ *hanno per immagini le rette di un piano di* Σ_3, *sicchè il sistema* $[\Sigma_3]$ *delle trisecanti di* $C_1^{(4)}$ *è rappresentato dal sistema* (σ) *dei piani rigati di* Σ_3; *in modo che la trisecante* S_2 *congiungente i punti* M_0, N_0, P_0 *di* $C_1^{(4)}$ *ha per immagine il piano rigato* σ *congiungente i punti* M, N, P *di* $C_1^{(3)}$ *corrispondenti ad* M_0, N_0, P_0, *nella corrispondenza projettiva posta fra* $C_1^{(4)}$ *e* $C_1^{(3)}$.

I fasci di raggi del piano σ *sono le immagini delle coniche della trisecante* S_2 *circoscritte al triangolo* $M_0 N_0 P_0$; *e le coniche-inviluppi di* σ *inscritte nel triangolo* MNP *sono le immagini degli* S_1 *della trisecante* S_2.

I punti di una corda congiungente i punti N_0, P_0 *di* $C_1^{(4)}$ *hanno per immagini rette coincidenti colla corda* NP *di* $C_1^{(3)}$. Cioè: $S_3^{(3)}$, *come costituita dalle sue generatrici* S_1, *viene rappresentata col sistema* $[\Sigma]_2$ *delle corde di* $C_1^{(3)}$.

Un S_1 *di* Σ_4 *che si appoggi in un punto* M_0 *di* $C_1^{(4)}$ *ha per immagine un fascio di raggi di* $R_4^{(2)}$, *situato nel piano* σ, *immagine della trisecante* S_2 *passante per* S_1. *Il centro del fascio è in un punto determinato della corda* NP *di* $C_1^{(3)}$, *immagine della corda di* $C_1^{(4)}$ *congiungente gli altri due punti* N_0, P_0 *della trisecante e di* $C_1^{(4)}$.

12. *Le quadriche di* Σ_4 *circoscritte a* $C_1^{(4)}$ *hanno per immagini i complessi lineari di* $R_4^{(2)}$; *e i coni quadrici circoscritti a* $C_1^{(4)}$ *hanno per immagini i complessi lineari s p e c i a l i. La condizione quindi perchè una quadrica circoscritta a* $C_1^{(4)}$ *sia un cono* è:

$$AA' + BB' + CC' = 0$$

ritenendo l' equazione (h) data per una quadrica qualunque circoscritta a $C_1^{(4)}$.

In altri termini:

Un fascio di piani di Σ_3 *è l' immagine delle generatrici del cono quadrico*

formato dalle trisecanti di $C_1^{(4)}$, *passanti pel punto che ha per immagine l' asse del fascio di piani.*

13. Risulta ancora:

Un S_3 *di* Σ_4 *ha per immagine un complesso* θ^2 *tetraedrale; il tetraedro principale del complesso essendo formato dai punti di* $C_1^{(3)}$ *corrispondenti a quelli in cui* $C_1^{(4)}$ *viene tagliata dall'* S_3 *considerato.*

Data l' equazione dell' S_3 le formole (f) del n. 10 servono a scrivere l' equazione del complesso tetraedrale immagine.

Segue quindi:

Un S_1 *di* Σ_4 *ha in generale per immagine il sistema di generatrici di una quadrica gobba oppure una conica-inviluppo toccata da tutte le faccie dei tetraedri principali relativi ai complessi tetraedrali immagini degli* S_3 *di* Σ_4 *passanti per l'* S_1 *considerato.*

Ed anche:

Un S_2 *di* Σ_4 *ha per immagine il sistema degli assi di una sviluppabile di* 3ª *classe inviluppata dalle faccie dei tetraedri principali relativi ai complessi tetraedrali immagini degli* S_3 *che passano per l'*S_2 *considerato.*

Quindi:

Gli S_3 *di* Σ_4 *che projettano da un punto* A_0 *di* $C_1^{(4)}$ *le dodici trisecanti contenute in tre* S_3 *di* Σ_4, *toccano uno stesso cono quadrico* $(A_1)_3^{(2)}$; *e tale cono è pure toccato da tutti gli* S_3 *che projettano da* A_0 *le trisecanti di* $C_1^{(4)}$ *situate negli* S_3 *che passano per l'* S_1 *determinato dai primi tre.*

Gli S_3 *di* Σ_4 *che projettano da un punto* A_0 *di* $C_1^{(4)}$ *le trisecanti contenute negli* S_3 *passanti per uno stesso* S_2 *di* Σ_4 *formano una stessa sviluppabile di* 3ª *classe della stella* $(A_0)_3$.

14. *Un fascio* φ *di quadriche circoscritte a* $C_1^{(4)}$ *ha per immagine un fascio* φ' *di complessi lineari. Quindi nel fascio* φ *di quadriche vi sono due coni, che hanno per immagini i due complessi speciali del fascio* φ'.

La congruenza lineare C *comune ai complessi del fascio* φ' *è l' immagine della superficie* $S_2^{(4)}$ *comune alle quadriche del fascio* φ; *la quale è appunto del* 4° *ordine ed è razionale.*

La $S_2^{(4)}$ *è determinata da* $C_1^{(4)}$ *e da quattro dei suoi punti. Contiene quattro corde di* $C_1^{(4)}$, *dalle quali pure è interamente determinata.*

Finalmente contiene due serie semplicemente infinite di coniche; e quindi $S_2^{(4)}$ *è generata in due modi differenti da una conica variabile.*

15. *Una rete* (ϱ) *di quadriche circoscritta a* $C_1^{(4)}$ *ha per immagine una rete* (ϱ') *di complessi lineari.*

Quindi alla rete (ϱ) *appartengono infiniti coni quadrici, le cui immagini sono i complessi speciali della retta* (ϱ'). *Le quadriche della rete* (ϱ) *si tagliano in una nuova curva razionale* $C'_1{}^{(4)}$ *del* 4° *ordine avente per immagine la rigata* $\gamma^{(2)}$ *in cui si tagliano i complessi della rete* (ϱ').

La rigata $d^{(2)}$ *delle direttrici di* $\gamma^{(2)}$ *è l' immagine di un' altra curva razionale* $C_1''^{(4)}$ *pure del* 4° *ordine, luogo dei vertici dei coni quadrici appartenenti alla rete* (ϱ) *delle quadriche. Le curve* $C_1'^{(4)}$, $C_1''^{(4)}$ *si determinano reciprocamente*

fra loro allo stesso modo. L' una di esse $C_1'^{(4)}$ *è il luogo dei punti ove si tagliano le coppie di trisecanti* S_2 *di* $C_1^{(4)}$ *generatrici di coni quadrici* $(P_0)_3^{(2)}$, $(Q_0)_3^{(2)}$, *aventi i vertici in due punti* P_0, Q_0 *dell' altra curva* $C_1''^{(4)}$; *e riferiti fra loro projettivamente in modo determinato.*

16. *Un sistema lineare* $(\sigma')_3$ *tre volte infinito di complessi lineari è l' immagine di un sistema lineare analogo* $(\sigma)_3$ *di quadriche circoscritte a* $C_1^{(4)}$, *che si tagliano ulteriormente in due punti* P_0, Q_0, *aventi per immagini le rette comuni ai complessi di* $(\sigma')_3$. *I coni quadrici di* $(\sigma)_3$ *formano una serie doppiamente infinita; il luogo dei vertici dei coni stessi è una superficie razionale del* 4° *ordine* $S_4^{(2)}$ *circoscritta a* $C_1^{(4)}$; *avente per immagine la congruenza che ha per direttrici le rette comuni ai complessi di* (σ'_3) ecc.

17. *Una stella* $(E)_2$ *di raggi di* $R_4^{(3)}$ *è l' immagine di una superficie* $\Sigma_2^{(3)}$ *razionale del* 3° *ordine circoscritta a* $C_1^{(4)}$. *Per ciascun punto* M_0 *della quartica passa un* S_1 *di* $\Sigma_2^{(3)}$. *A* $\Sigma_2^{(3)}$ *appartiene la corda* T_1 *di* $C_1^{(4)}$ *che ha per immagine la corda di* $C_1^{(3)}$ *passante per* E; *e* I_1 *taglia tutte le generatrici* S_1 *di* $\Sigma_2^{(3)}$.

La superficie $\Sigma_2^{(3)}$ non è altro che lo spazio normale a due dimensioni di Σ_4, già studiato dal sig. Veronese nel suo pregiato lavoro inserito nel vol. XIX dei *Mathematische Annalen.* Che $\Sigma_2^{(3)}$ sia il luogo dei punti ove si tagliano le coppie di S_2 corrispondenti in due stelle projettive di 2ª specie in Σ_4, risulta subito dall' osservare che al punto E di Σ_3 corrisponderà un raggio e_1 della stella $(A_0)_3$; ad e_1 un raggio e'_1 di $(B_0)_3$. Le due stelle $(e_1)_2$, $(e'_1)_2$ di 2ª specie in Σ_4, fra loro corrispondenti nelle due $(A_0)_3$, $(B_0)_3$ sono projettive e producono, nel modo detto, la superficie $\Sigma_2^{(3)}$.

Gli S_2 *secanti di* $\Sigma_2^{(3)}$, *cioè gli* S_2 *che tagliano* $\Sigma_2^{(3)}$ *in una conica, sono le trisecanti di* $C_1^{(4)}$, *che hanno per immagini i piani della stella* $(E)_2$. Di qui seguono tutte le proprietà del sistema $(\sigma)_2$ doppiamente infinito delle secanti di $\Sigma_2^{(3)}$ cioè: *per ogni punto* R_0 *passa una sola secante della superficie; e se il punto* R_0 *appartiene alla superficie allora le secanti vi formano un cono quadrico* $(R_0)_3^2$ ecc.

Le superficie cubiche $\Sigma_2^{(3)}$ *circoscritte a* $C_1^{(4)}$ *formano un sistema tre volte infinito. Due superficie del sistema si tagliano in un punto di* Σ_4. *Tre superficie si tagliano a due, a due in tre punti pei quali passa una trisecante di* $C_1^{(4)}$. Si potrebbe in tal modo seguitare a dedurre proprietà di $C_1^{(4)}$ col mezzo della rappresentazione data di Σ_4 sopra $R_4^{(2)}$. I pochi risultati ottenuti ci sono sembrati sufficientemente importanti per fare oggetto di nota la rappresentazione di Σ_4 su $R_4^{(2)}$.

RELAZIONE

letta dal Socio De Paolis, relatore, a nome anche del Socio Battaglini, nella seduta del 6 marzo 1887, sulla Memoria del dott. Giovanni Bordiga intitolata: *La superficie del 6° ordine, con dieci rette, nello spazio* R_4; *e le sue proiezioni nello spazio ordinario.*

« La superficie F_2^6, di due dimensioni e di 6° ordine, generata nello spazio di quattro dimensioni da quattro stelle collineari di spazî di tre dimensioni, è stata considerata da Veronese; il dott. Bordiga, nella sua Memoria, ne riprende lo studio, dimostrando e completando le proprietà enunciate da Veronese, specialmente per ciò che riguarda la sua rappresentazione piana. L'autore studia pure le superficie che si ottengono proiettando la F_2^6 nello spazio ordinario; scegliendo il centro di proiezione in posizione generale, trova una superficie del 6° ordine, già menzionata da Caporali; scegliendolo poi in varie posizioni particolari, trova e rappresenta sul piano, nove superficie del 6° e quattro del 5° ordine.

« Nella Memoria sono studiati anche i casi in cui dalla F_2^6 si staccano uno, due e tre piani, rimanendo così una superficie di 5°, 4° e 3° ordine.

« Avendo riguardo all'accuratezza con cui è condotto il lavoro del dott. Bordiga, ed all'interesse che ha come applicazione della teoria degli spazî a più dimensioni, per dedurre proprietà delle superficie dello spazio nostro, alcune delle quali sono studiate dall'autore per la prima volta, proponiamo che la Memoria sia inserita negli Atti dell'Accademia ».

La superficie del 6° ordine, con dieci rette, nello spazio R_4; e le sue proiezioni nello spazio ordinario. (1)

Memoria del dott. GIOVANNI BORDIGA

§ I. *Generazione della superficie* F_2^6 *nello spazio* R_4. *Proprietà principali.*

1. La superficie F_2^6 è generata da quattro forme proiettive di 2ª specie $S_1^{(1)}$, $S_1^{(2)}$, $S_1^{(3)}$, $S_1^{(4)}$; i punti di F_2^6 sono le intersezioni degli spazî omologhi a tre dimensioni delle quattro forme (2).

La superficie è del sesto ordine. Infatti ogni spazio ordinario taglia le quattro forme S_1 secondo quattro stelle di piani: due qualunque di queste determinano con ognuna delle altre due una superficie cubica generale; le due superficie cubiche si tagliano secondo una cubica gobba (che è il luogo dei punti d'intersezione dei raggi corrispondenti nelle due stelle collineari che hanno i centri su ambe le superficie) e secondo una curva del 6° ordine C^6 i cui punti sono evidentemente situati su F_2^6. Ne segue:

Ogni piano dello spazio fondamentale R_4 *incontra, in generale, la superficie* F_2^6 *in sei punti dei quali non ve ne possono essere quattro in linea retta.*

(1) Questa superficie è un caso particolare della superficie $F_2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ generata nello spazio R_n da n forme proiettive di 2ª specie. Lo studio della $F_2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ può essere di guida allo studio della congruenza nello spazio R_{n+1} generata da n forme proiettive di 2ª specie. Questa congruenza è tagliata da uno spazio R_n secondo una $F_2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ con $\frac{n(n+1)}{2}$ rette (le quali corrispondono ai punti fondamentali della rappresentazione piana di ordine minimo) e quindi la sua proiezione nello spazio ordinario da uno spazio R_{n-2} è, in generale, una congruenza dell'ordine $\frac{n(n-1)}{2}$ e della classe $\frac{n(n+1)}{2}$.

(2) Veronese, *Princip. des Projicirens und Schneidens.* Math. Ann. Bd. XIX. Il mio amico prof. Veronese in una nota a questo suo importantissimo lavoro, dice di credere che la superficie F_2^6 non era nota. Certo gli era sfuggita la notizia che ne aveva data il prof. Caporali nel suo opuscolo *Sopra i sistemi lineari triplamente infiniti di curve algebriche piane* (Milano 1879, Hoepli) pag. 26.

Cito questo lavoro del prof. Caporali non solo per debito scientifico e perchè il lettore vegga che le conclusioni a cui io giungo sono, in taluni punti, le medesime a cui era giunto il Caporali per altra via; ma anche per riverenza alla memoria del giovane professore dell'Università napoletana, la notizia della cui tragica fine mi ha sorpreso mentre stava per dargli notizia delle mie osservazioni e per richiederlo di autorevole consiglio.

8 luglio 1886. G. BORDIGA.

Le curve C^6 sono del genere $p = 3$, perchè, nella rappresentazione piana delle superficie cubiche sulle quali sono descritte, hanno per immagini curve del 4° ordine senza punti doppî ([1]).

2. *Se tre piani omologhi di tre forme* S_1 *concorrono in un punto, questo è situato sulla superficie* F_2^6. Infatti lo spazio determinato da questo punto e dal quarto piano omologo incontra nel punto medesimo gli spazî omologhi. Per ogni terna delle forme vi sono tre al più ed uno almeno di questi punti.

Un piano qualsivoglia $P_2^{(1)}$ della prima forma incontra in un punto ognuno dei tre piani corrispondenti. Gli spazî omologhi delle tre forme $S_1^{(2)}$ $S_1^{(3)}$, $S_2^{(4)}$, che si appoggiano rispettivamente a questi tre piani, tagliano $P_2^{(1)}$ secondo tre fasci di raggi. Non vi sono che tre punti, al più, nei quali concorrano le terne di raggi corrispondenti; questi tre punti non possono essere in linea retta. Si conclude che ogni piano di una forma S_1 incontra F_2^6 in tre punti soltanto e quindi che: *gli assi delle forme* S_1 *sono triseganti della superficie.*

Questa proprietà degli assi può essere dimostrata osservando che le tre forme $S_1^{(2)}$, $S_1^{(3)}$, $S_1^{(4)}$ generano, colla intersezione dei loro spazî omologhi, una superficie Φ_3^3 a tre dimensioni e del 3° ordine la quale non può essere incontrata dalla retta $S_1^{(1)}$ in più di tre punti.

Un piano che passa per una trisecante non può contenere in generale altre rette trisecànti; se ne contiene un' altra, le due rette trisecanti debbono incontrarsi in un punto della superficie.

Poichè ogni C^6 viene proiettata da un suo punto, su di un piano dello spazio che la contiene, in una curva del 5° ordine ($p=3$) con non più di tre punti doppî, si potrà stabilire che: *tutte le trisecanti di* F_2^6, *uscenti da un punto della superficie, formano un cono a due dimensioni e del 3° ordine.*

Le rette che congiungono un punto arbitrario dello spazio fondamentale R_4 con qualsivoglia punto della superficie formano una duplice infinità; tra esse quelle che sono assoggettate alla condizione di incontrare la superficie un' altra volta formeranno una semplice infinità; e saranno in numero discreto quelle assoggettate alla condizione di incontrarla due altre volte. Fu dimostrato più sopra che due rette trisecanti non possono uscire da uno stesso punto fuori della superficie; adunque: *per un punto preso ad arbitrio fuori della superficie* F^6, *non passa, in generale, che una sola trisecante della superficie medesima.*

3. *La superficie* F_2^6 *può essere rappresentata punto per punto su di un piano* Ω_2. Per ottenere questa rappresentazione basta porre in corrispondenza proiettiva reciproca il piano Ω_2 con una delle forme S_1. Ad ogni punto di Ω_2 corrisponderà uno spazio di S_1 e quindi il punto d' intersezione degli spazî omologhi; in casi particolari, ad un punto di Ω_2 potrà corrispondere una retta di F_2^6; si avranno così i *punti fondamentali* del piano rappresentativo.

Ad ogni retta di Ω_2 *corrisponde una curva normale del 4° ordine* C^4, generata dai quattro fasci omologhi di spazî proiettivi alla retta.

([1]) Clebsch, *Ueber die ebene Abbildung einer Fläche dritter Ordnung.* Math. Ann. Bd. V.— Cremona, *Mémoire sur les surfaces du troisième ordre.* Crelle 68.

Quattro punti ad arbitrio di F^6, non situati su di uno stesso piano, determinano uno spazio ordinario e quindi la curva sezione C^6; la quale perciò non potrà avere più di quattro punti comuni con qualsivoglia curva normale C^4. Così, nel piano Ω_2, *ogni curva* C^6 *ha per immagine una curva del 4° ordine che passa per dieci punti fondamentali.*

Ne segue che *la superficie* F_2^6 *possiede dieci rette o raggi principali.*

Due curve normali C^4 descritte su F^6 hanno sempre un punto comune ed uno solo.

Ogni retta che passa per uno dei punti fondamentali del piano Ω_2 rappresenta una cubica gobba della superficie; questa cubica s'appoggia ad una sola delle dieci rette. Lo spazio ordinario che contiene questa cubica taglia ancora F_2^6 secondo una curva piana la quale si appoggia alle altre nove rette ed ha per immagine piana la cubica che passa per i nove punti principali corrispondenti cioè: *la superficie* F_2^6 *possiede dieci cubiche piane senza punto doppio.*

Ad ogni retta che passa per due punti fondamentali corrisponde una conica della superficie. Vale a dire: *la superficie* F_2^6 *possiede quarantacinque coniche.*

Una conica ed una cubica piana di F_2^6 le quali si appoggino ad un solo raggio in comune, sono nello stesso spazio ordinario con questo raggio; ma la conica e la cubica, come si vede dalla rappresentazione piana, non possono avere più di due punti in comune. Ne segue che: *ogni cubica piana di* F_2^6 *è tangente al piano di nove coniche ed il piano di ogni conica è tangente a due cubiche piane.*

Anche sarà facile riconoscere dalla rappresentazione piana della superficie che:

I piani delle coniche di F_2^6 si incontrano due a due in un punto. Questi punti sono fuori della superficie se le due coniche si appoggiano ad un medesimo raggio; si incontrano su questa se non si appoggiano ad alcun raggio in comune. *Vi sono 360 punti dei primi; 630 dei secondi. Dei primi se ne trovano 36 su ognuna delle dieci cubiche piane; dei secondi se ne trovano 28 su ognuna delle quarantacinque coniche.* Per conseguenza:

I piani di due coniche che si appoggiano ad un medesimo raggio si incontrano sul piano di quella cubica che a questo raggio non si appoggia.

§ II. *Proiezioni della superficie* F_2^6 *su di uno spazio ordinario, da un punto fuori della superficie.*

4. Se si proietta la superficie F_2^6 punto per punto su di uno spazio ordinario R_3 si otterranno delle superficie del 6° ordine ed anche di ordine inferiore, le cui proprietà si modificheranno quando il centro O di proiezione verrà a trovarsi in posizioni speciali rispetto alla superficie generale F_2^6.

Procederemo all'esame dei varî casi speciali:

Il centro O *sia in una posizione arbitraria dello spazio fondamentale* R_4.

Ad ogni punto di F_2^6 corrisponderà un punto della superficie proiezione ${}_0\varphi^6$. Ogni piano dello spazio R_3 taglierà ${}_0\varphi^6$ secondo una curva del 6° ordine γ^6, la quale sarà la proiezione della curva C^6 determinata su F^6 dallo spazio che passa per quel piano e per il centro O.

La superficie ${}_0\varphi^6$ *possiede:*

10 rette che non si incontrano;

45 coniche che si appoggiano ad una coppia di rette;

10 cubiche piane del genere 1 che si appoggiano a nove rette.

10 sistemi di ∞' *cubiche gobbe che si appoggiano soltanto ad una retta;*

una doppia infinità di quartiche gobbe e di seconda specie che non incontrano alcuna retta. Ecc.

La curva gobba $\mathfrak{C}^6$ è, come abbiamo detto, del genere 3. Essa è lo spigolo di regresso di una sviluppabile del 16° ordine (¹).

Le formole di Plücker daranno quindi le caratteristiche:

$$n = 6 \quad m = 30 \quad r = 16 \quad \beta = 0 \quad d = 48$$
$$x = 96 \quad y = 72 \quad h = 7 \quad p = 3$$

cioè: *la sezione piana della superficie* ${}_0\varphi^6$ *è una curva del 6° ordine, della 16ª classe, con sette punti doppî, nessuna cuspide, settantadue rette bitangenti, trenta flessi,* ecc.

5. Vogliamo ora determinare la classe della superficie ${}_0\varphi^6$.

La classe di ${}_0\varphi^6$ è eguale al numero degli spazî tangenti a $F_2{}^6$ che si possono condurre per un piano qualunque che passi per il centro 0. Si dicono spazî tangenti in un punto di una superficie F_2 di R_4 quelli che contengono il piano tangente alla superficie in questo punto; la loro intersezione colla superficie è una curva con punto doppio nel punto di contatto. Tanti spazî tangenti ad $F_2{}^6$ passeranno per un piano di R_4 quante curve con punto doppio saranno determinate dal fascio di spazî seganti che ha per asse questo piano. *La classe di* ${}_0\varphi^6$ *è dunque determinata dal numero di curve con un punto doppio che si trovano in un fascio di curve* γ^4 *del piano* Ω_2.

Ne segue (²):

La superficie ${}_0\varphi^6$ *è della 27ª classe.*

6. Cerchiamo ora le caratteristiche del cono circoscritto a ${}_0\varphi^6$ avente il vertice in un punto qualunque 0' di R_3.

Si noti che la curva di contatto di questo cono è la proiezione della curva di contatto di tutti gli spazî tangenti che si possono condurre alla superficie $F_2{}^6$ per la retta che dal centro 0 proietta il vertice 0' del cono. I punti di questa curva sono dunque rappresentati nei punti doppî delle curve di una rete di γ^4 determinata dalle curve piane corrispondenti a tre spazî ad arbitrio di R^4 che si intersechino secondo 00'. Cioè: *il genere del cono circoscritto a* ${}_0\varphi^6$ *è eguale al genere della curva Hessiana della rete.* La Hessiana è del 9° ordine (³) con punti doppî nei punti fondamentali; è quindi del *genere 18.*

(¹) « Se due superficie d'ordine $n_1\, n_2$ si segano secondo una curva d'ordine μ, le cui tangenti « formino una sviluppabile d'ordine r, le superficie date hanno in comune un'altra curva d'ordine « $\mu' = n_1 n_2 - \mu$, la quale incontra la prima in $i = (n_1 + n_2 - 2)\,\mu - r$ punti ed è lo spigolo di « regresso di una sviluppabile d'ordine $r' = (n_1 + n_2 - 2)(\mu_1 - \mu) + r$ ». Nel nostro caso

$$n_1 = n_2 = 3 \quad \mu = 3 \quad \mu_1 = 6 \quad r = 4\,.$$

Cremona, *Preliminari ad una teoria geometrica delle superficie* pag. 68.

(²) La formola è $3\,(n-1)^2$. Vedi Cremona, *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane* pag. 67.

(³) L'ordine dell'Hessiana di una rete di ordine n è $3\,(n-1)$. Cremona, l. c. pag. 71.

Sapendosi ora *che il cono circoscritto alla superficie* ${}_0\varphi^6$ *è del 16° ordine, della 27ª classe, del genere 18,* in virtù delle note formole di Plücker si potrà stabilire che esso ha: *18 generatrici doppie, 39 generatrici cuspidali, 72 piani stazionarî, 235 piani bitangenti.*

7. Dal numero dei punti doppî di una sezione piana di ${}_0\varphi^6$ e dal numero delle rette trisecanti di $F_2{}^6$ che si possono condurre dal centro 0 di proiezione si deduce che: *la superficie* ${}_0\varphi^6$ *possiede una curva nodale del 7° ordine, la quale passa tre volte per l'unico punto triplo della superficie medesima.*

Per determinare la immagine della curva nodale, si noti che ogni piano proiettante una retta di $F_2{}^6$ taglia questa in tre punti fuori della retta; l' immagine piana della curva nodale passa dunque tre volte per ogni punto fondamentale; essa possiede altresì un punto doppio in ognuno dei tre punti determinati dal raggio trisecante uscente da 0. Perciò: *l'immagine della curva nodale è una curva* γ^{11} *dell' 11° ordine con punti tripli nei dieci punti fondamentali e punti doppî nelle tre immagini del punto triplo* di ${}_0\varphi^6$.

8. Vogliamo ora determinare il numero dei punti cuspidali della superficie ${}_0\varphi^6$ che si trovano sulla curva doppia. Si osservi che essi sono le proiezioni su ${}_0\varphi^6$ delle tangenti che dal centro 0 si possono condurre alla superficie $F_2{}^6$. Se da 0 si conducono nello spazio R_4 due raggi ad arbitrio 0A, 0B, e si determinano sulla superficie $F_2{}^6$ le curve di contatto degli spazî tangenti condotti per questi due raggi, si vedrà facilmente che le due curve avranno comuni i punti che si proiettano nei punti cuspidali richiesti, ed i punti di contatto degli spazî tangenti che contengono il piano dei due raggi 0A, 0B.

Le due curve di contatto sono rappresentate nel piano (6) da curve del 9° ordine con dieci punti doppî comuni, sicchè il numero dei punti cuspidali sarà dato da $81-40-27=14$. Cioè: *la curva nodale della superficie* ${}_0\varphi^6$ *possiede quattordici punti cuspidali.*

9. La curva γ^{11} è del genere 12. Ad ogni punto della curva nodale corrispondono due punti di γ^{11}; le rette che congiungono le coppie di punti inviluppano una curva α proiettiva alla curva nodale; questa non avendo punti stazionarî, la curva α non avrà flessi ($t=0$). Per determinare le proprietà della curva α bisogna conoscere altre due sue caratteristiche. Cerchiamole. Le curve α e γ'' si toccano nelle immagini dei punti cuspidali, le quali sono punti doppî nella corrispondenza determinata su γ''. In qualsivoglia fascio di raggi del piano, per mezzo di quella corrispondenza di punti si stabilisce una corrispondenza (11, 11) di raggi la quale ha ventidue raggi uniti; ogni tangente alla curva α che esca dal centro del fascio rappresenta due raggi uniti; se dunque m è la classe di α sarà

$$2m+14=22\,,\quad m=4\,.$$

La curva α *è della 4ª classe.*

Il genere della curva α è il genere della curva nodale. Per trovarlo basta ricorrere alle formole di Zeuthen (¹):

$$y_1-y_2=2x_2(p_1-1)-2x_1(p_2-1)$$

(¹) H. G. Zeuthen, *Nouvelle demonstration de théorèmes sur des séries de points correspondants sur deux courbes.* Math. Ann. Bd. III, pag. 152.

nella quale p_1 e p_2 sono i generi di due curve (C_1) (C_2); x_1 il numero dei punti di (C_1) che corrispondono ad ogni punto di (C_2), ed x_2 quello dei punti di (C_2) che corrispondono ad ognuno di (C_1); y_1 ed y_2 i numeri delle coincidenze di due punti che rispettivamente su (C_1) e (C_2) corrispondono ad uno stesso punto dell'altra curva. Nel nostro caso se (C_2) è la curva nodale e (C_1) è la sua immagine γ^{11}, si avranno i valori

$$y_1 = 14 \qquad y_2 = 0 \qquad x_2 = 1 \qquad x_1 = 2 \qquad p_2 = 12\,;$$

da questi valori si ricava che *il genere della curva nodale di* ${}_0\varphi^6$ *è 3.*

Con le caratteristiche $m = 4$, $t = 0$, $p = 3$, in virtù delle formole di Plücker, si ricaverà altresì che: *la curva* α *non ha tangenti doppie, ha ventotto punti doppî e ventiquattro cuspidi ed è del 12° ordine.*

10. I piani che passano per una retta di ${}_0\varphi^6$ sono l'intersezione con R_3 degli spazî a tre dimensioni che contengono il piano determinato da quella retta e dal centro di proiezione. Questi spazî tagliano $F_2{}^6$ secondo una curva C^5 rappresentata in Ω_2 da una γ^4 con punto doppio in uno dei punti fondamentali. Quindi la curva sezione di ${}_0\varphi^6$ non avrà che quattro punti doppî; gli altri tre punti doppî che debbono trovarsi nel piano della sezione ed appartenenti alla curva nodale, saranno situati sulla retta della superficie che è nel piano stesso. Si conclude: *la curva nodale incontra tre volte ogni raggio principale della superficie. I piani che passano per un raggio sono bitangenti e determinano un' involuzione i cui punti doppî sono punti parabolici della superficie.*

Il piano di una delle quarantacinque coniche situate su ${}_0\varphi^6$ taglia questa ancora secondo una curva del 4° ordine proiettiva ad una cubica del piano Ω_2 e di genere 1. Quel piano possiede adunque $2 . 4 + 2 = 10$ punti doppî. Cioè: *i piani delle quarantacinque coniche sono piani tritangenti della superficie* ${}_0\varphi^6$.

Dalla rappresentazione piana si deduce pure:

Per ogni punto di una conica di ${}_0\varphi^6$ passa una quartica di prima specie tangente in quel punto al piano della conica; quattro di esse sono tagliate dalla conica secondo una tangente in un punto ed hanno un contatto bipunto colla conica.

Se dal centro 0 si proiettano le dieci cubiche piane situate su $F_2{}^6$ si ottengono su ${}_0\varphi^6$ *dieci piani tritangenti ognuno dei quali contiene due cubiche;* una sola delle due cubiche ha punto doppio e si appoggia ad una sola delle dieci rette, l'altra incontra ognuna delle altre nove rette della superficie.

Oltre ai piani tritangenti già enumerati, la superficie ${}_0\varphi^6$ possiede quelli che passano per i raggi principali. Questi sono, per ogni raggio principale, tanti quante curve γ^4 nel piano Ω_2 con punto doppio in un punto fondamentale hanno punto doppio anche altrove. Sono cioè $3\,(4 - 1)^2 - 7 = 20$. Riassumendo:

La superficie ${}_0\varphi^6$ *possiede in totale 255 piani tritangenti.*

11. Per conoscere la classe della sviluppabile dei piani tangenti a ${}_0\varphi^6$ lungo la curva nodale, si osservi che ogni piano tangente a ${}_0\varphi^6$ lungo questa curva e condotto per un punto arbitrario $0'$ dello spazio R_3, è l'intersezione con R_3 dello spazio determinato in R_4 dalla retta $00'$ e da un piano che incontri questa retta e che sia tangente ad $F_2{}^6$ in un punto della curva che ha per proiezione la curva nodale di ${}_0\varphi^6$. Vale a dire: *la classe della sviluppabile tangente a* ${}_0\varphi^6$ *lungo la sua curva nodale*

è eguale all' ordine della superficie sviluppabile, a tre dimensioni, formata dai piani tangenti a F_2^6 *lungo la curva che si proietta nella curva nodale.*

Per avere l'ordine di questa superficie basta conoscere quanti spazî tangenti a F_2^6 lungo la curva passano per OO'; cioè basta conoscere, quanti sono i punti comuni alla curva di contatto degli spazî tangenti condotti per OO' ed alla curva che si proietta nella nodale, eccettuati i punti che si proiettano nei punti cuspidali. Le immagini piane delle due curve essendo del 9° e dell' 11° ordine con punti rispettivamente doppî e tripli nei punti fondamentali, ed i punti cuspidali essendo quattordici, si ricaverà che: *La sviluppabile dei piani tangenti a* ${}_0\varphi^6$ *lungo la curva nodale è della 25ª classe.*

12. Il cono che da un punto qualunque O' dello spazio R_3 proietta la curva doppia di ${}_0\varphi^6$ taglia la superficie ancora secondo una curva D^{28} rappresentata nel piano Ω_2 da una curva del 17° ordine con punti quadrupli nei punti fondamentali. I punti comuni alla curva nodale ed a D^{28} sono:

1° nel punto triplo di ${}_0\varphi^6$ il quale è triplo anche per D^{28};

2° nei punti in cui si appoggiano le corde della curva nodale condotte da O', punti che sono doppî per D^{28};

3° nei punti di contatto dei piani tangenti lungo la curva nodale e passanti per O'.

Le immagini di queste due curve, fuori dei punti fondamentali, hanno $11.17 - 12.10 = 67$ punti comuni, dei quali dunque:

6 sono assorbiti dai punti corrispondenti al punto triplo di ${}_0\varphi^6$;

25 da quelli corrispondenti ai piani della sviluppabile lungo la curva doppia;

gli altri 36 dimostrano che 9 sono le corde condotte da O' alla curva doppia (per ogni corda vi sono due punti doppî di D^{28}). Così si conclude che la curva nodale ha nove punti doppî apparenti.

Essa ha anche 3 punti doppî attuali sovrapposti nel punto triplo.

Ora siamo in grado di trovare, colle formole di Plücker, tutte le caratteristiche della curva nodale.

Si troverà facilmente essendo $n=7$, $p=3$, $h=12$, che

$$r=18\,,\quad m=33\,,\quad y=100\,,\quad x=126\,,\quad \alpha=52\,,\quad \beta=0\,,\quad g=441$$

cioè: *la curva nodale di* ${}_0\varphi^6$ *è della 33ª classe, non ha cuspide, ha cinquantadue piani stazionarî, la sua sviluppabile osculatrice è del 18° ordine* ecc.

13. Determiniamo ora l'ordine della curva parabolica della superficie ${}_0\varphi^6$. Questa curva, come si sa, è il luogo dei punti di contatto dei piani stazionarî. Abbiamo veduto (6) che su ogni curva di contatto dei coni tangenti a ${}_0\varphi^6$ vi sono 72 di tali punti; di più le immagini di queste curve di contatto passano due volte per ognuno dei punti corrispondenti ai punti cuspidali. Adunque nel piano rappresentativo l'immagine della curva parabolica sarà incontrata dall' immagine di qualsivoglia curva di contatto dei coni circoscritti in 100 punti, fuori dei punti fondamentali. Ne segue che l' immagine della curva parabolica è una curva del 20° ordine con punti quadrupli nei punti fondamentali.

Quest' immagine è incontrata fuori dei punti fondamentali in altri 40 punti da qualsivoglia curva γ^4; quindi: *la curva parabolica della superficie* ${}_0\varphi^6$ *è del 40° ordine e del genere 97.*

14. *Il centro 0 di proiezione sia situato nello spazio ordinario determinato da due rette* p_i p_k *di* F_2^6 corrispondenti ai punti fondamentali $P_i P_k$ del piano.

La proiezione ${}_1\varphi^6$ avrà le stesse proprietà generali di ${}_0\varphi^6$ ma due sue rette concorreranno in un punto della curva nodale.

Il piano che contiene queste due rette è tangente alla superficie in quattro punti distinti due a due distribuiti sulle due rette e taglia la superficie in una residua curva del 4° ordine con due punti doppî. Questa curva piana è la proiezione della curva del 4° ordine secondo cui lo spazio dei due raggi $p_i p_k$ taglia F_2^6 e che ha le caratteristiche $n=4$ $m=12$ $r=8$ $\beta=0$ $\alpha=16$ $x=16$ $y=8$ $g=38$ $h=2$.

Per questa quartica gobba e per il punto 0 situato nello spazio di essa passa una quadrica rigata. In ciascuno dei due sistemi di generatrici di questa quadrica ve ne sono quattro che toccano la quartica. Se 0 si trova su una di queste otto generatrici o su uno dei loro sedici punti d' intersezione, allora uno dei due punti doppî della proiezione o tutti e due si cangieranno in punti stazionarî (punti di regresso di prima specie). Se la quadrica diviene un cono, allora le due generatrici che passano per 0 coincidono, e i due punti doppî della curva proiezione coincidono in un punto di contatto di due rami. Se inoltre 0 si trova su una delle quattro generatrici del cono tangenti alla quartica, allora la proiezione avrà un punto di regresso di seconda specie.

15. *Se il centro 0 di proiezione si trova nel piano o nella retta o nel punto* d' intersezione di due o tre o quattro coppie distinte di rette della superficie F_2^6, allora la proiezione ${}_2\varphi^6$, ${}_3\varphi^6$, ${}_4\varphi^6$ conterrà ordinatamente due, tre o quattro piani in ognuno dei quali si trovano due rette della superficie.

16. *Se il centro 0 di proiezione è situato sul piano che passa per un raggio ed incontra due altri raggi di* F_2^6, allora ${}_5\varphi^6$ conterrà pure dieci rette come nei casi precedenti, ma una delle rette si appoggierà ad altre due. I punti d' intersezione delle due rette colla terza sono punti della curva nodale.

17. *Se il centro 0 di proiezione è sulla retta che si appoggia a tre raggi di* F_2^6 (1), allora la superficie ${}_6\varphi^6$ avrà 3 delle sue dieci rette che concorreranno nel punto triplo. Queste tre rette incontrano la curva nodale in altri due punti. I piani di ogni coppia delle tre rette sono tangenti in quattro punti distinti alla superficie.

18. *Se il centro 0 di proiezione è sul piano di una delle quarantacinque coniche* (corrispondente alla retta P_i P_k del piano Ω_2) la proiezione di F_2^6 sarà una *superficie* ${}_7\varphi^6$ *con una retta doppia ed una curva doppia del 6° ordine.*

La immagine di questa curva sarà una curva γ^{10} con due punti doppî in P_i e P_k ed otto punti tripli negli altri punti fondamentali. La curva γ^{10} taglia la retta P_i P_k in tre coppie di punti corrispondenti; ognuna di queste coppie rappresenta un punto d' intersezione della retta doppia di ${}_7\varphi^6$ colla curva nodale. Siccome quelle coppie determinano su P_i P_k una involuzione, così i due punti doppî di questa involuzione saranno le immagini dei punti cuspidali (reali od immaginarî, secondo che le tangenti condotte da 0 alla conica sono reali od immaginarie) situati sulla retta doppia di ${}_7\varphi^6$.

(1) In uno spazio R_4 su tre rette, non situate in uno stesso spazio ordinario, non si appoggia che una sola retta, la quale è l'intersezione dei tre spazî determinati da due qualunque delle rette date.

Gli altri punti cuspidali situati sulla curva doppia si troveranno come nel caso generale di ${}_0\varphi^6$ notando che il genere della curva γ^{10} è 7. Si conoscerà così facilmente che:

sulla curva nodale del 6° ordine vi sono otto punti cuspidali della superficie ${}_7\varphi^6$;

che la curva nodale è del genere 2 con 5 punti doppî apparenti ed un punto triplo.

Le altre caratteristiche di questa curva sono

$$\beta = 0 \quad r = 14 \quad m = 24 \quad y = 52 \quad \alpha = 36 \quad x = 70 \quad g = 215.$$

19. *Se il centro* 0 *di proiezione, fuori di* F_2^6, *si trova nel piano di due coniche* e quindi anche (3) nel piano di una cubica di F_2^6 allora la proiezione ${}_8\varphi^6$ *possederà una retta tripla, due rette doppie ed una conica doppia.*

Su ognuna delle rette doppie vi saranno due punti cuspidali della superficie (reali od immaginarî) e ve ne saranno 6 sulla retta tripla.

Il piano della cubica di F_2^6 si trova in un solo spazio a tre dimensioni con ognuno dei piani delle coniche: quindi *le due rette doppie di* ${}_8\varphi^6$ *non s'incontrano, ma ognuna di esse incontra la retta tripla.*

Il piano determinato da una retta doppia e dalla retta tripla taglia ancora φ^6 secondo una delle dieci rette semplici.

La conica doppia ha un punto comune con ognuna delle rette tripla e doppie. Infatti ogni piano di R_3 che passi per una retta doppia taglia φ^6 secondo una curva del 4° ordine e di genere 1; uno dei due punti doppî di questa curva sarà nell'intersezione del piano con la seconda retta doppia; l'altro sarà sulla conica doppia la quale perciò dovrà incontrare in un punto la prima retta doppia. Così pure ogni piano che passi per la retta tripla taglia ${}_8\varphi^6$ secondo una cubica con punto doppio; questo sarà sulla conica doppia, sicchè la conica doppia deve avere un punto comune colla retta tripla.

La conica doppia è rappresentata nel piano Ω_2 da una curva del 4° ordine con due punti doppi in P_a e P_b e passante per tutti gli altri punti semplici fondamentali. Le due coniche di F^6 sui cui piani si trova il centro 0 di proiezione saranno rappresentate dalle rette $P_a P_c$, $P_b P_c$, e la cubica piana di F^6 che si proietta nella retta tripla di ${}_8\varphi^6$ sarà rappresentata dalla cubica che passa per tutti i punti fondamentali, eccettuato P_c. È dunque evidente che lo spazio ordinario, che contiene la curva del 4° ordine di F_2^6 la quale si proietta nella conica doppia di ${}_8\varphi^6$,— il quale spazio contiene altresì i due raggi $P_a P_b$ di F_2^6 — passa per il centro 0. Di qui si deduce una proprietà di F_2^6 che: *lo spazio di due raggi della superficie* F_2^6 *contiene i punti di concorso dei piani delle coppie di coniche che si appoggiano rispettivamente all'uno ed all'altro dei raggi medesimi.* Ad ogni coppia di questi raggi corrispondono otto di questi punti; in totale 45 coppie con 360 punti.

Ne segue: *il piano della conica doppia di* ${}_8\varphi^6$ *taglia la superficie secondo due delle dieci rette semplici;* esse sono le proiezioni dei due raggi p_a, p_b contenuti nello spazio della quartica.

Sulla conica doppia vi sono quattro punti cuspidali della superficie; essi sono

le proiezioni dei punti di contatto delle quattro tangenti che dal centro 0 si possono condurre alla quartica descritta su F_2^6.

La curva $\alpha(9)$ sarà una conica e rappresenterà una curva dell' 8° ordine di ${}_8\varphi^6$.

20. *Se il centro* 0 *di proiezione si trova sul piano di una delle dieci cubiche piane di* F_2^6, allora ${}_9\varphi^6$ *possiederà una retta tripla ed una curva doppia del 4° ordine.*

Questa curva doppia è la proiezione su ${}_9\varphi^6$ di tutte le corde che si possono condurre dal centro 0 alle cubiche gobbe secondo le quali la superficie F_2^6 è tagliata dagli spazî ordinarî che contengono la cubica piana considerata. Da questa osservazione si deduce che l' immagine della quartica doppia nel piano Ω_2 sarà una curva del 5° ordine con punto triplo nel punto fondamentale P_a per cui non passa l'immagine della cubica piana, e punto semplice in tutti gli altri punti fondamentali.

Ogni retta che passa per P_a taglia la curva γ^5 in una coppia di punti che sono le immagini di un punto della quartica nodale.

Per conseguenza la curva inviluppo α considerata (9) nel caso generale si riduce in questo caso particolare al fascio di centro P_a. Si conclude: *la quartica doppia è del genere* 0.

Questa proprietà è anche dimostrata dall' altra che ogni piano che passi per la retta tripla di ${}_9\varphi^6$ taglia la superficie secondo una cubica con punto doppio e che quindi:

la retta tripla è trisecante della quartica doppia.

Si verificherà altresì facilmente colle note formole che:

la retta tripla possiede sei punti cuspidali, la quartica doppia ne possiede otto, dei quali sei sono quelli della retta tripla.

Notiamo infine che:

l'iperboloide che passa per la quartica nodale taglierà la superficie ${}_9\varphi^6$ *secondo il decimo raggio a cui non si appoggia la retta tripla.*

§ III. *Proiezione della superficie* F_2^6 *da un punto di essa.*

21. Supporremo ora che il centro 0 di proiezione sia situato sulla superficie F_2^6.

Si osserverà anzitutto che qualunque sia la posizione del punto 0, la classe della proiezione rimane sempre eguale alla classe della superficie F_2^6. Sicchè (5) le superficie che otterremo nello spazio ordinario *saranno tutte della 27ª classe.*

22. *Il centro* 0 *è in un punto arbitrario di* F_2^6.

La proiezione sarà una *superficie* ${}_0\varphi^5$ *del 5° ordine con undici rette*, una delle quali sarà l' intersezione collo spazio R_3 del piano tangente ad F_2^6 nel punto 0.

Ogni sezione piana di ${}_0\varphi^5$ essendo proiezione di una curva del 6° ordine e di genere 3 avrà non più di tre punti doppî. Ne segue: *La superficie* ${}_0\varphi^5$ *possiede una cubica nodale* (1).

(1) Clebsch, *Ueber die Abbildung algebraischer Flächen, insbesondere der vierten und fünften Ordnung.* Math. Ann. Bd. I, S. 252.— Cremona, *Ueber die Abbildung algebraischer Flächen.* Math. Ann. Bd. IV, S. 213.— Cayley, *On the transformation of unicursal surfaces.* Math. Ann. Bd. III, S. 469.

Se ω è l' immagine del punto O, si riconoscerà che le cubiche gobbe della superficie F^6 che hanno per immagine le rette ωP si proiettano su ${}_0\varphi^6$ secondo coniche. Dunque: ${}_0\varphi^5$ *possiede cinquantacinque coniche ognuna delle quali si appoggia ad una coppia degli undici raggi. I piani di queste coniche sono tritangenti e tagliano la superficie secondo una cubica senza punto doppio la quale si appoggia ai nove raggi cui non si appoggia la conica del piano.*

Le coniche del piano Ω_2 che passano per ω e per quattro punti fondamentali sono immagini di curve normali del 4° ordine situate su F^6 passanti per il centro O. Esse sono in tutte $\dfrac{10.8.9.7}{2.3.4} = 210$ e si proiettano secondo cubiche gobbe su ${}_0\varphi^5$. Le coniche del piano Ω_2 che passano per cinque punti fondamentali sono immagini di cubiche gobbe situate su $F_2{}^6$ che non passano per O e che vengono perciò proiettate secondo curve della stessa specie. Esse sono $\dfrac{10.9.8.7.6}{2.3.4.5} = 252$. Dunque: $\varphi_0{}^5$ *possiede in totale 462 cubiche gobbe ognuna delle quali si appoggia a cinque rette della superficie.*

Per ogni retta di ${}_0\varphi^5$ passano 20 piani che oltre ad essere tangenti alla superficie in due punti della retta, toccano la superficie in un terzo punto. Questi piani e quelli delle coniche costituiscono l' insieme di tutti i piani tritangenti della superficie. *La superficie ${}_0\varphi^5$ possiede perciò duecentosettantacinque piani tritangenti.*

23. Per determinare il numero dei punti cuspidali situati sulla cubica doppia si osserverà che il ragionamento adottato per il caso generale (8) vale anche per questo caso, quando si tolgano dal numero trovato allora quattro unità, cioè due per ognuna delle tangenti indicatrici del punto O sulla superficie $F_2{}^6$. Dunque: *la cubica nodale possiede dieci punti cuspidali.*

Si troverà pure che: *l' immagine piana della cubica nodale è una curva γ^7 del 7° ordine con dieci punti doppî nei punti fondamentali e un punto doppio in ω.*

Fu dimostrato (1) che $F_2{}^6$ non ha rette quadriseganti: quindi ${}_0\varphi^5$ *non ha punti tripli.*

La curva γ^7 è dunque del genere 4 e della 20ª classe.

24. La sezione piana di ${}_0\varphi^5$ è una curva del 5° ordine con tre punti doppî e nessuna cuspide; essa è dunque della 14ª classe.

Le formole di Plücker lasciano concludere che: *il cono circoscritto alla superficie ${}_0\varphi^5$ avente il vertice in un punto qualunque dello spazio è del 14° ordine, della 27ª classe, con trentatre generatrici cuspidali, ventotto generatrici doppie, settantadue piani stazionarî, duecentotrentasei piani bitangenti; esso è del genere 17.*

25. La curva α (9) sarà una conica. *Essa è l' immagine di una curva dell' 8° ordine C^8 che è l' intersezione di ${}_0\varphi^6$ con la sviluppabile della cubica doppia.*

Siccome ogni retta di Ω_2 rappresenta una quartica di genere 0 descritta su ${}_0\varphi^5$, così si vedrà che c' è una semplice infinità di curve del 4° ordine e di genere 0 le quali siano tangenti a C^8. Per un punto qualunque della superficie non si possono condurre più di due di queste curve.

Ogni curva del 4° ordine di ${}_0\varphi^5$, rappresentata in Ω_2 da una retta, si trova colla cubica doppia su di una medesima quadrica.

26. Lo stesso metodo di ragionamento adottato pel caso generale di ${}_0\varphi^6$ (13) farà

vedere che nel nostro caso particolare, l'ordine della curva parabolica si riduce di quattro unità. Cioè: *la curva parabolica della superficie* ${}_0\varphi^5$ *è del 36° ordine ed è rappresentata nel piano* Ω_2 *da una curva del 20° ordine con punti quadrupli nei punti fondamentali e nel punto* ω, *e punti doppî nei punti corrispondenti ai punti cuspidali sulla curva doppia.*

Quindi: *il genere della curva parabolica è 95.*

27. Estendendo al caso particolare di ${}_0\varphi^5$ il ragionamento tenuto nel caso generale di ${}_0\varphi^6$ per trovare la classe della sviluppabile dei piani tangenti a ${}_0\varphi^6$ lungo la curva nodale (11), quando si noti che la curva del 9° ordine e la immagine γ^7 della curva nodale di ${}_0\varphi^5$ hanno in ω un punto doppio comune, si troverà facilmente che: *la sviluppabile dei piani tangenti a* ${}_0\varphi^5$ *lungo la cubica doppia è della 9ª classe.*

28. *Il centro* O *di proiezione si trovi su di una conica rappresentata da una retta* $P_i P_k$ *del piano* Ω_2.

La superficie ${}_1\varphi^5$ che si ottiene in questo caso avrà una retta che è la proiezione della conica suddetta. Dunque ${}_1\varphi^5$ *possiede dodici rette, tra le quali ve n' ha una* b, *che si appoggia a tre delle altre.* Infatti *b* si appoggierà ai raggi p_i, p_k ed al raggio *c* che si ottiene dal piano tangente in O alla superficie F_2^6.

Le immagini delle rette che congiungono due punti fondamentali, eccettuata $P_i P_k$, e quelle delle rette che congiungono ω con uno dei punti fondamentali, eccettuati P_i e P_k, si proiettano secondo coniche di ${}_1\varphi^5$. Quindi: ${}_1\varphi^5$ *possiede cinquantadue coniche. Di queste, otto si appoggiano ad ognuno dei raggi* c, p_i, p_k, *e dieci ad ognuno degli altri raggi.*

I piani che passano per il raggio *c* tagliano ${}_1\varphi^5$ secondo una quartica proiettiva ad una curva del 3° ordine che passa per i punti fondamentali, eccettuati P_i e P_k; la quartica possiede adunque due punti doppî. Invece i piani che passano per uno qualunque degli altri raggi tagliano ${}_1\varphi^5$ secondo una curva del 4° ordine con un solo punto doppio. Ne segue:

la cubica doppia incontra una sola volta il raggio b *e due volte tutti gli altri raggi della superficie.*

La superficie ${}_1\varphi^5$ *possiede in tutto quattrocentotrentaquattro cubiche gobbe.*

La superficie ${}_1\varphi^5$ *possiede duecentosettantacinque piani tritangenti dei quali cinquantadue sono quelli delle coniche, e tre la tagliano secondo una coppia di rette.*

29. *Il centro* O *di proiezione si trovi nel punto d'incontro di due coniche.*

Le immagini di queste coniche siano $(P_i P_k)$, $(P_r P_s)$; ω sia il loro punto d'incontro.

La superficie ${}_2\varphi^5$ *possiede tredici rette* delle quali undici non si incontrano, ma le altre due si appoggiano a due terne delle prime; le due terne hanno un raggio comune.

${}_2\varphi^5$ *possiede quarantanove coniche, quattrocentosei cubiche gobbe* ecc.

30. *Il centro* O *di proiezione si trovi nello spazio determinato da due raggi di* F_2^6.

Vale a dire il centro O si trovi sulla quartica determinata dallo spazio dei due raggi corrispondenti ai punti di P_i, P_k.

${}_3\varphi^5$ *possiede undici rette due delle quali sono in un piano e si incontrano sulla cubica doppia.* Tutte queste rette sono altrettante corde della cubica.

31. *Il centro* O *di proiezione è su una delle cubiche piane di* F_2^6 *o nel punto comune a due di esse.*

In questi casi la superficie φ^5 dovrebbe avere una linea del 3° ordine doppia scomposta in linee d' ordine inferiore. Siccome ciò è impossibile ([1]) così la superficie φ^5 in questi casi si dovrà scomporre in superficie d' ordine inferiore.

§ IV. *Scomposizione della* F_2^6 *in superficie d' ordine inferiore* —F_2^5.

32. Ritorniamo ora a considerare la costruzione della superficie F_2^6 nello spazio fondamentale R_4 (§ I) e supponiamo che quattro spazî corrispondenti delle forme S_1 si taglino secondo un piano Q_2. Questo piano potrà ottenersi, ad es., colla intersezione degli spazî determinati da due coppie distinte di assi S_1.

La superficie F_2^6 evidentemente si scomporrà allora in questo piano Q_2 ed in una superficie F_2^5 la quale potrà essere punto per punto rappresentata nel piano Ω_2. Un punto A di Ω_2 rappresenterà il piano Q_2 di R_4.

Vi saranno perciò in Ω_2 sette punti semplici fondamentali P_i ed un punto doppio A, i quali determineranno la quadruplice infinità di curve γ^4 corrispondenti alle intersezioni C^5 di qualsivoglia spazio ordinario con la superficie F_2^5 contenuta in R_4.

Ad ogni retta del piano Ω_2 corrisponderà una curva normale C^4; se la retta passa per P, la quartica si scompone in una retta ed in una cubica; se la retta passa per A, rappresenterà una conica di F_2^5; se la retta passa per A e P, essa rappresenterà una retta. Ne segue:

La superficie F_2^5 *possiede:*

14 rette, due a due situate in sette piani distinti. Diremo π_i questi piani; a_i p_i le rette situate in essi e corrispondenti rispettivamente alle rette AP_i ed ai punti P_i del piano Ω_2;

una duplice infinità di quartiche normali C^4 che non si appoggiano ad alcun raggio p_i ma che incontrano una volta i raggi a_i;

7 sistemi di ∞^1 *cubiche gobbe* D^3 *che si appoggiano ad un solo raggio* p_i;

21 coniche C^2_{ik} che si appoggiano a due raggi p_i p_k ed agli altri cinque raggi a non coniugati ai primi due (hanno per immagini le rette P_i P_k del piano Ω_2);

un sistema semplicemente infinito di coniche T^2 rappresentate dalle rette del fascio A; appartengono a questo sistema le coppie di raggi coniugati $a_i p_i$;

21 cubiche C^3_{ik} determinate dallo spazio di due raggi a_i a_k e rappresentate nel piano Ω_2 da una conica che passa per cinque punti fondamentali. Queste cubiche hanno per corde, reali od immaginarie, i due raggi a_i a_k, non incontrano i raggi $p_i p_k$ ed incontrano una volta tutti gli altri raggi della superficie;

21 cubiche $'C^3_{ik}$ determinate dallo spazio di due raggi p_i p_k e rappresentate nel piano Ω_2 da curve γ^4 con tre punti doppî. Queste curve hanno rispetto ai raggi p le stesse proprietà che le curve C^3 rispetto ai raggi a;

35 coniche H^2, le quali s' appoggiano a quattro raggi p ed ai tre raggi a non coniugati ai primi. Sono rappresentate dalle coniche che passano per A e per quattro P;

([1]) Clebsch, l. c. § 2.

7 coniche L_i^2 corrispondenti alle cubiche del piano Ω_2 che hanno punto doppio in A e che passano per tutti i punti fondamentali eccettuato P_i;

35 quartiche normali M^4_{iks} e che hanno per corde tre raggi p_i, p_k, p_s e i quattro raggi a non coniugati ai primi, e che incontrano una volta tutti gli altri raggi; esse corrispondono alle curve del 4° ordine che passano per tutti i punti fondamentali ed hanno punto doppio in P_i, P_k, P_s;

35 semplici infinità di curve normali I^4 che hanno per piano trisecante il piano Q_2, ed hanno per corde tre raggi $p_i p_k p_s$; esse sono rappresentate nel piano Ω_2 dalle curve del 5° ordine che hanno punto triplo in A, punto doppio in P_i, P_k, P_s e passano per tutti gli altri punti fondamentali;

35 semplici infinità di curve normali $'I^4$, che si comportano rispetto ai raggi p ed a, come le quartiche precedenti rispetto ad a e p; esse sono rappresentate dai fasci di coniche che hanno per punti base una quaderna di punti semplici P del piano Ω_2;

una semplice infinità di cubiche gobbe E^3 che incontrano una sola volta i raggi p e non incontrano i raggi a; esse sono rappresentate dalle curve del 4° ordine che hanno punto triplo in A e che passano per tutti gli altri punti fondamentali.

Le curve E^3 sono tali che per un punto di F_2^5 ne passa una soltanto; essa è l' intersezione colla superficie dello spazio determinato da quel punto e dal piano Q_2. Si deduce che: *il piano* Q_2 *taglia la superficie* F_2^5 *secondo una conica* K^2 *che ha per immagine il punto* A.

La conica K^2 *s' appoggia ai sette raggi* a_i.

33. *Per un punto qualunque di* R_4 *non si può condurre, in generale, alcuna trisecante della superficie.*

Infatti se vi fosse una trisecante della superficie, lo spazio determinato da essa e dal piano della conica che passa per uno dei suoi tre punti d' intersezione (la conica è rappresentata in Ω_2 da una retta del fascio A) taglierebbe F_2^5 secondo una cubica gobba con una corda trisecante, ciò che è assurdo. È fatta eccezione pel caso in cui la retta sia situata in un piano che tagli F^5 secondo una cubica.

34. *Ogni cubica del piano* Ω_2 *che passi una volta per tutti i punti* A *e* P *rappresenta una cubica piana* U^3 di F_2^5.

Le immagini delle cubiche U^3 formano nel piano Ω_2 un fascio di cubiche che hanno un altro punto base S, oltre gli otto fondamentali.

Ognuna di queste immagini forma con una retta qualunque del fascio A l' immagine di una sezione ordinaria della superficie F_2^5; e viceversa; vale a dire che una conica qualunque T^2 si trova in un solo spazio ordinario con una cubica qualunque U^3. Osservando che i piani di tutte le U^3 concorrono in un punto σ della superficie F^5, che è l'immagine del punto S del piano Ω_2, si dedurrà la seguente importante proprietà:

La superficie F_2^5 *possiede un punto singolare* σ *il quale è il vertice di un cono quadrico a tre dimensioni* K_3^2. *Tutti i piani generatori di un sistema tagliano la superficie* F^5 *secondo cubiche che passano per il vertice del cono; i piani dell' altro sistema tagliano la superficie secondo coniche delle quali una sola passa per il vertice.*

35. *La superficie* F_2^5 *è della 20ª classe*, perchè 20 è il numero delle curve γ^4 di un fascio che hanno un punto doppio, oltre quello in A.

Le superficie che otterremo per proiezione della F_2^5 saranno tutte della 20ª classe.

§ V. *Proiezioni di* F_2^5 *su d' uno spazio ordinario da un punto fuori di essa.*

36. *Caso generale. Il punto* 0 *è in una posizione arbitraria dello spazio fondamentale* R_4.

La superficie ${}_0\Phi^5$ non ha punto triplo; ogni sua sezione piana essendo proiettiva ad una curva piana γ^4 con un punto doppio, sarà del genere 2 e quindi possederà quattro punti doppî; ciò vuol dire che: *la superficie* ${}_0\Phi^5$ *possiede una curva nodale del 4º ordine; sette coppie di rette* (¹); *una semplice infinità di cubiche piane e di coniche. Tutte le cubiche piane passano per un punto della superficie* ${}_0\Phi^5$ *ed i loro piani inviluppano un cono quadrico.*

Questo cono è la proiezione del cono $\sigma - K_3^2$ di R_4.

I piani tangenti di questo cono sono tutti bitangenti alla superficie Φ^5; ma dodici di essi sono tritangenti e sono quelli corrispondenti alle curve del fascio che nel piano Ω_2 possedono un punto doppio.

Le proiezioni dei piani Π_i sono piani tritangenti della superficie ${}_0\Phi^5$; ognuna delle due rette incontra due volte la quartica nodale; i tre punti di contatto sono, l' uno nel punto d' incontro delle due rette e gli altri due rispettivamente sulle due rette.

Gli spazî del fascio determinato dal piano assiale $0p_i$ tagliano F_2^5 secondo curve del 4º ordine rappresentate in Ω_4 da γ^4 con due punti doppî; queste formano un fascio di cui dodici soltanto hanno un punto doppio anche altrove. Quindi tra tutti i piani che passano per la proiezione del raggio p_i ve ne sono dodici che sono tritangenti a ${}_0\Phi^5$.

Sono anche piani tritangenti di ${}_0\Phi^5$ quelli che la tagliano secondo coniche proiettive alle coniche L_i^2 del piano Ω_2 (32), e quelli corrispondenti alle coniche H^2 (32); infine è anche un piano tritangente di ${}_0\Phi^5$ quello che proietta la conica K^2 contenuta nel piano Q_2.

Riepilogando: *La superficie* ${}_0\Phi^5$ *possiede 146 piani tritangenti.*

37. L' Hessiana della rete delle curve γ^4 (6) nel nostro caso è una curva β^9 del 9º ordine che ha punto doppio in P_i e punto 5^{plo} in A. È dunque una curva del genere 11.

La classe di una sezione piana di ${}_0\Phi^5$ è eguale a 12.

Ora sapendosi che *il cono circoscritto alla superficie* ${}_0\Phi^5$ *è del 12º ordine, del genere 11, e della classe 20ª*, in virtù delle formole di Plücker si ricaverà che *esso ha 20 generatrici doppie, 24 generatrici cuspidali, 112 piani bitangenti e 48 piani stazionarî.*

(¹) Cremona, l. c. — Clebsch, *Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 1870, Bd. 15. — Sturm, *Ueber die Flächen mit einer endlichen Zahl von einfachen Geraden*, Math. Ann. Bd. IV. — Max. Noether, *Ueber Flächen welche Schaaren rationaler Curven besitzen*, Math. Ann. III, S. 198.— Clebsch, *Ueber den Zusammenhang einer Klasse von Flächenabbildungen mit der Zweitheilung der Abel'schen Functionen*, Math. Ann. Bd. III, S. 71.

38. La curva nodale di ${}_0\Phi^5$ sarà rappresentata nel piano da una γ^7 con punto doppio in ogni punto fondamentale P_i e punto triplo in A; γ^7 è dunque del genere 5.

I calcoli istituiti per il caso generale di F_2^6 (8) ripetuti per il caso particolare di ${}_0\Phi^5$ danno che: *la curva nodale di ${}_0\Phi^5$ possiede otto punti cuspidali.*

Quindi si troverà, colla formola già citata di Zeuthen, che: *la quartica nodale è della prima specie.*

39. La curva γ^7 ed una curva β^9 hanno in comune, fuori dei punti fondamentali, 63—28—15=20 punti. Detraendo da questo numero quello dei punti cuspidali situati sulla curva doppia si avrà (11) la classe della sviluppabile dei piani tangenti lungo la curva doppia. Cioè: *la sviluppabile dei piani tangenti alla superficie ${}_0\Phi^5$ lungo la quartica nodale è della 12ª classe.*

40. Si vedrà pure che (13) *la curva parabolica di ${}_0\Phi^5$ è del 28° ordine e del genere 55.*

La sua immagine piana è una curva del 20° ordine con punti doppî nelle immagini dei punti cuspidali della curva doppia, con punti quadrupli nei punti P_i e punto 12^{plo} in A.

41. *Il centro* 0 *di proiezione sia situato sul piano di una cubica* U^3.

Abbiamo visto (34) come tutte le cubiche U^3 concorrano in un punto σ di F_2^5; e come il punto σ sia vertice di un cono quadrico a 3 dimensioni K_3^2. Per le proprietà di questo cono si sa che tutti i piani di un sistema tagliano un piano dell'altro sistema secondo i raggi di un fascio che ha il centro nel vertice del cono; ad ogni raggio del fascio corrisponde il piano generatore che passa per esso. Adunque per il punto 0 preso sul piano di una U^3 passerà un piano ed uno soltanto che taglia F_2^5 secondo una conica T_i^2 siccome i piani delle due curve sono in un solo spazio a tre dimensioni, così si avrà che *la superficie ${}_1\Phi^5$ possiede una retta tripla ed una retta doppia che sono situate in un piano.*

Sulla retta tripla vi sono sei punti cuspidali: ve ne sono due sulla retta doppia.

Tutte le quattordici rette semplici di ${}_0\Phi^5$ si appoggiano alla retta tripla e sono due a due situate in un piano con essa.

42. *Il centro di proiezione sia situato nel punto comune ai piani di due coniche* L_i^2.

Abbiamo veduto (32) che la superficie F_2^5 possiede sette coniche L_i^2 le quali hanno per immagini nel piano Ω_2 quelle cubiche che hanno punto doppio in A e che passano per altri sei punti fondamentali.

Ora si osservi che ognuna di queste coniche L_i^2 ha due punti comuni colla conica K^2 rappresentata in A; e che perciò i piani due coniche L_i^2 L_k^2 si taglieranno in un punto del piano Q_2.

Si osservi ancora che la conica L_i^2 e la conica C^2_{ik} (che ha per immagine la retta $P_i P_k$) hanno due punti comuni; la conica C^2_{ik} avrà pure due punti comuni colla conica L_k^2; perciò i piani delle due coniche L_i^2, L_k^2 si incontreranno altresì in un punto del piano della C^2_{ik}. Ne segue:

I piani delle quattro coniche C^2_{ik}, L_i^2, L_k^2, K^2 *della superficie* F_2^5 concorrono *in un punto fuori di questa.*

Dimostrata questa proprietà fondamentale di F_2^5, se — come abbiamo premesso — il centro O di proiezione si trova sul piano di due coniche L_i^2, L_k^2,

la superficie $_2\Phi^5$ avrà quattro rette doppie formanti un quadrilatero sghembo Su ogni retta doppia vi sono due punti cuspidali.

Se diciamo f_i la retta doppia proiezione di L_i^2 ed f_k quella che è proiezione di L_k^2, g la proiezione della conica K^2 ed h la proiezione di C^2_{ik}, si troverà che: *ad ogni coppia di lati opposti del quadrilatero doppio s' appoggiano cinque rette semplici* (cioè le proiezioni dei raggi p — ad eccezione di p_i e p_k — si appoggiano ad f_i ed f_k; le proiezioni dei raggi a — ad eccezione di a_i ed a_k che si appoggiano solo a g — si appoggiano a g ed h).

I due raggi proiettanti p_i *e* p_k *escono da due vertici opposti del quadrilatero e giacciono nel piano determinato dai due lati concorrenti in quel vertice.*

In altre parole: *Vi sono cinque coppie coniugate di rette semplici ognuna delle quali è situata col quadrilatero sghembo su di un medesimo iperboloide.*

Il fascio di quadriche rigate che ha per base il quadrilatero sghembo, taglia la superficie $_2\Phi^5$ secondo coniche (proiezioni delle coniche T^2); *vi sono cinque iperboloidi che tagliano $_2\Phi^5$ secondo una coppia di raggi coniugati.*

43. Si otterrebbe una nuova superficie $_3\Phi^5$ se si proiettasse F_2^5 dal punto comune al piano di due coniche rappresentate dalle rette P_iP_k, P_iP_s. S' incontrerebbero in questo punto anche i piani della conica L_i^2 e della conica rappresentata in Ω_2 dalla curva del 2° ordine determinata dal punto A e dai quattro punti P, eccettuati P_i, P_k, P_s.

44. *Il centro* 0 *sia situato sul piano di una conica* H^2.

La conica H^2 sia quella rappresentata nel piano Ω_2 dalla conica che passa per A e per i punti P_1, P_2, P_3, P_4. Ogni spazio ordinario che contenga H^2 taglia F_2^5 secondo una cubica gobba proiettiva ad una conica del fascio che ha per base i punti A, P_5, P_6, P_7. Adunque ogni sezione piana della proiezione $_4\Phi^5$ che contenga la retta doppia proiezione di H^2 avrà, fuori di questa retta doppia, un punto doppio. Cioè: *La superficie $_4\Phi^5$ possiede una cubica doppia ed una retta doppia che è corda della cubica.*

La cubica doppia è rappresentata nel piano Ω_2 da una curva γ^5 con punti doppî in A, P_5, P_6, P_7 e punti semplici in P_1, P_2, P_3, P_4; è dunque del genere 2.

La curva γ^5 incontra l' immagine di H^2 in quattro punti distinti in due coppie ognuna delle quali rappresenta un punto d' intersezione della cubica doppia colla retta doppia di $_4\Phi^5$. La formola di Zeuthen dà che: *sulla cubica doppia vi sono sei punti cuspidali.*

E dalla rappresentazione piana si dedurrà che: *la retta doppia incontra sette raggi della superficie $_4\Phi^5$; di questi, quattro appartengono ad un sistema* (sono le proiezioni dei raggi $a_1\, a_2\, a_3\, a_4$ di F_2^5) *gli altri tre sono coniugati ai tre rimanenti del primo sistema* (sono le proiezioni dei raggi $p_5\, p_6\, p_7$). *Alla cubica doppia s' appoggiano una volta tutti i raggi.*

Vale a dire: *$_4\Phi^5$ possiede quattordici rette semplici delle quali sette si appoggiano alla retta doppia e tutte alla cubica doppia; due qualunque delle prime sette non possono essere situate in un piano.*

Tra i piani seganti che passano per la retta doppia ve ne sono adunque sette che tagliano la superficie $_4\Phi^5$ secondo una retta ed una conica.

Il fascio di quadriche che passa per la cubica doppia e per la retta doppia taglia ${}_4\Phi^5$ *secondo coniche proiettive al fascio di rette che passano per* A (*nel piano* Ω_2).

45. *Se il centro* 0 *di proiezione è sul piano* Q_2 si ottiene una superficie ${}_5\Phi^5$, come la precedente *con cubica doppia e retta doppia.*

La retta doppia è rappresentata nel piano dal punto A; la cubica di una curva γ^7 con punto quadruplo in A e punto doppio in tutti gli altri punti fondamentali. La retta doppia è una corda della cubica doppia.

La sola differenza tra ${}_4\Phi^5$ e ${}_5\Phi^5$ è che nella seconda *la retta doppia s'appoggia a sette rette semplici di uno stesso sistema* (sono le proiezioni di tutti i raggi a_i) *e la cubica doppia incontra pure una sola volta queste sette rette, ma ha per corde le loro coniugate.*

46. Altri casi particolari di Φ^5 potranno ottenersi proiettando $F_2{}^5$ da un punto 0 situato nello spazio di due raggi p_i, p_k o nel piano o nella retta d' intersezione di due o di tre tali spazî. Le superficie ${}_6\Phi^5$, ${}_7\Phi^5$, ${}_8\Phi^5$ che rispettivamente si ottengono in R_3 avranno le proprietà della superficie generale ${}_0\Phi^5$, *ma una, due, o tre coppie di raggi di uno stesso sistema si troveranno situate in un piano e i due raggi si incontreranno sulla quartica doppia, della quale sono corde.*

§ VI. *Proiezione di* $F_2{}^5$ *su di uno spazio ordinario da un punto di essa.*

47. Se il centro di proiezione è situato sulla superficie $F_2{}^5$, la proiezione ${}_0\Phi^4$ sarà tale che una sua sezione piana sarà una curva del 4° ordine proiettiva ad una curva γ^4, del piano Ω_2, con un punto doppio in A. Vale a dire: la *superficie* ${}_0\Phi^4$ *è del quarto ordine con una retta doppia. Essa è, come la superficie generale* $F_2{}^5$, *della 20 classe* (1).

Essa possiede, oltre alle 14 rette che sono proiezioni delle rette di $F_2{}^5$, una retta che è ottenuta dalla intersezione dello spazio R_3 col piano tangente in 0 ad $F_2{}^5$, ed un' altra che è la proiezione della conica proiettiva alla retta OA del piano Ω_2.

La retta doppia è la proiezione della cubica piana U^3 di $F_2{}^5$ che passa per 0. Dunque: ${}_0\Phi^4$ *possiede sedici rette, due a due situate in un piano che passa per la retta doppia.*

La curva parabolica di ${}_0\Phi^4$ sarà dell'ordine eguale a quello della curva parabolica di ${}_0\Phi^5$, diminuito di quattro unità (26). Cioè *la curva parabolica di* ${}_0\Phi^4$ *è del 24° ordine.*

Dal punto 0 potendosi condurre quattro sole tangenti alla cubica piana U^3, si dedurrà che *sulla retta doppia di* ${}_0\Phi^4$ *vi sono quattro punti cuspidali.* Quindi l' immagine piana della curva parabolica (40) sarà una curva del 20° ordine con punti quadrupli nei punti P ed 0; con punto 12^{plo} in A e punti doppî nelle immagini dei punti cuspidali; questa immagine è dunque *del genere* $\frac{19.18}{2}-\frac{12.11}{2}-8.\frac{4.3}{2}-4=53$.
Cioè: *la curva parabolica di* ${}_0\Phi^4$ *è* del genere 53.

(1) Clebsch, l. c. Math. Ann. Bd. III, pag. 45; Bd. I, l. c.— Sturm, l. c. Math. Ann. Bd. IV.— Salmon, *Geom. of three dimensions,* pag. 491, ecc.

48. Noi non vogliamo tentare di dar qui la completa enumerazione delle superficie di 4° grado con retta doppia che si deducono colla proiezione di F_2^5 da un punto di essa, perchè lo studio di queste superficie è noto e può essere rifatto per la via che abbiamo indicata, in modo molto semplice. Basta supporre che il centro O assuma ordinatamente posizioni singolari sulle curve o sulle rette di F_2^5.

Noteremo come caso speciale che *quando il punto* O *si trova nel vertice del cono* $\sigma - K_3^2$ formato dai piani delle coniche T^2 e delle cubiche U^2 (34), la proiezione di F_2^5 si riduce a *un iperboloide doppio*, intersezione con lo spazio R_3 del cono K_3^2.

§ VII. *Scomposizione della superficie* F_2^6 *in superficie del 4° ordine* F_2^4.

49. Se nella generazione della superficie F_2^6 (1. 2) si suppone che due quaderne di spazî omologhi delle forme S_1 si incontrino ordinatamente in due piani Q_2, Q'_2, la superficie generata si scomporrà in questi due piani ed in una superficie del 4° ordine F_2^4 la quale sarà posta in corrispondenza proiettiva col piano Ω_2.

Il piano Ω_2 avrà due punti doppî fondamentali A ed A′ e quattro punti semplici P.

Le curve γ^4 che passano per questi punti sono le immagini delle sezioni ordinarie di F_2^4.

I punti A ed A′ rappresentano le coniche secondo le quali i piani Q_2, Q'_2 tagliano F_2^4.

La retta AA′ rappresenta il punto M comune ai due piani Q_2, Q'_2, che è un punto di F_2^4.

Ogni punto P rappresenta una retta di F_2^4. Rappresentano rette della superficie, le rette AP_i, $A'P_i$ del piano e le coniche che passano per tutti i punti fondamentali eccettuato uno dei punti P. Adunque:

F_2^4 *possiede sedici rette; una qualunque di esse è incontrata da cinque altre.*

Infatti ad ogni raggio p_i s' appoggiano le due rette che hanno per immagini AP_i ed $A'P_i$, e le tre rette che hanno per immagini le coniche che passano per P_i, A, A′ e per altri due punti fondamentali. Così pure alla retta che ha per immagine la conica $AA'P_1P_2P_3$ si appoggiano i tre raggi p_1, p_2, p_3 e quelli che hanno per immagini le rette AP_4 ed $A'P_4$.

Le cubiche di genere 1 che passano per tutti i punti fondamentali sono le immagini di tutte le sezioni ordinarie della superficie ottenute con spazî che passano per il punto M.

Le cubiche che hanno punto doppio in A od A′ e passano per tutti i punti fondamentali sono immagini delle coniche B^2, B_1^2 determinate dai fasci di spazî che hanno per asse il piano Q_2 od il piano Q'_2.

Le rette del fascio A o del fascio A′ sono pure immagini di coniche C^2, C_1^2 della superficie F_2^4.

Ogni conica C^2 si trova in un solo spazio con qualsivoglia conica B_1^2; ogni conica C_1^2 si trova in un solo spazio con una conica B^2.

Le coniche del piano Ω_2 che passano per i punti A, A′, P_i, P_k sono immagini di coniche D^2_{ik} della superficie. Vi sono sulla superficie F_2^4 sei fasci di coniche D^2. Ogni conica D^2_{ik} si trova in un solo spazio con una conica D^2_{rs}.

Ora si sa che, se nello spazio fondamentale R_4 si hanno due sistemi semplicemente infiniti di piani (che non passano per una sola retta) e tali che ogni piano del primo sistema sia situato in uno spazio ordinario con qualsivoglia piano del secondo sistema, i due sistemi sono quelli di un cono quadrico a tre dimensioui e tutti i piani concorrono nel vertice del cono.

Ne segue che *i piani delle coppie di coniche* (B^2, C_1^2), (B_1^2, C^2), (D^2_{ik}, D^2_{rs}), (D^2_{is}, D^2_{rk}), (D^2_{ir}, D^2_{sk}) *generano cinque coni quadrici a tre dimensioni. Gli spazî tangenti di questi coni sono tangenti alla superficie* F_2^4 *e la tagliano secondo due coniche coniugate.* Noi diremo questi coni *i coni di Kummer della superficie* F_2^4.

Infine si vedrà dalla rappresentazione piana che ad ognuna delle sedici rette di F_2^4 corrisponde un sistema di ∞^2 cubiche gobbe, intersezioni della superficie colla doppia infinità di spazî che passano per quella retta. Ecc. ecc.

La superficie F_2^4 *è della* 12^a *classe.*

50. Lo scopo del nostro lavoro essendo limitato allo studio delle superficie del 5° ordine e del 6° ordine, tralascieremo qui di studiare i moltissimi casi speciali di superficie del 4° ordine che si possono ottenere colla proiezione della superficie F_2^4 da un punto O dello spazio fondamentale R_4.

Noteremo soltanto che la proiezione generale ${}_0\psi^4$ *è una superficie generale del 4° ordine a conica doppia* (1).

I vertici ed i coni di Kummer di F^4 si proiettano nei vertici e coni di Kummer di ${}_0\psi^4$.

Se il centro di proiezione è in uno dei vertici di Kummer di F_2^4, la superficie medesima si proietta in un iperboloide doppio.

51. *Infine se il centro* O *di proiezione si trova su* F_2^4 la proiezione che se ne ottiene è una *superficie generale del 3° ordine* ψ^3 (2).

Se ω è l'immagine nel piano Ω_2 del centro O, la superficie ψ^3 *conterrà 27 rette*; una di queste sarà determinata dalle tangenti in O alla superficie F_2^4, sedici saranno le projezioni delle rette di F_2^4; le altre 10 saranno le proiezioni, delle due coniche che hanno per immagine $A\omega$ ed $A'\omega$, delle sei coniche che hanno per immagini le coniche $(AA'P_iP_k\omega)$ e delle due coniche che hanno per immagini le cubiche che passano per tutti i punti fondamentali e per ω ed hanno punto doppio in uno dei due punti A.

§ VIII. *Scomposizione di* F_2^6 *in superficie del 3° ordine.*

52. Se nella generazione della superficie F_2^6 si suppone che vi siano tre quaderne di spazî omologhi delle forme S_1 i quali si incontrino ordinatamente ne'piani Q_2, Q'_2, Q''_2, la superficie del 6° ordine si scomporrà in questi tre piani ed in *una superficie cubica* F_2^3.

Questa sarà rappresentata punto per punto nel piano Ω_2 il quale avrà tre punti

(1) Vedi i noti lavori di Kummer, Clebsch, Cremona, Sturm, Geiser, Darboux, Zeuthen, ecc. ecc. e recentemente: Segre, *Étude des différentes surfaces du 4e ordre* ecc. Math. Ann. Bd. XXIV, pag. 313.

(2) Cremona, *Mémoire sur les surfaces du troisième ordre,* Crelle 68. — Clebsch, Crelle 65 Math. Ann. V. — Reye, II ecc.

doppî fondamentali A, A′, A″, ed un punto semplice P. Ogni sezione ordinaria di F^3 sarà rappresentata da una curva del 4° ordine di genere 0.

Il punto P *è l' immagine di una retta* p *direttrice della superficie* F_2^3.

Ogni spazio che contenga la direttrice taglia la superficie secondo una curva la quale ha per immagine piana una curva del 4° ordine che si scompone in due coniche del fascio (A A′ A″ P). *Ognuna di queste coniche rappresenta una retta.* Ne segue:

La superficie F_2^3 *è rigata. Essa contiene una sola direttrice rettilinea alla quale s'appoggiano tutte le generatrici: ogni spazio che passi per la direttrice taglia la superficie secondo due generatrici che non si incontrano* (¹).

Tutte le rette del fascio P rappresentano le cubiche gobbe che passano per i tre punti corrispondenti alle rette AA.

Per ogni punto di F^3 passa una sola di queste cubiche ed una sola generatrice.

Per due punti qualunque della superficie passa una sola conica (immagine della conica determinata da questi due punti e dai tre punti A) ed una sola quartica normale (immagine della retta che congiunge le immagini dei due punti).

53. La proiezione della superficie F_2^3 da un punto qualunque 0 dello spazio R_4 è una superficie cubica rigata con una retta doppia ed una retta semplice direttrice (²).

54. La proiezione di F_2^3 da un punto qualunque di essa è una quadrica rigata.

55. Se i quattro assi S_1 delle forme che generano la superficie F_2^6 sono in uno stesso spazio ordinario Q_3 e questo è un elemento unito delle forme proiettive, la superficie F^6 si risolve in una superficie cubica F_2^3 rappresentata nel piano dalle curve del 4° ordine con punto triplo in A (immagine di Q_3) e punto semplice in quattro punti fondamentali P_i.

Sarà facile riconoscere che questa superficie ha le medesime proprietà di quella considerata al n. 52.

La direttrice sarà rappresentata dalla conica che passa per i cinque punti fondamentali; le generatrici dalle rette del fascio A; le coniche della F^3 dalle cubiche del piano Ω_2 che hanno punto doppio in A e punti semplici in tutti i punti fondamentali.

Le rette AP rappresentano quattro punti fissi di F_2^3.

§ IX. *Posizioni particolari dei punti fondamentali nel piano rappresentativo.*

56. Non intendiamo qui di studiare tutti gli innumerevoli casi particolari di F_2^6 che si possono presentare, secondo che taluni dei punti fondamentali sono situati su linee particolari del piano. Ci limiteremo solo ad accennare taluni dei casi che ottengonsi quando una o più terne di punti sono in linea retta.

Così: se si ha una terna di punti in linea retta, *la superficie* ${}_1F_2^6$, *oltre alle dieci rette, possiederà una undicesima retta la quale si appoggia ad una terna*

(¹) Veronese, *Princip des Projicirens und Schneidens.* Math. Ann. Bd. XIX, pag. 230.

(²) Cremona, *Rapp. piana.* R. Ist. lombardo del 1867. — Clebsch, Math. Ann. I ecc. — Bordiga, *Rappresentazione piana di una superficie rigata normale di* R_n. Ist. veneto, 1886.

delle prime; in questo caso ${}_1F_2^6$ *possiede 42 coniche*; *queste s' appoggiano ad una coppia dei dieci raggi; ma ventuna di esse si appoggiano anche all' undicesimo.*

${}_1F_2^6$ è tagliata da ogni spazio che contenga l' undicesimo raggio secondo curve del 5° ordine e di genere 1 rappresentate nel piano dalle cubiche che passano per tutti i punti fondamentali, eccettuati quelli in linea retta.

57. La proiezione generale della superficie ${}_1F_2^6$ è una *superficie* ${}_{10}\varphi^6$ *con undici rette, una delle quali appoggiata a tre delle altre, 42 coniche* ecc.

La curva nodale del 7 ordine si appoggia in tre punti distinti ad ognuno dei dieci raggi, ma incontra in due punti soltanto il raggio undicesimo.

La superficie ${}_{10}\varphi^6$ possiede 252 piani tritangenti e tre piani quadritangenti.

Nel resto le proprietà di ${}_{10}\varphi^6$ sono quelle di ${}_0\varphi^6$.

58. Se il centro O di proiezione è situato *sul piano di due raggi di* ${}_1F_2^6$ *che s' incontrino*, allora la proiezione sarà una superficie ${}_{11}\varphi^6$ *con una retta doppia* alla quale s' appoggiano due raggi; ed una *curva doppia del 6° ordine.*

Le proprietà di questa superficie sono quelle della superficie ${}_7\varphi^6$ (18); però la retta doppia di ${}_{11}\varphi^6$ non ha punti cuspidali; e ${}_{11}\varphi^6$ possiede solo 42 coniche.

59. Se due terne di punti fondamentali sono in linea retta, ${}_2F_2^6$ *possiederà 12 rette, due delle quali s' incontrano tra loro e si appoggiano ordinatamente a due terne delle altre dieci.* ${}_2F_2^6$ *possiede altresì 39 cubiche; di queste 6 s' appoggiano a quattro raggi, 24 a tre, 9 a due.*

60. La proiezione generale di ${}_2F_2^6$ è una superficie ${}_{12}\varphi^6$ con dodici rette. Di queste due sono situate in un piano e ognuna di esse si appoggia ad una terna delle altre.

Il piano delle prime due rette taglia ${}_{12}\varphi^6$ secondo una curva del 4° ordine con tre punti doppî, proiettiva ad una conica del piano rappresentativo la quale passa per i quattro punti fondamentali che non appartengono alle due terne.

61. Se nel piano rappresentativo di F_2^6 vi sono tre terne di punti in linea retta, la superficie ${}_3F_2^6$ possiede, come la superficie generale F_2^6, dieci cubiche piane, *ma una di queste si scompone in un trilatero.* Sicchè ${}_3F_2^6$ *possiede in totale tredici rette e trentasei coniche.*

62. Anche da ${}_3F_2^6$ possono dedursi, per via di proiezione, varî altri casi particolari di superficie del 6° ordine dello spazio ordinario R_3; esse avranno proprietà analoghe a quelle ricavate da F_2^6. Si noterà che se il centro di proiezione è situato sul piano del trilatero, la proiezione ha una retta tripla, ma su questa non vi sono punti cuspidali.

RELAZIONE

letta dal Socio Cantoni, relatore, a nome anche del Socio Blaserna nella seduta del 13 novembre 1887, sulla Memoria del dott. Angelo Battelli, intitolata: *Resistenza elettrica delle amalgame.*

« Ricordati brevemente i risultamenti di analoghi studi fatti anteriormente dai signori Matthiessen e Vogt, di Weber, e del dottore Gerosa, il Battelli si propone di riscontrare se veramente le amalgame di vari metalli, formate con proporzioni diverse di ciascuno di essi, e studiate sotto differenti temperature, offrono resistenze proporzionali alle quantità dei metalli alligati.

« Ora il Matthiessen ed il Vogt avevano già (1862) sperimentato sulle amalgame di stagno, bismuto, piombo, zinco, argento ed oro.

« Il Weber nel 1884 aveva pure studiate le amalgame di argento, piombo, zinco, cadmio e bismuto. Però le proporzioni ponderali dei metalli alligati al mercurio per questi sperimentatori furono sempre piccole. Laddove il Battelli studiò anche amalgame formate con proporzioni molto maggiori dei diversi metalli. Inoltre ai metalli testè nominati egli aggiunse il rame ed il sodio.

« Il Battelli trovò che le resistenze elettriche delle amalgame risultanti dalle sue esperienze, differiscono sensibilmente, ora in più ed ora in meno, rispetto ai valori calcolati colla media aritmetica delle varie sostanze, e riferiti agli atomi, ai pesi od ai volumi dei metalli componenti; il che, però, era già stato notato da Matthiessen e Vogt.

« Tuttavia il Battelli aggiunge che per amalgame di una data specie, partendo da una data proporzione piuttosto piccola, le differenze fra i valori sperimentali ed i calcolati, siano poi positivi o negativi, vanno dapprima aumentando col crescere delle proporzioni di uno dei metalli sino a raggiungere un massimo; ma di poi le differenze vanno man mano diminuendo, e possono per alcuni giungere sino a mutare di segno, il che pure era stato notato, almeno per lo stagno, da Matthiessen e Vogt.

« Una terza deduzione delle esperienze del Battelli è questa: che le differenze fra i valori sperimentali ed i calcolati sia per rispetto ai volumi, sia per rispetto ai pesi od agli atomi dell'amalgama, non tengono alcun rapporto colle proporzioni dei metalli componenti.

« Ora il Gerosa, discutendo i valori trovati dal Matthiessen, mostrò che, sebbene non apparisca alcuna relazione fra i valori osservati ed i calcolati per rispetto ai *volumi* dei due metalli alligati, i valori calcolati invece per rispetto ai *pesi* molecolari di

questi, mostrano che le amalgame formate con piccole quantità di un metallo, non eccedente la metà di quella che rende saturo il mercurio stesso a zero, la rispettiva loro resistenza elettrica vien decrescendo molto più rapidamente che non accada quando si alliga il mercurio con quantità più grandi; e che inoltre per le piccole quantità la variazione della resistenza risulta proporzionale alle quantità stesse. Del resto però il Gerosa, più che dell'amalgame semplici di un dato metallo, erasi occupato delle variazioni nella resistenza elettrica dei miscugli di varie amalgame.

« Il lavoro del Battelli ha inoltre il pregio di avere studiate le variazioni della resistenza elettrica anche in parecchie amalgame solide, il che non erasi fatto da altri.

« Concludendo diremo che ancor questo lavoro sperimentale del Battelli, essendo condotto con quella cura e quella abilità che egli ebbe già a dimostrare con parecchie precedenti indagini, merita, per avviso dei vostri Commissari, di essere pubblicato tra le Memorie di questa R. Accademia ».

Sulla resistenza elettrica delle amalgame.

Memoria di ANGELO BATTELLI.

Scopo di questo lavoro è di studiare ampiamente le variazioni delle resistenze elettriche delle amalgame, al cangiare della loro composizione e della temperatura.

Matthiessen in unione a Vogt (1), e poi Weber (2) fecero già studi interessanti sulla conducibilità elettrica di alcune amalgame binarie. Ma si limitarono a quelle che sono di più facile composizione, e che si mantengono liquide alla temperatura ordinaria, e per conseguenza in una data quantità di mercurio contengono soltanto piccole proporzioni del secondo metallo (3).

Sono appunto le singolarità che essi trovarono nel comportamento di tali amalgame, che resero importante l'estensione dello studio ad altre amalgame, le quali siano formate anche di altri metalli, ed abbiano più grande concentrazione.

Siccome però molte di tali amalgame alla temperatura ordinaria si scompongono evidentemente in due o più amalgame di diversa concentrazione, di cui le più dense restano al fondo; e siccome si ottiene invece un' amalgama omogenea, se si innalza sufficientemente la temperatura, io ho creduto necessario di fare lo studio delle resistenze delle amalgame a temperatura elevata in modo da poterle conservare perfettamente liquide. Tantopiù che io penso che queste alterazioni delle amalgame più concentrate siano la causa per la quale il Weber non potè trovare un andamento regolare nelle resistenze di tali amalgame, al crescere delle proporzioni dei metalli alligati al mercurio; come sembrami che proveranno le esperienze che riporterò più innanzi.

Pertanto non essendomi possibile di sperimentare a una temperatura tanto alta, che tutte le amalgame vi si mantenessero liquide, ho studiate allo stato liquido soltanto quelle che si mantenevano tali sino ai 100°; le altre più concentrate le ho studiate allo stato solido.

(1) Pogg. Ann., 116, p. 396 (1862).

(2) Wied., Ann., 23, pag. 447 (1884).

(3) Anche il Gerosa ha pubblicata recentemente una Nota [Rendiconti dell'Acc. dei Lincei, vol. II, fasc. II, p. 344 (1886)], *Sopra le mescolanze delle amalgame liquide*, nella quale riporta pure esperienze fatte sopra alcune amalgame di un sol metallo; ma si è fermato dentro i limiti di quelle che erano già state studiate da Matthiessen, e ne ha ottenuti, in sostanza, gli stessi risultati.

Il mercurio e gli altri metalli usati per la composizione delle amalgame erano puri. Il mercurio fu purificato mettendolo a riscaldare per lungo tempo a bagno maria con acido nitrico diluito; poi lavandolo e filtrandolo ripetutamente, e asciugandolo infine a bagno maria: gli altri metalli erano dei più puri che fornisce la fabbrica Trommsdorff.

Quantunque il Matthiessen e il Weber abbiano ambedue preparato le amalgame entro le canne stesse, in cui ne determinavano la resistenza, io tuttavia ho preferito di formare prima le amalgame ben omogenee in capsule di porcellana, e poi versarle intieramente nei tubi, in cui ne studiavo la resistenza, essendo questi mantenuti alla temperatura di 100°. Ciò feci perchè mi era troppo difficile ottenere perfetta omogeneità nel modo usato dai due menzionati sperimentatori. Nelle amalgame, che lasciavano qualche residuo nella capsula, versavo anche questo nei tubi, e facevo poi scorrere innanzi e indietro le amalgame nei tubi stessi.

Questi tubi erano lunghi da 80 a 90 cm. e avevano il diametro interno di circa $1^{mm},3$; quelli usati da Matthiessen e quelli usati da Weber erano più corti e più stretti; io li ho preferiti più larghi, onde le amalgame vi si potessero disporre più omogeneamente. Alle due estremità di essi erano saldate due canne più grosse, del diametro interno di 2 cm. e lunghe 6 cm. Questi tubi erano inoltre piegati due volte ad angolo retto, in modo da formare rettangoli a cui mancasse uno dei lati minori.

È superfluo l'aggiungere che, dopo essere stati usati, i tubi venivano ogni volta con grande cura ripuliti.

Durante le determinazioni, i tubi riempiti dalla sostanza in istudio, venivano collocati in un recipiente chiuso, e a doppie pareti, nel quale circolavano vapori di acqua bollente; in modo che il livello della sostanza nei due rami del tubo fosse lontano 4 o 5 cm. dal coperchio del recipiente. Nello stesso recipiente era collocato anche un termometro, per assicurarsi del valore e della costanza della temperatura.

Quanto alla scelta di un metodo per la determinazione delle resistenze, era necessario, a cagione della piccolezza del loro valore, eliminare, per quanto era possibile, l'influenza delle congiunzioni; tantopiù che tale influenza poteva variare da un' amalgama a un' altra. A tal scopo ho usato il metodo di Kirchhoff fondato sull'uso del galvanometro differenziale (1). Il metodo richiede nel galvanometro una disposizione tale, che le correnti che passano in senso contrario nei due rocchetti abbiano azione eguale sull'ago. Kirchhoff sciolse questa difficoltà coll'aggiunta di un terzo rocchetto, girevole intorno a un asse verticale, in guisa che lo si poteva disporre in posizione tale da non avere nell'ago alcuna deviazione, quando la corrente attraversava questo rocchetto e gli altri due rocchetti del galvanometro. Io ho potuto evitare questa disposizione alquanto incomoda; giacchè i due rocchetti del mio galvanometro a riflessione potevano avvicinarsi e allontanarsi dall'ago, facendoli scorrere anche di tratti piccolissimi sopra un' asta orizzontale. In questa maniera sono giunto a far sì che pel passaggio della corrente data da una Daniell, non si notava nello specchio del galvanometro

(1) Wied., Ann., 11, p. 801 (1880).

alcun movimento. La resistenza campione, a cui si doveva confrontare la resistenza da misurare, era del valore esatto di $\frac{1}{2}$ Siemens, ed era stata appositamente costruita. — Nella derivazione in cui era introdotta la resistenza campione, si trovava un reostato della fabbrica Siemens ed Halske; nella derivazione in cui era introdotta la resistenza da misurare si trovava un altro reostato unito ad un reocordo accuratamente graduato.

Le due coppie di reofori che dovevano essere in comunicazione colle estremità della resistenza da misurare, consistevano in fili di rame ben isolati con seta e vernice di copale, le cui punte erano tutte scoperte per un'eguale lunghezza di 3 mm. circa. Questi reofori inoltre s'immergevano tutti egualmente nelle canne di vetro, in cui terminavano i tubi contenenti le amalgame, e sempre alla stessa profondità (a tre centimetri dall'orlo delle canne) in ogni determinazione; quindi si vede che, versando in un tubo, come io faceva, tutta quanta l'amalgama formata nella capsula, a qualunque altezza fosse giunta nelle due canne, si otteneva sempre uno stesso valore della resistenza. Era da sospettare che alle volte si producessero nei tubi delle correnti termoelettriche, o fors' anche delle correnti idroelettriche fra amalgama e rame, le quali avrebbero fatto l'effetto di una resistenza che s'aggiungeva o si sottraeva dalla resistenza dell'amalgama stessa. Perciò nel circuito della pila era inserito un commutatore a bicchierini di mercurio; talchè appena fatta una determinazione di resistenza con la corrente in un certo senso, la si ripeteva con la corrente nel senso contrario. La media dei due valori ottenuti dava il valore più conveniente della resistenza cercata. Inoltre ogni amalgama veniva studiata almeno due volte. Siccome è ben conosciuta la conducibilità elettrica del mercurio, e siccome io determinavo innanzi tutto la resistenza di ogni tubo riempito con questo metallo, non era necessario misurarne la lunghezza e il diametro, giacchè io poteva confrontare la resistenza di un tubo pieno d'amalgama colla resistenza dello stesso tubo pieno di mercurio. Anche Matthiessen osserva che, operando in tal guisa, egli ottenne risultati più concordanti nelle esperienze fatte con differenti tubi, che quando misurò le lunghezze e i diametri dei tubi e introdusse questi dati nei calcoli.

Mutamenti della resistenza elettrica al variare della concentrazione.

Come ho notato in principio, una parte delle amalgame le ho studiate perfettamente liquide a 100°; e l'altra parte solide a 0° e alla temperatura dell'ambiente che era circa di 13°. Ho studiate pure alla temperatura di 13° quelle amalgame liquide che si mantenevano tali a questa temperatura.

In ciascuna serie di amalgame ho verificato antecedentemente sino a qual concentrazione l'amalgama si mantenesse a 100° ben liquida, e da qual concentrazione cominciasse ad essere alla temperatura ordinaria perfettamente solida, onde essere certo di sperimentare su amalgame del tutto omogenee.

Nel caso in cui si doveva versare nel tubo un'amalgama da studiarsi poi allo stato liquido, quando questa era formata nella capsula, il tubo era tenuto dentro il recipiente in cui circolavano i vapori d'acqua bollente.

Nel caso poi delle amalgame da studiarsi allo stato solido, facevo sciogliere il metallo nel mercurio riscaldandoli insieme in un crogiolo, e poi versavo l'amalgama intieramente nel tubo che era tenuto a temperatura altissima, entro un cilindro di lamina di ferro riscaldato in tutta la sua lunghezza da varie fiamme di gas.

Tanto nell'un caso quanto nell'altro veniva difesa l'amalgama dal contatto dell'aria, mantenendovi al di sopra un sottile strato di grasso disciolto.

Per avere un' idea ben chiara del comportamento delle resistenze delle amalgame, ho creduto utile di far vedere come varino queste resistenze al variare della composizione in atomi, in pesi e in volumi. Perciò ho confrontato i valori dati dall'esperienza con quelli che si ottengono dal calcolo delle formole

$$R_a = \frac{n_1 r_1 + n_2 r_2}{n_1 + n_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$R_p = \frac{p_1 r_1 + p_2 r_2}{p_1 + p_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$R_v = \frac{v_1 r_1 + v_2 r_2}{v_1 + v_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

dove r_1 e r_2 rappresentano le resistenze specifiche rispettive dei due metalli componenti; n_1 e n_2 i numeri degli atomi secondo i quali sono entrati in lega i due metalli; $p_1 p_2$ i pesi, e v_1 e v_2 i volumi relativi dei due metalli stessi.

Per eseguire questi calcoli, ho scelto per valori delle resistenze elettriche dei metalli e dei coefficienti di variazione al mutare della temperatura, i valori trovati da Matthiessen [1] e da Matthiessen e Bose [2], perchè essi hanno posta molta cura nello sperimentare con metalli, che fossero possibilmente puri.

Nelle tabelle che seguono, la prima colonna contiene le composizioni atomiche delle amalgame, la seconda indicata con R, le relative resistenze determinate coll'esperienza; e le ultime tre colonne, indicate con Δ_a, Δ_p, Δ_v contengono le differenze fra i valori delle resistenze avute dalle determinazioni, e i valori R_a, R_p, R_v ottenuti rispettivamente dal calcolo delle tre formole sopra riferite.

Secondochè queste differenze sono calcolate per le temperature di 0°, 13° o 100°, v' è segnata in capo della relativa colonna una di queste temperature. E secondochè la resistenza ottenuta dalle determinazioni è maggiore o minore di quella ottenuta col calcolo, si trova avanti al numero, che indica la differenza, il segno (+) o (—).

Siccome ho determinata la resistenza di ciascuna amalgama almeno a due temperature differenti, come si vedrà in seguito, ho potuto ridurre per tutte le amalgame i valori di queste resistenze a una stessa temperatura che è, nel caso delle amalgame liquide, 100° per alcune, e per altre 100° e 13°; e nel caso delle amalgame solide è 0° per alcune, e per altre 0° e 13°. I valori delle resistenze sono riferiti a quella del mercurio a 0° presa come unità.

(1) Pogg. Ann., 100, pag. 177, 1857.
(2) Pogg. Ann., 115, pag. 353, 1862.

Dapprima furono studiate le amalgame di stagno.

Stato liquido								
Composizione atomica	R		Δ_a		Δ_p		Δ_v	
	13°	100°	13°	100°	13°	100°	13°	100°
$Sn_1\ Hg_{100}$	1,0065	1,1024	+ 0,0023	+ 0,0019	— 0,0013	— 0,0015	+ 0,0031	+ 0,0029
$Sn_1\ Hg_{59}$	1,0016	1,0977	+ 0,0033	+ 0,0033	— 0,0026	— 0,0024	+ 0,0047	+ 0,0049
$Sn_1\ Hg_{50}$	0,9991	1,0957	+ 0,0034	+ 0,0041	— 0,0036	— 0,0032	+ 0,0050	+ 0,0058
$Sn_1\ Hg_{25}$	—	1,0809	—	+ 0,0062	—	— 0,0078	—	+ 0,0095
$Sn_1\ Hg_{15}$	—	1,0656	—	+ 0,0126	—	— 0,0097	—	+ 0,0178
$Sn_1\ Hg_8$	—	1,0307	—	+ 0,0214	—	— 0,0168	—	+ 0,0302
$Sn_1\ Hg_4$	—	0,9668	—	+ 0,0315	—	— 0,0268	—	+ 0,0516
Stato solido								
	0°	13°	0°	13°	0°	13°	0°	13°
$Sn_1\ Hg_2$	0,6997	—	— 0,0224	—	— 0,11445	—	— 0,0036	—
$Sn_1\ Hg_1$	0,5412	0,5499	— 0,0268	— 0,0278	— 0,1374	— 0,1392	— 0,0051	— 0,0060
$Sn_3\ Hg_1$	0,3263	0,3348	— 0,0242	— 0,0238	— 0,1203	— 0,1206	— 0,0090	— 0,0086
$Sn_5\ Hg_1$	0,2561	0,2633	— 0,0222	— 0,0226	— 0,0971	— 0,0981	— 0,0111	— 0,0114

Non mi sono fermato a studiare le amalgame in cui entrano piccolissime quantità di stagno, perchè su di esse esistono le esperienze accurate del Matthiessen. Ho poi riportati i valori delle resistenze a 13° soltanto per quelle amalgame che a questa temperatura si mantenevano perfettamente liquide o perfettamente solide. Dalle mie determinazioni, come apparisce chiaramente dalla tabella, risulta che i valori delle resistenze trovate sperimentalmente sono per le amalgame allo stato liquido maggiori di quelli trovati dal calcolo delle formole (1) e (3), e per le amalgame allo stato solido sono invece minori di quelli trovati dal calcolo delle stesse formole. I valori dati dall'esperienza sono poi sempre minori di quelli dati dal calcolo della formola (2), tanto per le amalgame allo stato liquido, che per quelle allo stato solido. Inoltre, se si considerano le differenze fra i valori dell'esperienza e quelli dovuti alla formola (1), si vede che queste differenze, per le amalgame allo stato liquido, vanno sempre crescendo al crescere dello stagno, così a 13° come a 100° e per le amalgame allo stato solido, queste differenze crescono dall'amalgama $Sn_1\,Hg_1$, e poi prendono a diminuire lentamente, tanto a 0° che a 13°. Le differenze fra i valori dell'esperienza e quelli dati dalla formola (2) crescono sempre al crescere dello stagno per le amalgame allo stato liquido, e per quelle allo stato solido sino all'amalgama $Sn_1\,Hg_1$, e poi cominciano a diminuire.

In fine le differenze fra i valori dell'esperienza e quelli dati dalla formola (3) vanno sempre crescendo, aumentando le proporzioni dello stagno, per le amalgame allo stato liquido; e così pure per le amalgame allo stato solido.

Amalgame di bismuto.

Composizione atomica	R		Δ_a		Δ_p		Δ_v	
Stato liquido	13°	100°	13°	100°	13°	100°	13°	100°
Bi_1 Hg_{420}	1,0091	1,1066	— 0,0047	— 0,00495	— 0,0048	— 0,0051	— 0,0051	— 0,0060
Bi_1 Hg_{210}	1,0035	1,1039	— 0,0112	— 0,0099	— 0,0113	— 0,0101	— 0,0120	— 0,0119
Bi_1 Hg_{105}	0,9869	1,0902	— 0,02955	— 0,0280	— 0,02975	— 0,02845	— 0,0312	— 0,0321
Bi_1 Hg_{50}	—	1,0654	—	— 0,0624	—	— 0,06385	—	— 0,0706
Bi_1 Hg_{25}	—	1,0292	—	— 0,1164	—	— 0,11815	—	— 0,1320
B_1 Hg_9	—	0,8783	—	— 0,3254	—	— 0,3296	—	— 0,3622
Stato solido	0°	13°	0°	13°	0°	13°	0°	13°
Bi_1 Hg_2	0,6386	—	— 0,4714	—	— 0,4750	—	— 0,50085	—
Bi_1 Hg_1	0,8065	0,8514	— 0,35855	— 0,3520	— 0,3626	— 0,3567	— 0,3891	— 0,3872
Bi_2 Hg_1	0,9822	1,0293	— 0,2378	— 0,2387	— 0,2415	— 0,2419	— 0,2634	— 0,2641
Bi_5 Hg_1	1,0798	1,1347	— 0,1953	— 0,1958	— 0,1975	— 0,1983	— 0,2104	-- 0,2134

Nelle amalgame di bismuto i valori delle resistenze ottenuti colle esperienze sono, per le amalgame da me studiate, sempre minori dei valori ottenuti col calcolo delle formole (1), (2) e (3). Le differenze Δ_a, Δ_p, Δ_v vanno aumentando, al crescere delle proporzioni del bismuto, per le amalgame allo stato liquido. Queste differenze per la 1ª amalgama solida Bi_1, Hg_2 sono maggiori che per tutte le amalgame liquide, ma dall'amalgama Bi_1 Hg_2 in poi le stesse differenze prendono a diminuire.

Amalgame di cadmio.

Composizione atomica	R		Δ_a		Δ_p		Δ_v	
Stato liquido	13°	100°	13°	100°	13°	100°	13°	100°
Cd_1 Hg_{224}	1,0079	1,1040	— 0,0008	— 0,00085	— 0,00265	— 0,00285	— 0,0013	— 0,0014
Cd_1 Hg_{112}	1,0046	1,1004	+ 0,00005	+ 0,00005	— 0,0036	— 0,00395	— 0,0009	— 0,0011
Cd_1 Hg_{56}	0,9976	1,0929	+ 0,0012	+ 0,0011	— 0,0060	— 9,0065	— 0,0007	— 0,0009
Cd_1 Hg_{30}	—	1,0820	—	+ 0,0049	—	— 0,0090	—	+ 0,0012
Cd_1 Hg_{15}	—	1,0628	—	+ 0,0160	—	— 0,01065	—	+ 0 0090
Cd_1 Hg_5	—	0,9834	—	+ 0,0406	—	— 0,0253	—	+ 0,0239

Composizione atomica	Stato solido R		Δ_a		Δ_p		Δ_v	
	0°	13°	0°	13°	0°	13°	0°	13°
$Cd_1\ Hg_2$	0,7255	—	+ 0,0278	—	— 0,07985	—	+ 0,0123	—
$Cd_1\ Hg_1$	0,5610	0,5690	+ 0,0261	+ 0,0259	— 0,1051	— 0,10645	— 0,0030	— 0,0034
$Cd_3\ Hg_1$	0,3210	0,3268	+ 0,0186	+ 0,0186	— 0,0959	— 0,0971	— 0,00385	— 0,0041
$Cd_6\ Hg_1$	0,2125	0,2173	+ 0,0098	+ 0,0098	— 0,0707	— 0,0715	— 0,0051	— 0,0053

Se si considera l'andamento di queste amalgame, si scorge che per la prima di esse $Cd_1\ Hg\ 224$, la differenza Δ_a fra il valore dato dall'esperienza e quello dato dal calcolo della formola (1) è negativo; nelle amalgame seguenti, dove vanno continuamente crescendo le proporzioni del cadmio, le differenze Δ_a sono positive e vanno sempre aumentando per tutte le amalgame studiate allo stato liquido. Per le amalgame allo stato solido tali differenze sono minori che per l'amalgama liquida più concentrata Cd_1, Hg_5, e vanno diminuendo al crescere delle proporzioni del cadmio.

Le differenze Δ_p si mantengono sempre negative; e vanno aumentando colle proporzioni del cadmio in tutte le amalgame allo stato liquido, e seguitano pure ad aumentare passando alle amalgame allo stato solido fino alla $Cd_1\ Hg_1$; dopo della quale, crescendo le proporzioni del cadmio, le differenze Δ_p diminuiscono. Quanto alle differenze Δ_v, esse sono negative per le amalgame meno concentrate, e vanno diminuendo al crescere della quantità di cadmio che entra nell'amalgama, sino a $Cd_1\ Hg\ 56$; dopo della quale queste differenze diventano positive e vanno aumentando coll'aumentare le proporzioni del cadmio, per tutte le altre amalgame studiate allo stato liquido. Per le amalgame studiate allo stato solido, le differenze Δ_v ritornano negative, e vanno crescendo colle proporzioni del cadmio.

Amalgame di piombo.

Composizione atomica	Stato liquido R		Δ_a		Δ_p		Δ_v	
	13°	100°	13°	100°	13°	100°	13°	100°
$Pb_1\ Hg_{414}$	0,9983	1,0947	— 0,0126	— 0,0127	— 0,0126	— 0,0127	— 0,0122	— 0,0123
$Pb_1\ Hg_{207}$	0,9992	1,0957	— 0,0098	— 0,0101	— 0,0097	— 0,0098	— 0,0089	— 0,0092
$Pb_2\ Hg_{207}$	0,9971	1,0939	— 0,0081	— 0,0080	— 0,0078	— 0,0076	— 0,0063	— 0,0061
$Pb_1\ Hg_{50}$	—	1,0908	—	— 0,00295	—	— 0,0026	—	+ 0,0005
$Pb_1\ Hg_{24}$	—	1,0749	—	— 0,0030	—	— 0,0020	—	+ 0,0041
$Pb_1\ Hg_{12}$	—	1,0460	—	— 0,0030	—	— 0,00105	—	+ 0,0101

Stato solido								
Composizione atomica	R		Δ_a		Δ_p		Δ_v	
	0°	13°	0°	13°	0°	13°	0°	13°
Pb_1 Hg_2	0,7366	—	+ 0,0036	—	+ 0,0097	—	+ 0,0431	—
Pb_1 Hg_1	0,6069	0,6187	+ 0,0072	+ 0,0075	+ 0,0141	+ 0,0144	+ 0,0510	+ 0,0504
Pb_3 Hg_1	0,4380	0,4504	+ 0,0387	+ 0,0400	+ 0,0438	+ 0,0451	+ 0,0702	+ 0,0706
Pb_6 Hg_1	0,3855	0,3965	+ 0,0720	+ 0,07215	+ 0,0754	+ 0,0955	+ 0,0915	+ 0,0917

Nelle amalgame di piombo le differenze Δ_a sono tutte negative per le amalgame studiate allo stato liquido e vanno diminuendo col crescere le proporzioni del piombo fino alle tre ultime amalgame, dove accennano a rimanere costanti. Per le amalgame studiate allo stato solido invece queste differenze sono positive e vanno aumentando col crescere le proporzioni del piombo.

Il medesimo andamento hanno le differenze Δ_p.

Le differenze Δ_v sono negative per le amalgame liquide meno concentrate, e vanno diminuendo al crescere delle proporzioni del piombo, sino all'amalgama $Pb_1 Hg_{50}$, a cominciare dalla quale le differenze diventano positive, si mantengono tali passando anche alle amalgame studiate allo stato solido, e vanno sempre aumentando al crescere le proporzioni del piombo.

Amalgame di zinco.

Stato liquido								
Composizione atomica	R		Δ_a		Δ_p		Δ_v	
	13°	100°	13°	100°	13°	100°	13°	100°
Zn_5 Hg_{652}	1,0096	1,1058	+ 0,0040	+ 0,0042	— 0,0009	— 0,0009	+ 0,0014	+ 0,0015
Zn_5 Hg_{326}	1,0068	1,1027	+ 0,0083	+ 0,0088	— 0,0013	— 0,0015	+ 0,0033	+ 0,0034
Zn_5 Hg_{163}	—	1,0950	—	+ 0,0160	—	— 0,0042	—	+ 0,0055
Zn_{10} Hg_{163}	—	1,0825	—	+ 0,0320	—	— 0,00685	—	+ 0,0121
Zn_{25} Hg_{326}	—	1,0771	—	+ 0,0404	—	— 0,00735	—	+ 0,01585
Zn_{20} Hg_{163}	—	4,0618	—	+ 0,0636	—	— 0,0083	—	+ 0,02725
Stato solido								
	0°	13°	0°	13°	0°	13°	0°	13°
Zn_1 Hg_2	0,7407	—	+ 0,0550	—	— 0,1272	—	+ 0,0291	—
Zn_1 Hg_1	0,6291	0,6381	+ 0,1005	+ 0,1017	— 0,1391	— 0,1405	+ 0,0009	— 0,0010
Zn_8 Hg_1	0,3647	0,3712	+ 0,0618	+ 0,0730	— 0,1691	— 0,1705	+ 0,0134	— 0,0131

Non ho potuto sperimentare su amalgame di zinco più concentrate, perchè la grande contrazione che si verificava nella loro solidificazione, produceva delle screpolature trasversali nel filo metallico, da renderne impossibile, col metodo da me usato, uno studio esatto della resistenza.

Per lo zinco le differenze Δ_a sono positive tanto per le amalgame studiate allo stato liquido, che per quelle studiate allo stato solido. Per le prime, queste differenze vanno sempre crescendo, per le seconde invece vanno diminuendo prima e crescendo poi, al crescere delle proporzioni dello zinco.

Le differenze Δ_p sono negative, e vanno sempre crescendo, così per le amalgame studiate allo stato solido, come per quelle studiate allo stato liquido.

Le differenze Δ_v sono positive per tutte le amalgame allo stato liquido, e per la prima amalgama solida, e vanno crescendo al crescere delle proporzioni dello zinco; per le due altre amalgame solide queste differenze diventano negative, ed è maggiore quella dell'amalgama più concentrata.

Amalgame di rame.

Per ottenere le amalgame di rame preparavo del rame in polvere, facendolo precipitare dal solfato di rame, sopra una lastra di zinco; poi mettevo una data quantità di questa polvere in una capsula, e vi mescolavo un po' d'acido solforico diluito insieme alla quantità necessaria di mercurio; indi versavo acqua bollente, agitando vivamente la mescolanza; in pochi istanti l'amalgama era composta.

Stato liquido								
Composizione atomica	R		Δ_a		Δ_p		Δ_v	
	13°	100°	13°	100°	13°	100°	13°	100°
$Cn_1\ Hg_{127}$	1,0013	1,0969	— 0,0045	— 0,0039	— 0,0091	— 0,0106	— 0,0078	— 0,0083
$Cn_2\ Hg_{127}$	0,9853	1,0806	— 0,0121	— 0,0119	— 0,0226	— 0,0238	— 0,0201	— 0,0206
$Cn_4\ Hg_{127}$	0,9800	0,0744	— 0,0025	— 0,0020	— 0,0225	— 0,0238	— 0,0180	— 0,0187

Da queste poche esperienze si vede che per le amalgame di rame si ha un andamento simile a quello avuto per le amalgame precedenti, poichè le differenze Δ_a, Δ_p, Δ_v sono negative per tutte le amalgame, ma passando dalla prima alla seconda amalgama, tali differenze crescono, e dalla seconda alla terza invece diminuiscono.

Amalgame di argento.

Stato liquido								
Composizione atomica	R		Δ_a		Δ_p		Δ_v	
	13°	100°	13°	100°	13°	100°	13°	100°
$Ag_1\ Hg_{400}$	1,0114	1,1077	+ 0,0010	+ 0,0011	— 0,0001	— 0,00015	+ 0,0003	+ 0,0003
$Ag_1\ Hg_{200}$	1,0056	1,1015	— 0,0023	— 0,0024	— 0,0046	— 0,0059	— 0,0038	— 0,0040
$Ag_1\ Hg_{100}$	0,9928	1,0885	— 0,0077	— 0,0076	— 0,0147	— 0,0150	— 0,0131	— 0,0133
$Ag_1\ Hg_{50}$	—	1,0747	—	— 0,0109	—	— 0,0230	—	— 0,0196

In queste amalgame, le differenze Δ_p sono negative per tutte, e crescono al crescere le proporzioni dell'argento. Le differenze Δ_a e Δ_v sono positive per la prima amalgama $Ag_1 Hg_{400}$, e negative per tutte le altre. Come apparisce da uno sguardo sulla tabella, queste differenze pure crescono al crescere le proporzioni dell'argento.

Amalgame di sodio.

Per formare le amalgame di sodio, facevo riscaldare una data quantità di mercurio sotto il petrolio in un tubo di vetro ad U, il quale ad una estremità si allargava in una specie di vaschetta, all'altra estremità era affilato. Nell'istesso tempo facevo fondere la quantità necessaria di sodio sotto il petrolio in un tubo pure ad U, ed affilato ad una estremità. Appena raggiunta la fusione, capovolgevo rapidamente il tubo, in cui si trovava il sodio, nell'altro in cui si trovava il mercurio in modo da immergere dentro il mercurio la punta affilata. Così il sodio scendeva a mescolarsi al mercurio, senza pericolo di venire a contatto coll'aria. Con una bacchettina di vetro seguitavo poi a mescolarli vivamente insieme. Formata l'amalgama, la versavo nel tubo ove doveva essere studiata, immergendo in esso l'estremità affilata del tubo ad U; cosicchè neppure in tal caso si correva pericolo che l'amalgama venisse a contatto dell'aria.

Stato liquido								
Composizione atomica	R		Δ_a		Δ_p		Δ_v	
	13°	100°	13°	100°	13°	100°	13°	100°
$Na_1 Hg_{495}$	—	1,1073	—	0,0000	—	— 0,0018	—	+ 0,0012
$Na_1 Hg_{100}$	—	0,9992	—	— 0,10025	—	— 0,1090	—	— 0,0943
$Na_1 Hg_{50}$	—	0,7873	—	— 0,3025	—	— 0,3186	—	— 0,2910
$Na_1 Hg_{25}$	—	0,6950	—	— 0,3760	—	— 0,4098	—	— 0,3562
$Na_1 Hg_{15}$	—	0,6097	—	— 0,4373	—	— 0,49205	—	— 0,3941
Stato solido								
	0°	13°	0°	13°	0°	13°	0°	13°
$Na_1 Hg_{15}$	0,8810	0,8912	— 0,0599	— 0,0584	— 0,1118	— 0,1144	— 0,02745	— 0,0291

Si vede subito che per le amalgame di sodio i valori delle differenze Δ_a, Δ_p, Δ_v (fatta eccezione per le differenze Δ_a e Δ_v della prima amalgama $Na_1 Hg_{495}$) sono negativi, e vanno crescendo al crescere le proporzioni del sodio allo stato liquido. Passando all'amalgama studiata allo stato solido (nel quale stato giova ricordare che il sodio offre una resistenza molto minore che allo stato liquido), le differenze Δ_a, Δ_p e Δ_v si mantengono negative, e sono inoltre diminuite.

Dalle determinazioni riferite si deduce:

1°. Se si confrontano i valori delle resistenze elettriche delle amalgame ottenuti dalle esperienze, con i valori che si ottengono mediante il calcolo della media aritmetica delle resistenze relative agli atomi, ai pesi e ai volumi dei due metalli componenti, si trova che in generale i valori dati dall'esperienza sono diversi da quelli dati dal calcolo; ed ora sono maggiori, ora sono minori.

2°. Si può stabilire in generale che per una data specie di amalgame, a partire da una di esse, le differenze fra i valori dell'esperienze e del calcolo, o siano positive o negative, vanno via via crescendo al crescere delle proporzioni di uno dei metalli componenti; raggiungono un massimo, poi prendono a diminuire, e possono giungere persino a cambiare di segno. A questa legge parrebbe che facessero eccezione le differenze Δ_p nelle amalgame di zinco, in quelle di argento, e in quelle di sodio; ma è molto probabile che ciò sia avvenuto perchè non ho potuto spingere le mie ricerche ad amalgame che prolungassero in ambedue i sensi le tre serie mentovate.

3°. Non esiste nessun rapporto semplice fra i valori delle differenze Δ_a, Δ_p e Δ_v e le proporzioni dei metalli componenti.

4°. Se si pongono a confronto le amalgame di simile composizione, si trova che le differenze Δ_a, Δ_p e Δ_v sono piccole per le amalgame di stagno, cadmio e piombo; sono invece relativamente grandi per quelle di bismuto, di rame, di argento e di sodio. Per quelle di zinco tali differenze sono piccole nelle amalgame meno concentrate studiate allo stato liquido, e grandi nelle amalgame studiate allo stato solido.

Mutamenti della resistenza elettrica al variare della temperatura.

Weber, nel suo studio sulla conducibilità elettrica delle amalgame, si è occupato dell'influenza che aveva la temperatura sulla conducibilità stessa, ed ha trovato, sperimentando su amalgame di stagno, che se contengono soltanto una quantità piccolissima di questo metallo, mostrano un comportamento regolare; e che allora hanno un coefficiente di variazione pienamente determinato, e la rappresentazione grafica della resistenza come funzione della temperatura fra 15° e 100°, è perfettamente una linea retta. Ma se si crescono le quantità del metallo alligato al mercurio, si incontrano ben presto delle irregolarità, e dei salti improvvisi nei valori della resistenza al crescere della temperatura.

Per mettere bene in chiaro la variazione della resistenza col variare della temperatura, io ho estese le esperienze, oltre che alle amalgame di stagno, anche a quelle di bismuto, di cadmio, di piombo e di zinco. In queste esperienze il tubo che conteneva l'amalgama era immerso in un bagno di acqua a doppie pareti, con un agitatore per mantenere meglio costanti e uniformi le diverse temperature a cui veniva portato.

Ho trovato che per tutte le amalgame che si mantengono ben liquide alla temperatura ordinaria (che sono quelle di cui nelle tabelle precedenti ho data la resistenza allo stato liquido anche alla temperatura di 13°), si aveva un determinato coefficiente di variazione per la temperatura. Di ciò porterò un esempio nell'amalgama

$Bi_1\,Hg_{210}$, dando i valori della resistenza trovati per essa sperimentalmente alle diverse temperature, e di fronte a questi i valori ottenuti aggiungendo alla sua resistenza a 13°, la variazione calcolata per mezzo del coefficiente relativo all'amalgama stessa.

Temperatura	Resistenza	
	osservata	calcolata
13°	1,0035	—
24,6	1,0150	1,0169
40,1	1,0331	1,0348
51,2	1,0480	1,0476
66,0	1,0639	1,0647
79,3	1,0811	1,0800
99,1	1,1031	1,1029

Credo utile di riportare nella seguente tabella i coefficienti di variazione (c) fra 13° e 100° spettanti alle diverse amalgame, che si comportano in modo regolare.

Amalgame di stagno		Amalgame di bismuto		Amalgame di cadmio		Amalgame di piombo		Amalgame di zinco	
Amalgame	C	Amalgame	C	Amalgame	C	Amalgame	C	Amalgame	C
$Sn_1\,Hg_{100}$	0,0010952	$Bi_1\,Hg_{420}$	0,001106	$Cd_1\,Hg_{224}$	0,001096	$Pb_1\,Hg_{414}$	0,001109	$Zn_5\,Hg_{652}$	0,001094
$Sn_1\,Hg_{59}$	0,0011029	$Bi_1\,Hg_{120}$	0,001150	$Cd_1\,Hg_{112}$	0,001096	$Pb_1\,Hg_{207}$	0,001110	$Zn_5\,Hg_{326}$	0,001089
$Sn_1\,Hg_{50}$	0,0011114	$Bi_1\,Hg_{105}$	0,001203	$Cd_1\,Hg_{56}$	0,0011028	$Pb_2\,Hg_{207}$	0,001111	—	—

In generale questi coefficienti, fatta eccezione delle amalgame di zinco, crescono al crescere delle proporzioni dei metalli alligati al mercurio; ma non si scorge nessuna relazione semplice fra di essi e fra i coefficienti spettanti ai metalli componenti.

Per le amalgame di sodio e per l'amalgama $Ag_1\,Hg_{50}$, ho fatto determinazioni soltanto a circa 90°, 5; e per le altre di argento e per quelle di rame ho fatto determinazioni alle temperature di circa 13° e 99°, 5.

Quanto al comportamento delle resistenze delle altre amalgame, esso è più o meno irregolare, secondochè sono maggiori o minori le proporzioni del metallo unito al mercurio. Fra queste amalgame le meno concentrate hanno dapprincipio un andamento quasi regolare; poi ad una certa temperatura, si avverte un salto nel valore della resistenza; indi l'andamento prosegue regolare, come per le amalgame perfettamente liquide a temperatura ordinaria.

Fra le molte amalgame su cui ho sperimentato, sceglierò come esempio l'amalgama $Sn_1\,Hg_{25}$.

Temperatura	Resistenza
12°,6	0,9770
19,2	0,9826
29,1	0,9902
32,3	0,9931
35,7	1,0091
39,0	1,0140
50,1	1,0250
72,4	1,0511
99,4	1,0801

Come si vede chiaramente, in questa lega i valori della resistenza crescono lentamente, ma abbastanza regolarmente sino a circa 32°; fra 32° e 35° si avverte un aumento repentino, e dai 36° in poi i valori vanno crescendo regolarmente, tanto che si può loro assegnare il coefficiente di variazione 0,0011320.

Per amalgame che siano più concentrate, invece che un solo salto nei valori delle resistenze, si avverte un numero di salti sempre maggiore, a misura che crescono le proporzioni del metallo alligato al mercurio. Porterò come esempio le tre amalgame di bismuto $Bi_1 Hg_{50}$, $Bi_1 Hg_{25}$, $Bi_1 Hg_9$; nella prima delle quali si avverte un solo salto a 29° circa; nella seconda due salti, uno a 27° circa e l'altro a 48° circa; e nella terza tre salti, uno a 25° circa, l'altro a 40° circa e l'ultimo a 70° circa.

$Bi_1 Hg_{50}$		$Bi_1 Hg_{25}$		$Bi_1 Hg_9$	
Temperatura	Resistenza	Temperatura	Resistenza	Temperatura	Resistenza
13°,3	0,9470	12°,9	0,8679	12°,9	0,7790
20,1	0,9481	19,8	0,8751	19,1	0,7842
28,4	0,9514	26,3	0,8810	24,6	0,7883
30,1	0,9721	27,8	0,8949	26,0	0,7968
38,6	0,9840	38,4	0,9060	31,4	0,8013
49,1	0,9981	47,2	0,9158	39,2	0,8091
58,6	1,0100	49,5	0,9362	40,6	0,8184
70,0	1,0262	54,0	0,9430	46,8	0,8250
88,6	1,0497	65,0	0,9688	54,8	0,8339
99,3	1,0641	74,2	0,9948	65,9	0,8437
—	—	83,9	1,0070	69,3	0,8481
—	—	99,4	1,0280	71,0	0,8573
—	—	—	—	77,4	0,8632
—	—	—	—	83,6	0,8698
—	—	—	—	99,3	0,8775

Questi valori si sono ottenuti facendo variare le temperature delle amalgame per riscaldamento, ma se invece si fanno variare, raffreddando lentamente le amalgame stesse, si ottengono pure dei salti, come nel caso del riscaldamento, ma essi avvengono a temperature alquanto inferiori. Darò, come esempio, uno specchio delle temperature a cui avvengono i salti durante il raffreddamento, per le amalgame $Bi_1 Hg_{25}$ e $Bi_1 Hg_9$.

$Bi_1 Hg_{25}$		$Bi_1 Hg_9$	
Durante il riscaldamento	Durante il raffreddamento	Durante il riscaldamento	Durante il raffreddamento
77°	25°	25°	24°
48	44	40	37
—	—	70	66

La spiegazione di questi fatti mi pare che debba ricercarsi in ciò, che nelle amalgame più concentrate, quando la temperatura non è sufficientemente alta, si ha la separazione dell'amalgama in una parte pastosa e in un'altra parte liquida; e se l'amalgama è molto concentrata, avvengono diverse separazioni in parti più o meno liquide, a diverse temperature. Ora, a quelle temperature appunto a cui avvengono tali separazioni, si ha un salto nell'andamento delle resistenze elettriche. Il fatto poi che durante il raffreddamento questi salti avvengono a temperature più basse che non durante il riscaldamento, è spiegabile ammettendo che si avveri nel raffreddarsi dell'amalgama una specie di soprafusione in quella parte di essa che deve solidificarsi.

Un altro fatto da notare, osservato del resto anche dal Weber, si è che durante il raffreddamento i valori delle resistenze delle amalgame non sono alle medesime temperature perfettamente gli stessi che durante il riscaldamento. Ma se il raffreddamento avviene lentamente, le differenze sono assai piccole; se invece il raffreddamento è molto rapido, le differenze sono assai notevoli.

Nel fare queste esperienze, io tenevo il tubo entro il bagno di acqua, onde ottenere un raffreddamento lento; per ottenere invece un raffreddamento rapido, lasciavo raffreddare l'amalgama entro il cilindro in cui avevano circolato i vapori d'acqua bollente, potendosi tuttavia ritenere costante la temperatura per i pochi momenti che mi bisognavano per fare ciascuna misura. Talvolta, per ottenere un abbassamento grande e repentino nella temperatura, trasportavo il tubo nell'aria della stanza.

Porto l'esempio dell'amalgama $Bi_1 Hg_{52}$, nella quale è molto palese la differenza fra i valori ottenuti con un raffreddamento lento e quelli ottenuti con un raffreddamento rapido. (I valori appartenenti al riscaldamento e al raffreddamento lento sono stati calcolati per le temperature in cui si sono fatte le determinazioni durante il raffreddamento rapido, per mezzo dei coefficienti di variazione trovati nelle vicinanze di quelle temperature stesse).

Resistenze dell'amalgama $Bi_1 Hg_{25}$

Temperatura	R. durante il riscaldam.	R. durante raffred. lento	R. durante raffred. rapido
12°,9	0,8679	0,8684	0,8701
26,3	0,8810	0,8863	0,8934
47,2	0,9158	0,9164	0,9236
65,0	0,9688	0,9698	0,9711
83,9	1,0070	1,0074	1,0079
99,4	1,0280	1,0280	1,0280

Il Weber spiega queste differenze fra i valori delle resistenze delle amalgame ottenuti durante il riscaldamento e quelli ottenuti durante il raffreddamento, avvertendo che nella solidificazione di un' amalgama si formano probabilmente piccoli interstizi, i quali vengono poi riempiti quando l'amalgama si fonde.

Per le amalgame poi che erano perfettamente solide alla temperatura ordinaria, se ripetutamente si riscaldavano e si raffreddavano rapidamente, non si ritornava mai ad ottenere a 0° lo stesso valore della resistenza elettrica. Invece se si lasciavano raffreddare lentamente, mantenendo sotto il cilindro di ferro, in cui era posto il tubo contenente l'amalgama, una lampada la cui fiamma veniva gradatamente diminuita, allora a 0° si ritornava press' a poco allo stesso valore della resistenza. — Porto, come esempio, i valori delle resistenze ottenuti a 0° per l'amalgama $Cd_3 Hg_1$, dopo successivi raffreddamenti lenti e rapidi.

1° raffreddamento lento	1° raffredd. rapido	2° raffredd. lento	2° raffredd. rapido
0,3208	0,3420	0,3212	0,3556

Debbo notare che in tutte le determinazioni che ho fatte, ho sempre trovato che i valori delle resistenze ottenuti dopo un rapido raffreddamento, erano maggiori di quelli ottenuti dopo un lento raffreddamento.

Rendo infinite grazie al chiariss. prof. Naccari, che m' ha prestati tutti i mezzi per eseguire queste esperienze.

Sui sistemi di Weingarten negli spazî di curvatura costante.

Memoria del Corrispondente LUIGI BIANCHI

pervenuta al Presidente durante le ferie accademiche

PREFAZIONE

Quei sistemi tripli di superficie ortogonali, contenenti una serie di superficie a curvatura costante, che ho studiato in una Memoria inserita nel tomo XIII serie 2ª degli Annali di Matematica (¹) (sistemi di Weingarten), esistono e conservano le loro proprietà fondamentali anche negli spazî a tre dimensioni di curvatura costante, e cioè tanto nello spazio di Riemann (a curvatura costante positiva), quanto in quello di Lobatschewsky (a curvatura costante negativa).

In questa Memoria mi occupo appunto di estendere a tali spazî i risultati, che ho ottenuto nel citato lavoro per il caso dello spazio piano (euclideo).

Comincio nel § I dal trattare analiticamente le formole relative alle linee ed ai raggi principali di curvatura di una superficie qualunque, immersa nello spazio di Riemann o in quello di Lobatschewsky. Ottengo così le relazioni fondamentali (5) n. 3, che coincidono formalmente con quelle ben note sussistenti nello spazio euclideo.

Da queste formole segue (§ II) che l'elegante e fecondo teorema di Weingarten (²), relativo alle evolute di quelle superficie, i cui raggi principali di curvatura sono funzioni l'uno dell'altro, conserva la sua validità anche nei nuovi spazî.

Fra le numerose conseguenze di questo teorema qui ne viene segnalata soltanto una, che si riferisce alle superficie pseudosferiche e permette di estendere la mia costruzione (*trasformazione complementare*), per dedurre nuove superficie pseudosferiche da una iniziale nota, anche agli spazî curvi qui considerati. Però è da osservarsi che tale costruzione, sempre reale nello spazio di Riemann, si conserva tale anche in quello di Lobatschewsky solo quando il valore assoluto della curvatura dello spazio è inferiore a quello della curvatura della superficie. Le infinite trasformate complementari di una medesima superficie pseudosferica hanno per curve traiettorie ortogonali dei circoli eguali, tracciati nei piani tangenti della superficie iniziale, col centro nel punto di contatto; esse fanno parte di un sistema triplo di superficie ortogonali, come nello spazio euclideo (§ III).

(¹) Le frequenti citazioni di questo lavoro saranno segnate con M. A.

(²) Crelle's Journal Bd. 59, S^{e} 382.

Dopo le considerazioni geometriche di questo paragrafo, che dimostrano l'esistenza di sistemi ciclici di Ribancour nei nuovi spazî, tratto il problema generale dei sistemi tripli ortogonali di Weingarten, attenendomi specialmente al caso, in cui le superficie Σ di un sistema siano a curvatura costante negativa (§ IV). Qui si palesa nuovamente la influenza della curvatura dello spazio. Se questa è positiva, oppure, essendo negativa, non supera in valore assoluto la curvatura delle superficie Σ, le formole rimangono le stesse come se la curvatura dello spazio fosse nulla, sicchè ad ogni sistema di Weingarten nello spazio euclideo ne corrisponde uno nello spazio di Riemann o di Lobatschewsky. Ai sistemi di Weingarten in questi spazî rimangono perciò applicabili la trasformazione complementare e quella di Bäcklund (§§ 8-9. M. A).

Ma se la curvatura dello spazio di Lobatschewsky supera in valore assoluto quella delle superficie Σ, cambia la forma dell'elemento lineare dello spazio, riferito ai corrispondenti sistemi di Weingarten, la cui esistenza dipende da quella degli integrali del sistema di equazioni a derivate parziali (B) n. 15 § V. Seguendo una via analitica, analoga a quella che conduce alla trasformazione complementare e di Bäcklund pel sistema (A) n. 11, si riesce a stabilire l'esistenza di infinite soluzioni del sistema (B), formando delle successive equazioni ai differenziali totali del tipo di Riccati, la cui integrazione fa conoscere sempre nuove soluzioni.

In particolare esistono anche qui dei sistemi ciclici (n. 17), ma i circoli ortogonali alle superficie Σ sono circoli a centro ideale.

Nel successivo paragrafo VI tratto rapidamente il caso in cui la curvatura delle superficie Σ, pure essendo costante per ciascuna di esse, individualmente considerata, varia con continuità dall'una all'altra.

L'ultimo paragrafo è dedicato alle caratteristiche dei sistemi di Weingarten. Prendendo per equazioni tipiche a derivate parziali del problema il sistema (A) n. 11, vi dimostro come si possa sviluppare in serie la funzione cercata e soddisfare così *formalmente* alle equazioni stesse, restando ogni coefficiente della serie funzione di due variabili e contenendo tre costanti arbitrarie. Imponendo allora alla funzione cercata di soddisfare a quelle condizioni ai limiti, che sono espresse nel teorema sulle caratteristiche del n. 11 M. A, si vede che la serie risultante è unica e determinata. Così, per la parte che riguarda la unicità del sistema di Weingarten, sotto le richieste condizioni ai limiti, viene colmata quella lacuna, che già avvertii nella prefazione alla Memoria degli Annali.

§ I.

Linee e raggi principali di curvatura di una superficie.

1. Se la forma differenziale quadratica a tre variabili

$$(1)\qquad ds^2 = H_1^2\, du^2 + H_2^2\, dv^2 + H_3^2\, dw^2$$

deve definire l'elemento lineare di uno spazio a curvatura costante K, le funzioni H_1, H_2, H_3 delle coordinate correnti u, v, w di un punto debbono soddisfare alle sei equazioni:

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial v}\right)+\frac{1}{H_3^2}\frac{\partial H_1}{\partial w}\frac{\partial H_2}{\partial w}+KH_1H_2=0\,,\\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial w}\right)+\frac{1}{H_1^2}\frac{\partial H_2}{\partial u}\frac{\partial H_3}{\partial u}+KH_2H_3=0\,,\\
&\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial w}\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\;}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial u}\right)+\frac{1}{H_2^2}\frac{\partial H_3}{\partial v}\frac{\partial H_1}{\partial v}+KH_3H_1=0\,,
\end{aligned}\right.$$

$$(2')\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 H_1}{\partial v\,\partial w}=\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial v}\frac{\partial H_2}{\partial w}+\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial w}\frac{\partial H_3}{\partial v}\,,\\
&\frac{\partial^2 H_2}{\partial w\,\partial u}=\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial w}\frac{\partial H_3}{\partial u}+\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial u}\frac{\partial H_1}{\partial w}\,,\\
&\frac{\partial^2 H_3}{\partial u\,\partial v}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial u}\frac{\partial H_1}{\partial v}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial v}\frac{\partial H_2}{\partial u}\,.
\end{aligned}\right.$$

Inversamente, se ciò accade, lo spazio cui appartiene l'elemento lineare (1) ha la curvatura costante K, e la forma differenziale (1) è trasformabile in qualunque altra, cui competa il medesimo valore K della curvatura (¹).

Per le ricerche che abbiamo in vista, ci converrà prendere come forme *normali*, a cui è riducibile la forma differenziale (1) (quando le (2), (2′) siano soddisfatte) le seguenti:

1° Se K è positivo, poniamo $K = +\frac{1}{a^2}$, la forma normale sarà

$$(3)\qquad ds^2 = \frac{dx^2+dy^2+dz^2}{\left\{x^2+y^2+z^2+\frac{1}{4a^2}\right\}^2}\,.$$

2° Se K è negativo, poniamo $K = -\frac{1}{a^2}$, assumeremo per forma normale

$$(4)\qquad ds^2 = \frac{a^2}{z^2}\left(dx^2+dy^2+dz^2\right).$$

Ove si riguardino x, y, z come coordinate cartesiane ortogonali di un punto mobile nello spazio euclideo, colle formole (3), (4) viene stabilita una rappresentazione

(¹) Veggasi: Lipschitz-Crelle's Journal Bd. 72, S^e 52 e per le formole (2) (2′); Souvorof, Bulletin des sciences mathématiques, t^e IV^ème, p. 192.

conforme dello spazio a curvatura costante $K = \pm \frac{1}{a^2}$ sullo spazio piano (¹). In questa rappresentazione ad ogni circolo (o retta) dell'uno spazio corrisponde un circolo o una retta nell'altro, come pure ad ogni sfera (o piano) dell'uno una sfera o un piano nell'altro.

In particolare se ci fermiamo al 2° caso $\left(K = -\frac{1}{a^2}\right)$, tutti i punti dello spazio di Lobatschewsky vengono rappresentati da punti dello spazio euclideo, la cui ordinata z conserva sempre il medesimo segno, p. e. il positivo, mentre i punti del piano $\overline{xy}$ rappresentano punti all' infinito dello spazio curvo. Ogni retta (geodetica) di quest'ultimo spazio ha per immagine un circolo ortogonale al piano limite $z = 0$ e inversamente (²).

2. Consideriamo una superficie qualunque S, immersa nello spazio di Riemann o di Lobatschewsky, e tiriamo le rette (geodetiche) normali alla S. Esiste una serie ∞^1 di superficie ortogonali a tutte queste rette (superficie parallele alla S), alla quale possono associarsi altre due serie ∞^1 di superficie, che formano colla prima un sistema triplo ortogonale. Questa proposizione, che segue dalla esistenza delle linee di curvatura della S (³), può anche dimostrarsi direttamente ricorrendo alla rappresentazione conforme del n. 1.

Consideriamo infatti una superficie S_1, parallela alla S, ottenuta staccando sopra le normali di S dei segmenti eguali. Se tracciamo una linea arbitraria L sopra S, le normali a questa superficie lungo L generano una superficie rigata σ, che taglia la S_1 lungo una linea L_1. Essendo la L traiettoria ortogonale delle generatrici di σ, la L_1, come luogo degli estremi di segmenti eguali contati sulle generatrici a partire da L, è una seconda traiettoria ortogonale; la S_1 taglia dunque ad angolo retto tutte le normali di S. Ciò posto, se della nostra figura nello spazio curvo facciamo la rappresentazione conforme del n. 1 sullo spazio euclideo, alla superficie S ed alle sue parallele corrisponderà una serie di superficie Σ, alle rette, normali alla S ed alle superficie parallele, corrisponderà un sistema ∞^2 di circoli ortogonali alle superficie Σ. Per un teorema di Ribancour, dimostrato al § 7 della mia Nota II *Sui sistemi ciclici* (⁴), la serie Σ farà parte di un sistema triplo di superficie ortogonali; a questo sistema triplo ortogonale corrisponderà nello spazio obiettivo (la rappresentazione essendo conforme) un sistema triplo ortogonale, di cui faranno parte la superficie S e le sue parallele c. d. d.

3. Ciò premesso, cerchiamo l'effettiva espressione dell'elemento lineare dello spazio curvo (⁵), quando una serie di superficie del sistema triplo ortogonale sia formata

(¹) Per un noto teorema di Liouville, ove si prescinda dalle inversioni per raggi vettori reciproci, questa è l'unica rappresentazione conforme dello spazio a curvatura costante sullo spazio euclideo.

(²) Veggasi p. e. Poincarè, *Sur les groupes kleinéens*. Acta Math. V^e 4, p. 56.

(³) Cf. Killing, *Die nicht-euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung* § 11.

(⁴) Giornale di matematiche di Napoli. Vol. XXII.

(⁵) Qui ed in seguito per spazio *curvo* intenderemo esclusivamente uno spazio di curvatura costante.

dalle superficie parallele ad una iniziale S. Supponiamo che l'elemento lineare dello spazio riferito al sistema triplo ortogonale, sia dato dalla (1) e le superficie $w = \text{cost}$ siano le parallele alla S. Dovendo le linee (w) [1], ortogonali alle superficie $w = \text{cost}$, essere geodetiche dello spazio, si dovrà avere

$$\frac{\partial H_3}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial H_3}{\partial v} = 0,$$

cioè H_3 dovrà essere funzione della sola w. Ma se di più per parametro w prendiamo l'arco delle geodetiche (w), contato a partire dalla superficie iniziale S (la cui equazione sarà $w=0$), risulterà

$$H_3 = 1 .$$

Ora se supponiamo dapprima $K = +\frac{1}{a^2}$ la 2^a e 3^a delle (2) diventano

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 H_2}{\partial w^2} + \frac{H_2}{a^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 H_1}{\partial w^2} + \frac{H_1}{a^2} = 0 \end{aligned} \right.$$

e integrate danno

$$\begin{aligned} H_1 &= A \cos\left(\frac{w}{a}\right) + B \operatorname{sen}\left(\frac{w}{a}\right) \\ H_2 &= C \cos\left(\frac{w}{a}\right) + D \operatorname{sen}\left(\frac{w}{a}\right) \end{aligned}$$

dove A, B, C, D sono funzioni di u, v soltanto. Sostituendo questi valori di H_1, H_2, H_3 nelle (2′), esse danno fra queste funzioni le relazioni

$$(\alpha) \left\{ \begin{aligned} A \frac{\partial D}{\partial u} - B \frac{\partial C}{\partial u} = 0 \\ C \frac{\partial B}{\partial v} - D \frac{\partial A}{\partial v} = 0 . \end{aligned} \right.$$

Ora, se poniamo

$$\begin{aligned} A = \sqrt{E} \; , \quad B = -\frac{a}{r_2}\sqrt{E} \\ C = \sqrt{G} \; , \quad D = -\frac{a}{r_1}\sqrt{G} \; , \end{aligned}$$

dove E, G, r_1, r_2 saranno quattro nuove funzioni di u, v, il cui significato geometrico riconosceremo fra breve, le (α) divengono:

$$(5) \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} + \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial u} = 0 \\ \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} - \frac{\partial \frac{1}{r_2}}{\partial v} = 0 , \end{aligned} \right.$$

[1] Per linee (w) intendiamo quelle, lungo le quali varia w soltanto.

e la 1ª delle (2) darà l'ulteriore relazione

$$(6) \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)+\frac{\sqrt{EG}}{a^2}\left\{\frac{a^2}{r_1 r_2}+1\right\}=0\,.$$

Inversamente se E, G, r_1, r_2 sono quattro funzioni di u, v, che soddisfano le (5) (6), l'elemento lineare

$$(7) \quad ds^2=E\left\{\cos\left(\frac{w}{a}\right)-\frac{a}{r_2}\operatorname{sen}\left(\frac{w}{a}\right)\right\}^2du^2+G\left\{\cos\left(\frac{w}{a}\right)-\frac{a}{r_1}\operatorname{sen}\left(\frac{w}{a}\right)\right\}^2dv^2+dw^2$$

appartiene allo spazio di curvatura costante $K=+\frac{1}{a^2}$, poichè le (2) (2′) risultano soddisfatte. Facendo $w=0$ nella (7), si ha per l'elemento lineare della S

$$ds^2=E\,du^2+G\,dv^2,$$

donde risulta il significato geometrico di E, G.

Quando si avesse invece $K=-\frac{1}{a^2}$, basterebbe cangiare le funzioni circolari in iperboliche, e, rimanendo immutate le (5), le (6), (7) diverrebbero:

$$(6') \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)+\frac{\sqrt{EG}}{a^2}\left\{\frac{a^2}{r_1 r_2}-1\right\}=0$$

$$(7') \qquad ds^2=E\left\{\cosh\left(\frac{w}{a}\right)-\frac{a}{r_2}\operatorname{senh}\left(\frac{w}{a}\right)\right\}^2du^2+G\left\{\cosh\left(\frac{w}{a}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{a}{r_1}\operatorname{senh}\left(\frac{w}{a}\right)\right\}^2dv^2+dw^2\,.$$

4. Cerchiamo ora il significato geometrico di r_1, r_2. Per ciò consideriamo nel sistema triplo ortogonale, definito dalla (7), una superficie T della serie $u=\text{cost}^{\text{te}}$ o $v=\text{cost}^{\text{te}}$ p. e. della prima. La T è il luogo delle normali alla superficie S lungo una linea $u=\text{cost}^{\text{te}}$; il suo elemento lineare è dato, per la (7), da:

$$(\beta) \qquad ds^2=dw^2+G\left\{\cos\left(\frac{w}{a}\right)-\frac{a}{r_1}\operatorname{sen}\left(\frac{w}{a}\right)\right\}^2dv^2.$$

Ora per quel valore w_1 di w, pel quale si ha:

$$(\gamma) \qquad r_1=a\operatorname{tg}\left(\frac{w_1}{a}\right),$$

si annulla il coefficiente di dv^2 in (β), il che significa che ogni geodetica $v=\text{cost}^{\text{te}}$ della superficie T, cioè ogni normale della S lungo la linea considerata $u=\text{cost}^{\text{te}}$, è intersecata dalla successiva alla distanza w_1 dal piede della normale. Ogni linea $u=\text{cost}^{\text{te}}$ della superficie S gode adunque della proprietà caratteristica per una linea di curvatura di una superficie nello spazio piano; si dirà perciò anche in questo caso *linea di curvatura*. Similmente è linea di curvatura per la S ogni linea dell'altro sistema $v=\text{cost}^{\text{te}}$. La lunghezza w_1 si dirà *raggio principale di curvatura*, relativo alle linee $u=\text{cost}^{\text{te}}$ e così la lunghezza w_2, definita della relazione

$$(\gamma') \qquad r_2=a\operatorname{tg}\left(\frac{w_2}{a}\right),$$

sarà il raggio principale di curvatura per le linee $v=\text{cost}^{\text{te}}$.

Aggiungiamo che, per lo spazio di Riemann ora considerato, intenderemo i valori di w_1, w_2 presi in guisa che $\frac{w_1}{a}, \frac{w_2}{a}$ cadano fra i limiti $-\frac{\pi}{2}$ e $+\frac{\pi}{2}$. Siccome nello spazio di Riemann, di curvatura $=\frac{1}{a^2}$, la retta si chiude dopo un giro di $2\pi a$ e d'altra parte due rette, che s'incontrino in un punto, si tagliano nuovamente dopo un mezzo giro di lunghezza $=\pi a$, s'intende che, oltre i valori w_1, w_2, sono pure ammissibili gli altri

$$w_1 + \pi a\,, \qquad w_2 + \pi a\,,$$

come risulta altresì dalle formole (γ) (γ').

Ciò che si è detto per $K = +\frac{1}{a^2}$ vale egualmente per $K = -\frac{1}{a^2}$, ove si definiscano i valori di w_1, w_2 colle formole

$$r_1 = a \operatorname{tgh}\left(\frac{w_1}{a}\right) \qquad r_2 = a \operatorname{tgh}\left(\frac{w_2}{a}\right).$$

Questi valori di w_1, w_2 possono però in questo caso essere reali od immaginarî, ma, quando sono reali, sono sempre unici e determinati.

Gli estremi dei raggi principali di curvatura si diranno i *centri di curvatura* e la superficie, luogo di questi centri (composta di due falde), superficie evoluta della S.

Al limite per $a = \infty$, cioè per $K = 0$, r_1, r_2 vengono a coincidere con w_1, w_2 e le formole precedenti (5) (6) (7) si riducono a quelle ben note dello spazio euclideo. Nel caso generale diremo r_1, r_2 i *raggi ridotti* di curvatura. Come si vede, questi raggi ridotti sono sempre legati ai coefficienti E, G dell'elemento lineare della superficie, riferita alle sue linee di curvatura, dalle stesse formole (5), che valgono nel caso dello spazio piano.

Intendendo per curvatura *assoluta k* di una superficie, immersa nello spazio curvo, quella che compete al suo elemento lineare, calcolato nella determinazione metrica dello spazio in cui esiste, la (6) o (6′) si può scrivere

$$(7_a) \qquad \frac{1}{r_1 r_2} = k - K.$$

A scanso di equivoci, è bene dichiarare che, per misura della curvatura di una superficie nello spazio curvo, si prende da taluni la differenza $k - K$ (¹); ma qui sembra più conveniente d'indicarla, come faremo, col nome di *curvatura relativa.* Secondo che la curvatura relativa è positiva o negativa, i due centri di curvatura si trovano sulla normale dalla medesima parte o da parti opposte della superficie (²).

5. Consideriamo ora la 1ª falda S_1 della evoluta della superficie S. Il suo elemento lineare si otterrà dalla (7) o (7′), facendovi $w = w_1$ e sarà perciò

$$(8) \qquad ds^2 = E\,\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{w_1 - w_2}{a}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{w_2}{a}\right)}du^2 + dw_1^2, \text{ per } K = +\frac{1}{a^2}$$

(¹) Cf. Killing, l. c. § 11.

(²) Per lo spazio di Riemann tale distinzione ha senso soltanto, riferendosi alla convenzione superiore.

e

$$(8') \qquad ds^2 = \mathrm{E}\,\frac{\operatorname{senh}^2\left(\frac{w_1 - w_2}{a}\right)}{\operatorname{senh}^2\left(\frac{w_2}{a}\right)}\,du^2 + dw_1^2, \text{ per } \mathrm{K} = -\frac{1}{a^2}.$$

Se ne conclude che le linee $u = \mathrm{cost}^{te}$ sono, sulla prima falda dell'evoluta, linee geodetiche e le linee $w_1 = \mathrm{cost}^{te}$ le loro traiettorie ortogonali, come nello spazio euclideo.

Inversamente, se prendiamo una superficie qualunque S_1 e sovra di essa un sistema arbitrario ∞^1 di linee geodetiche g, le rette tangenti a queste geodetiche g saranno le normali di una serie di superficie Σ (parallele), per ciascuna delle quali la S_1 sarà una delle falde dell'evoluta.

Per dimostrarlo immaginiamo tracciate sulla S_1 le traiettorie ortogonali t delle geodetiche g. Se sulle tangenti alle g stacchiamo un segmento eguale all'arco della geodetica g, contato da una traiettoria ortogonale fissa t_0, il luogo degli estremi di questi segmenti sarà una superficie Σ, ortogonale a tutte queste tangenti. E infatti, sia M il punto di contatto di una qualunque di queste rette con una geodetica g ed M_1 l'estremo del segmento sopra Σ. Se M si sposta lungo una geodetica g, l'estremo M_1 descrive, sopra Σ, una curva g_1, evolvente di g e quindi ortogonale ai segmenti MM_1. Se M si sposta invece lungo una traiettoria ortogonale t, il segmento MM_1, sempre ortogonale alla t, rimane costante e perciò l'altro estremo M_1 descrive, sopra Σ, una curva t_1 ortogonale ai segmenti stessi. Ogni segmento MM_1 essendo perpendicolare in M_1 a due curve g_1, t_1, uscenti da M_1 sopra Σ, è quindi la normale in M_1 della superficie Σ c. d. d.

§ II.

Teorema di Weingarten sulle evolute.

6. Per mezzo delle formole (8), (8') calcoliamo, sulla 1^a falda S_1 della evoluta, la curvatura geodetica $\frac{1}{\varrho_g}$ delle linee $w_1 = \mathrm{cost}^{te}$. Per ciò rammentiamo che, secondo una formola di Bonnet, se

$$ds^2 = \mathrm{E}du^2 + 2\mathrm{F}du\,dv + \mathrm{G}dv^2$$

è l'elemento lineare di una superficie e

$$\varphi(u, v) = \mathrm{cost}^{te}$$

l'equazione di un sistema di linee, tracciato sovra di essa, la curvatura geodetica $\frac{1}{\varrho_g}$ di queste linee è data da:

$$(a) \qquad \frac{1}{\varrho_g} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\mathrm{G}\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \mathrm{F}\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{\mathrm{E}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 - 2\mathrm{F}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \mathrm{G}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2}}\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\mathrm{E}\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \mathrm{F}\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{\mathrm{E}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 - 2\mathrm{F}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \mathrm{G}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2}}\right]\right\}.$$

Ora, se scriviamo la (8) nel modo seguente

$$ds^2 = \left\{ E \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{w_1 - w_2}{a}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{w_2}{a}\right)} + \left(\frac{\partial w_1}{\partial u}\right)^2 \right\} du^2 + 2 \frac{\partial w_1}{\partial u} \frac{\partial w_1}{\partial v} du\, dv + \left(\frac{\partial w_1}{\partial v}\right)^2 dv^2,$$

ed osserviamo che, sostituendo nella 2^a delle (5) per r_1, r_2 i loro valori

$$a \operatorname{tg}\left(\frac{w_1}{a}\right) \qquad a \operatorname{tg}\left(\frac{w_2}{a}\right),$$

questa ci dà

$$\frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{w_1}{a}\right)}{a \operatorname{sen}\left(\frac{w_2}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{w_1 - w_2}{a}\right)} \cdot \frac{\partial w_2}{\partial v},$$

applicando la formola (a) di Bonnet, troveremo per la curvatura geodetica $\frac{1}{\varrho_g}$ delle $w_1 = \text{cost}^{\text{te}}$ sopra S_1 la formola:

$$\frac{1}{\varrho_g} = \frac{1}{a} \cot\left(\frac{w_1 - w_2}{a}\right) \quad \text{per} \quad K = +\frac{1}{a^2} \tag{9}$$

e con un calcolo perfettamente simile

$$\frac{1}{\varrho_g} = \frac{1}{a} \coth\left(\frac{w_1 - w_2}{a}\right) \quad \text{per} \quad K = -\frac{1}{a^2}. \tag{9'}$$

Le formole precedenti possono scriversi in altra guisa, prendendo nelle (8) (8') a variabili indipendenti u, w_1, cioè esprimendo v in funzione di u, w_1. Esse prendono allora la forma:

$$\frac{\partial}{\partial w_1} \log \left\{ \sqrt{E} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{w_1 - w_2}{a}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{w_2}{a}\right)} \right\} = \frac{1}{a} \cot\left(\frac{w_1 - w_2}{a}\right) \quad \text{per} \quad K = +\frac{1}{a^2}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial}{\partial w_1} \log \left\{ \sqrt{E} \frac{\operatorname{senh}\left(\frac{w_1 - w_2}{a}\right)}{\operatorname{senh}\left(\frac{w_2}{a}\right)} \right\} = \frac{1}{a} \coth\left(\frac{w_1 - w_2}{a}\right) \quad \text{per} \quad K = -\frac{1}{a^2}. \tag{10'}$$

7. Supponiamo ora che i raggi principali di curvatura w_1, w_2 della superficie evolvente S siano funzioni l'uno dell'altro. Escludendo il caso che uno di essi sia costante, sarà

$$w_2 = f(w_1)$$

e quindi per la (10) o (10'):

$$\frac{\partial \log}{\partial w_1} \left\{ \sqrt{E} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{w_1 - w_2}{a}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{w_2}{a}\right)} \right\} = F(w_1),$$

o

$$\frac{\partial \log}{\partial w_1} \left\{ \sqrt{E} \frac{\operatorname{senh}\left(\frac{w_1 - w_2}{a}\right)}{\operatorname{senh}\left(\frac{w_2}{a}\right)} \right\} = F(w_1),$$

dove $f(w_1)$, $F(w_1)$ indicano funzioni di w_1.

Ne segue che l'elemento lineare (8) o (8') della 1ª falda S_1 dell'evoluta è riducibile alla forma

$$ds^2 = dw_1^2 + \varphi^2 (w_1) du^2,$$

che appartiene ad una superficie di rotazione dello spazio piano. Ma per quanto ho dimostrato altrove ([1]), questa forma dell'elemento lineare compete altresì alle superficie di rotazione dello spazio a curvatura costante, sicchè possiamo enunciare per lo spazio curvo il teorema di Weingarten:

Ciascuna falda dell'evoluta di una superficie, i cui raggi di curvatura sono funzioni l'uno dell'altro, è applicabile sopra una superficie di rotazione.

Insieme a questo teorema sussiste pure il suo inverso:

Ogni superficie, applicabile sopra una superficie di rotazione, può considerarsi come una falda dell'evoluta di una superficie, i cui raggi principali di curvatura sono funzioni l'uno dell'altro.

Per dimostrarlo basta ricorrere alle considerazioni, fatte dal prof. Beltrami, pel caso dello spazio piano, nelle sue: *Ricerche di analisi applicata alla geometria* ([2]). Se S_1 è una superficie applicabile sopra una superficie di rotazione e le geodetiche g sono le trasformate dei meridiani, le tangenti alle linee g sono le normali di una serie di superficie parallele Σ (n. 5),

Una qualunque di queste superficie può considerarsi come evolvente e la S_1 come una falda dell'evoluta, p. e. rispetto al 1° raggio di curvatura w_1. Allora, in forza delle (8) (9), e perchè sopra ogni superficie di rotazione la curvatura geodetica dei paralleli è funzione dell'arco di meridiano, avremo

$$\cot\left(\frac{w_1 - w_2}{a}\right) = F(w_1)$$

$$\coth\left(\frac{w_1 - w_2}{a}\right) = F(w_1),$$

quindi anche $w_2 = f(w_1)$ c. d. d.

Come nello spazio euclideo, vi ha però un caso di eccezione all'ultimo teorema. Questo caso si presenta quando le geodetiche g, trasformate dei meridiani, sono linee rette, ma qui non sarà ulteriormente discusso.

8. Le numerose ed importanti conseguenze, che trae seco il teorema di Weingarten nello spazio euclideo, sussistono inalterate negli spazî di Riemann e Lobatschewsky. Qui ci limiteremo ad applicarlo alla trasformazione complementare delle superficie pseudo-sferiche (cf. § 8. M. A).

Per questo cominciamo dall'osservare che se di una superficie S dello spazio curvo è costante la differenza $w_1 - w_2$ dei due raggi principali di curvatura, poniamo

$$w_1 - w_2 = r,$$

in forze delle (8), (8'), (10), (10'), all'elemento lineare della 1ª falda S_1 della evoluta si potrà dare la forma:

$$ds^2 = dw_1^2 + e^{\frac{2w_1}{R}} du^2,$$

([1]) Vedi Rendiconti della R. Accademia 5 maggio 1878.

([2]) Giornale di matematiche di Napoli. Vol. III, 1865, p. 18 e sg.

dove si è posto

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{a}\cot\left(\frac{r}{a}\right)\quad \text{per}\quad K=+\frac{1}{a^2}$$

e

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{a}\coth\left(\frac{r}{a}\right)\quad \text{per}\quad K=-\frac{1}{a^2}\,.$$

La S_1 è quindi una superficie a curvatura costante negativa $k=-\frac{1}{R^2}$ e sopra di esse le linee $u=\text{cost}^{te}$ formano un sistema di geodetiche parallele. Lo stesso può ripetersi per la 2^a falda S_2, scambiando u con v e w_1 con w_2.

Supponiamo ora inversamente di prendere nello spazio curvo una superficie pseudosferica qualunque di curvatura $k=-\frac{1}{R^2}$ e consideriamo sopra di essa un sistema ∞^1 di linee geodetiche g parallele. La S_1 può considerarsi come una falda della evoluta di una superficie Σ (n. 7) le cui normali sono le tangenti delle geodetiche scelte sopra S e i cui raggi principali di curvatura sono legati dalla relazione, che si ottiene dalla (9) o (9′) facendovi $\frac{1}{\varrho_g}=\frac{1}{R}$. Questa relazione è adunque

$$\frac{1}{a}\cot\left(\frac{w_1-w_2}{a}\right)=\frac{1}{R},\quad \text{per}\quad K=+\frac{1}{a^2}$$

$$\frac{1}{a}\coth\left(\frac{w_1-w_2}{a}\right)=\frac{1}{R},\quad \text{per}\quad K=-\frac{1}{a^2}\,.$$

Ora, per quanto si è detto sopra, anche la 2^a falda S_2 dell'evoluta, che diremo la complementare di S_1, sarà una superficie pseudosferica colla curvatura $k=-\frac{1}{R^2}$. Tenendo conto delle osservazioni precedenti, siamo condotti a formulare questo risultato nel modo seguente:

Sia S *una superficie a curvatura costante negativa* $k=-\frac{1}{R^2}$, *immersa nello spazio di Riemann a curvatura* $K=+\frac{1}{a^2}$, *o in quello di Lobatschewsky a curvatura* $K=-\frac{1}{a^2}$. *Se sopra* S *tracciamo un sistema* ∞^1 *di geodetiche parallele e sulle tangenti a queste geodetiche stacchiamo, a partire dal punto di contatto e nel senso del parallelismo, un segmento di lunghezza costante* r; *data dalle formole*

(11) $$r=a\,\text{arc sen}\left(\frac{R}{\sqrt{R^2+a^2}}\right)\quad \text{per}\quad K=+\frac{1}{a^2}$$

(11′) $$r=a\,\text{sett senh}\left(\frac{R}{\sqrt{a^2-R^2}}\right)\quad \text{per}\quad K=-\frac{1}{a^2},$$

il luogo degli estremi dei segmenti sarà una nuova superficie colla medesima curvatura costante $k=-\frac{1}{R^2}$.

Come si vede, per lo spazio di Riemann la costruzione è sempre reale: per lo spazio di Lobatschewsky invece essa è reale soltanto (a causa della (11′)) quando

$a > R$, cioè quando la curvatura dello spazio è inferiore in valore assoluto a quella della superficie. In altre parole si può dire che la trasformazione complementare conserva, per le superficie pseudosferiche, un significato reale, finchè la loro curvatura *relativa* (n. 4) si mantiene negativa.

§ III.

Sistemi ciclici di Ribaucour.

9. Ogni superficie pseudosferica dello spazio di Riemann o di Lobatschewsky (in quest'ultimo caso colla limitazione sopra avvertita) ammette una serie ∞^1 di superficie pseudosferiche complementari. Andiamo ora a dimostrare che questa serie di superficie fa parte, come nello spazio euclideo, di un sistema triplo di superficie ortogonali (¹).

Per questo premettiamo l'osservazione generale seguente. Sia Σ una superficie evolvente e S_1, S_2 le due falde della evoluta. La normale in un punto M qualunque di Σ tocca la 1ª falda S_1 nel 1° centro di curvatura M_1 e la 2ª falda S_2 nel 2° centro M_2. Lo stesso ragionamento, che si fa nel caso dello spazio piano, prova che il piano tangente in M_1 alla S_1 è il piano della retta $M_1 M_2$ e della tangente in M alla 2ª linea di curvatura di Σ; similmente il piano di $M_1 M_2$ e della tangente in M alla 1ª linea di curvatura di Σ tocca in M_2 la S_2. Questi due piani si tagliano dunque ortogonalmente lungo la retta $M_1 M_2$.

Ora sia S_1 una superficie pseudosferica e S_2 una sua complementare, sia M_1 un punto qualunque di S_1 e M_2 il corrispondente di S_2. Siccome S_1, S_2 formano insieme l'evoluta completa di una superficie Σ (n. 8), di cui M_1, M_2 sono due centri corrispondenti di curvatura, da quanto si è visto sopra segue che la normale in M_2 alla S_2 è diretta nel piano tangente in M_1 alla S_1 normalmente alla $M_1 M_2$. In altre parole il circolo tracciato nel piano tangente in M_1 alla S_1, col centro in M_1 e col raggio eguale a $M_1 M_2$ è normale in M_2 alla S_2. Possiamo quindi definire le ∞^1 trasformate complementari della superficie pseudosferica S_1 anche nel modo seguente:

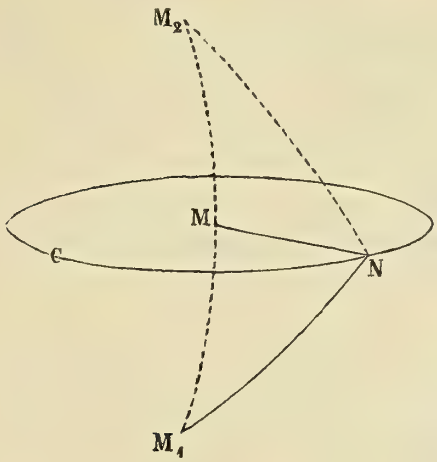
In ciascun piano tangente della superficie S_1 *tracciamo un circolo, col centro nel punto di contatto e col raggio costante* r *dato dalla* (11) *o* (11'). *Questo sistema* ∞^2 *di circoli ammette una serie* ∞^1 *di superficie* Σ *ortogonali, che sono le superficie pseudosferiche complementari della* S_1.

10. Indichiamo con Σ le ∞^1 superficie complementari di una superficie pseudosferica S, ortogonali ai circoli del n. precedente, con Σ_1, Σ_2 le superficie luogo dei detti circoli quando il loro centro si sposta lungo una linea di curvatura $u = \text{cost}^{\text{te}}$ di un sistema o lungo una linea $v = \text{cost}^{\text{te}}$ dell'altro sistema della superficie S.

Dimostreremo che le superficie Σ, Σ_1, Σ_2 costituiscono un sistema triplo ortogonale. Le superficie Σ_1, Σ_2 sono evidentemente ortogonali alle Σ, sicchè basta provare che esse sono ortogonali fra loro. Ora se consideriamo due superficie una del sistema Σ_1, l'altra del sistema Σ_2 esse si tagliano lungo un circolo C di raggio $= r$, tracciato in un piano tangente della superficie S, col centro nel punto M di contatto. Se M_1, M_2 sono i due centri di curvatura della S sulla normale in M ed N è un

(¹) Cf. la mia Nota 1ª sui sistemi ciclici. Giornale di Napoli, vol. XXI.

punto qualunque sul circolo C, come al n. 3 della Nota citata al n. 9, si dimostra che le normali in N alle Σ_1, Σ_2 sono rispettivamente le congiungenti geodetiche di N con M_1, M_2. Basta dunque provare che l'angolo $M_1 \hat{N} M_2$ è retto.



Se congiungiamo geodeticamente M con N, formeremo due triangoli geodetici NMM_1, NMM_2 rettangoli in M, pei quali, se per fissare le idee supponiamo $K = +\frac{1}{a^2}$, valgono le formole della trigonometria sferica sopra una sfera di raggio $= a$.

Ora abbiamo

$$(MM_1) = w_1 \quad (MM_2) = -w_2\,, \quad (MN) = r\,,$$

ove (MM_1), (MM_2), (MN) indicano le lunghezze assolute dei rispettivi segmenti e si è supposto w_1 positivo, w_2 negativo in armonia colla formola (7_a) n. 4 la quale ci dà:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{w_1}{a}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{w_2}{a}\right) = -\frac{R^2}{a^2 + R^2}\,.$$

Dai triangoli rettangoli suddetti, segue, per le formole della trigonometria sferica:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{w_1}{a}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{r}{a}\right) \cdot \operatorname{tg}(M_1 \hat{N} M)$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{w_2}{a}\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{r}{a}\right) \cdot \operatorname{tg}(M_2 \hat{N} M)$$

e moltiplicando queste fra loro, coll'osservare la formola superiore e la (11), si ha:

$$\operatorname{tg}(M_1 \hat{N} M) \quad \operatorname{tg}(M_2 \hat{N} M) = 1\,.$$

Gli angoli $M\hat{N}M$, $M_2\hat{N}M$ sono dunque complementari, cioè l'angolo $M_1 \hat{N} M_2$ è retto c. d. d.

La stessa dimostrazione vale pel caso di $K = -\frac{1}{a^2}$, ove si mutino le funzioni circolari dei lati in iperboliche.

§ IV.

Sistemi di Weingarten negli spazî di curvatura costante.

11. Proponiamoci ora il problema generale della ricerca di quei sistemi tripli di superficie ortogonali, situati nello spazio di curvatura costante, che contengono una serie di superficie Σ colla medesima curvatura costante k, la quale, per semplicità, sarà posta eguale a ± 1. Estenderemo anche a tali sistemi il nome di *sistemi di Weingarten.*

Come vedremo, le formole relative a questi sistemi sono essenzialmente differenti, secondo che la *curvatura relativa* k—K (n. 4) delle superficie Σ ha segno eguale od opposto alla curvatura assoluta. In questo paragrafo studieremo il caso che le due

curvature abbiano il medesimo segno, come accade appunto nello spazio euclideo, ove esse coincidono.

Supponiamo dapprima che la curvatura k delle superficie Σ sia $=-1$; allora, per l'ammessa ipotesi, la loro curvatura relativa

$$k-\mathrm{K}=-(1+\mathrm{K})$$

dovrà pur essere negativa, sicchè potremo porre

$$\mathrm{K}+1=\frac{1}{\mathrm{R}^2},$$

dove R è una costante reale. Secondo che lo spazio sarà a curvatura positiva o negativa sarà $\mathrm{R}>1$ o $\mathrm{R}<1$ e per lo spazio euclideo $\mathrm{R}=1$.

Se

$$ds^2=\mathrm{H}_1^2\,du^2+\mathrm{H}_2^2\,dv^2+\mathrm{H}_3^2\,dw^2$$

rappresenta l'elemento lineare dello spazio, riferito al sistema triplo ortogonale supposto, e le superficie $w=\mathrm{cost}^{\mathrm{te}}$ sono le superficie pseudosferiche Σ, dovremo avere:

$$k=-1=-\frac{1}{\mathrm{H}_1\mathrm{H}_2}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\mathrm{H}_1}\frac{\partial \mathrm{H}_2}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\mathrm{H}_2}\frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial v}\right)\right\}.$$

Dalla 1ª delle (2) segue quindi

$$\frac{1}{\mathrm{H}_3\mathrm{H}_1}\frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial w}\cdot\frac{1}{\mathrm{H}_3\mathrm{H}_2}\frac{\partial \mathrm{H}_2}{\partial w}=-(1+\mathrm{K})=-\frac{1}{\mathrm{R}^2},$$

per cui potremo porre

$$\frac{1}{\mathrm{H}_1\mathrm{H}_3}\frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial w}=-\frac{1}{\mathrm{R}}\operatorname{tg}\theta,\quad \frac{1}{\mathrm{H}_2\mathrm{H}_3}\frac{\partial \mathrm{H}_2}{\partial w}=\frac{1}{\mathrm{R}}\cot\theta,$$

essendo θ un angolo ausiliario.

Sostituendo nelle due prime formole (2') e lasciando da parte il caso che le superficie Σ siano di rotazione, se ne concluderà, come al n. 3 § 2 M. A, che si può porre

$$\mathrm{H}_1=\cos\theta,\quad \mathrm{H}_2=\operatorname{sen}\theta,\quad \mathrm{H}_3=\mathrm{R}\frac{\partial\theta}{\partial w},$$

dove la funzione $\theta(u,v,w)$ dovrà soddisfare le equazioni:

$$(\mathrm{A})\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}-\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}=\operatorname{sen}\theta\cos\theta\\
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right)-\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\frac{\partial\theta}{\partial v}-\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial w}=0\\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right)+\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\frac{\partial\theta}{\partial u}-\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\theta}{\partial w}=0\\
&\frac{\partial^3\theta}{\partial u\,\partial v\,\partial w}+\operatorname{tg}\theta\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\frac{\partial\theta}{\partial v}-\cot\theta\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\frac{\partial\theta}{\partial u}=0,
\end{aligned}\right.$$

delle quali la 3ª è una conseguenza delle due prime. Queste sono le equazioni stesse che abbiamo trovato al n. 4 M. A nel caso dello spazio euclideo.

Inversamente se θ soddisfa le (A); l'elemento lineare

$$(12)\qquad ds^2=\cos^2\theta\,du^2+\operatorname{sen}^2\theta\,dv^2+\mathrm{R}^2\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2dw^2$$

appartiene allo spazio di curvatura costante $\mathrm{K}=\frac{1}{\mathrm{R}^2}-1$ e le superficie $w=\mathrm{cost}^{\mathrm{te}}$ del sistema triplo saranno superficie pseudosferiche di raggio $=1$. Così adunque ad

ogni sistema di Weingarten nello spazio euclideo, che dà all'elemento lineare di questo spazio la forma

$$(13) \qquad ds^2 = \cos^2\theta\, du^2 + \text{sen}^2\theta\, dv^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2 dw^2,$$

ne corrisponde uno nello spazio di Riemann o di Lobatschewsky, pel quale l'elemento lineare dello spazio curvo assume la forma (12).

Tutto ciò che si è detto relativamente alla trasformazione complementare e a quella di Bächlund nei §§ 8, 9 M. A. vale quindi egualmente per questi sistemi di Weingarten nello spazio curvo. Se consideriamo ora il caso di $k = +1$ e supponiamo quindi

$$k - \text{K} = 1 - \text{K} = \frac{1}{\text{R}^2} > 0,$$

vedremo, come sopra, che all'elemento lineare dello spazio curvo si può dare la forma:

$$ds^2 = \cos\text{h}^2\theta\, du^2 = \text{sen}\,\text{h}^2\theta\, dv^2 + \text{R}^2\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2 dw^2$$

secondo θ una soluzione delle equazioni simultanee a derivate parziali (II) (II_a) n. 4 M. A., sicchè anche qui ogni sistema di Weingarten nello spazio euclideo ne dà uno nello spazio curvo ed inversamente.

12. In ciò che segue ci riferiremo unicamente a quei sistemi di Weingarten, in cui le superficie Σ sono pseudosferiche, o come diremo, ai sistemi *pseudosferici* di Weingarten.

Fissata la corrispondenza fra questi sistemi nelle spazio euclideo e nello spazio curvo, nel modo che sopra si è detto, possiamo pervenire per altra via ai risultati del § precedente, dimostrando che: *Ad ogni sistema ciclico di Weingarten* (*Ribaucour*) *nello spazio euclideo ne corrisponde uno ciclico nello spazio curvo.*

Alla dimostrazione di questo teorema premettiamo le osservazioni seguenti. Ogni curva dello spazio di Riemann o di Lobatschewsky ha in ogni punto un circolo osculatore e la sua 1ª curvatura o *flessione* si misura dalla curvatura di questo circolo, ossia dalla sua curvatura geodetica sul piano che lo contiene. Se siamo nello spazio di Riemann a curvatura $\text{K} = +\frac{1}{a^2}$ e se r è il raggio del circolo la sua curvatura è data da

$$\frac{1}{a}\cot\frac{r}{a}\cdot$$

Nello spazio di Lobatschewsky si distinguono tre specie di circoli e cioè:

1° quelli col centro reale, che hanno per curvatura $\frac{1}{a}\cot\text{h}\,\frac{r}{a} > \frac{1}{a}$, se r è il loro raggio;

2° gli oricicli (col centro all'infinito), la cui curvatura è $= \frac{1}{a}$;

3° i circoli a centro ideale, che sono geodeticamente paralleli ad una linea geodetica dello spazio; se distano da questa geodetica di δ, la loro curvatura è data da

$$\frac{1}{a}\,\text{tg}\,\text{h}\,\frac{\delta}{a} > \frac{1}{a}\cdot$$

Supponiamo ora di avere una curva C tracciata sopra una superficie S dello

spazio curvo; per ogni punto di essa, oltre la curvatura assoluta $\frac{1}{\varrho}$ sopra definita, vi è luogo di considerare la sua curvatura *geodetica* $\frac{1}{\varrho_g}$ relativamente alla superficie S, su cui è tracciata. Le considerazioni stesse, che servono nel caso dello spazio piano [1], provano anche qui che fra l'una e l'altra curvatura passa la relazione espressa dalla formola

$$\frac{1}{\varrho_g} = \frac{\cos \varepsilon}{\varrho},$$

dove ε indica l'angolo, che il piano osculatore della curva C forma col piano tangente alla superficie S, ossia il complemento dell'angolo della normale principale della C colla normale della superficie.

13. Ciò premesso, supponiamo che il sistema di Weingarten, definito dalla espressione

$$ds^2 = \cos^2 \theta du^2 + \operatorname{sen}^2 \theta dv^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial w}\right)^2 dw^2$$

dell'elemento lineare dello spazio piano, sia ciclico e quindi (M. A. n. 13) l'angolo θ sia legato ad un angolo ω, funzione di u, v soltanto, dalle formole di Darboux:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{\partial \omega}{\partial v} &= - \operatorname{sen} \theta \cos \omega \\ \frac{\partial \theta}{\partial v} + \frac{\partial \omega}{du} &= \quad \cos \theta \operatorname{sen} \omega , \end{aligned}\right.$$

dalle quali seguono le altre

$$(6) \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial w} &= - \cos \theta \cos \omega \frac{\partial \theta}{\partial w} \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \, \partial w} &= - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \omega \frac{\partial \theta}{\partial w} . \end{aligned}\right.$$

Per la ricerca della specie del corrispondente sistema di Weingarten, definito nello spazio curvo della espressione

$$(c) \qquad ds^2 = \cos^2 \theta du^2 + \operatorname{sen}^2 \theta dv^2 + \mathrm{R}^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial w}\right)^2 dw^2$$

dell'elemento lineare, osserviamo che quest'ultima forma differenziale è trasformabile nella (3) o nella (4), secondo che $\mathrm{R} > 1$ o $\mathrm{R} < 1$. Ponendo quindi nel 1° caso

$$\lambda = x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{4a^2}$$

e nel 2°

$$\lambda = \frac{z}{a},$$

l'elemento lineare

$$(d) \qquad ds^2 = \lambda^2 \left\{ \cos^2\theta du^2 + \operatorname{sen}^2\theta dv^2 + \mathrm{R}^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial w}\right)^2 dw^2 \right\}$$

appartiene allo spazio piano. Con questa formola viene definito nello spazio euclideo un sistema triplo ortogonale, che corrisponde al sistema di Weingarten (c) dello spazio curvo nella rappresentazione conforme del n. 1. E se dimostriamo che le linee (w)

[1] Veggasi p. e. Bertrand, *Calcul différentiel*, n. 715-716.

nel sistema (d) sono circoli, per le proprietà della rappresentazione enunciate al n. 1, saranno pur circoli le linee (w) nel sistema (c).

Ora la funzione λ di u, v, w in (d) deve esser tale che per l'elemento lineare stesso siano verificate le condizioni di Lamè (cioè le (2) (2') per $K = 0$); in particolare dovremo avere

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial u\, dv} = \dfrac{2}{\lambda}\dfrac{\partial \lambda}{\partial u}\dfrac{\partial \lambda}{\partial v} - \operatorname{tg}\theta \dfrac{\partial \theta}{\partial v}\dfrac{\partial \lambda}{\partial u} + \cot\theta \dfrac{\partial \theta}{\partial u}\dfrac{\partial \lambda}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial u\, \partial w} = \dfrac{2}{\lambda}\dfrac{\partial \lambda}{\partial u}\dfrac{\partial \lambda}{\partial w} - \operatorname{tg}\theta \dfrac{\partial \theta}{\partial w}\dfrac{\partial \lambda}{\partial u} + \dfrac{\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial w}}{\dfrac{\partial \theta}{\partial w}} \cdot \dfrac{\partial \lambda}{\partial w} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial v\, \partial w} = \dfrac{2}{\lambda}\dfrac{\partial \lambda}{\partial v}\dfrac{\partial \lambda}{\partial w} + \cot\theta \dfrac{\partial \theta}{\partial w}\dfrac{\partial \lambda}{\partial v} + \dfrac{\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial v\, \partial w}}{\dfrac{\partial \theta}{\partial w}} \cdot \dfrac{\partial \lambda}{\partial w} \cdot \end{cases}$$

Ritenendo per il sistema triplo ortogonale (d) le notazioni del n. 2 § 1 M. A, abbiamo

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r_{13}} = \dfrac{1}{\lambda^2 \cos\theta}\dfrac{\partial \lambda}{\partial u} + \dfrac{1}{\lambda\cos\theta}\dfrac{\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial w}}{\dfrac{\partial \theta}{\partial w}} \\[2ex] \dfrac{1}{r_{23}} = \dfrac{1}{\lambda^2 \operatorname{sen}\theta}\dfrac{\partial \lambda}{\partial v} + \dfrac{1}{\lambda \operatorname{sen}\theta}\dfrac{\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial v\, \partial w}}{\dfrac{\partial \theta}{\partial w}} \end{cases}$$

e quindi per le (14)

$$(e)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \dfrac{1}{r_{13}}}{\partial w} = \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial}{\partial w}\dfrac{\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial w}}{\cos\theta \dfrac{\partial \theta}{\partial w}} \\[2ex] \dfrac{\partial \dfrac{1}{r_{23}}}{\partial w} = \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial}{\partial w}\dfrac{\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial v\, \partial w}}{\operatorname{sen}\theta \dfrac{\partial \theta}{\partial w}} \cdot \end{cases}$$

Ma nel caso nostro, per le (b), le espressioni:

$$\frac{\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial w}}{\cos\theta \dfrac{\partial \theta}{\partial w}} = -\cos\omega\,, \qquad \frac{\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial v\, \partial w}}{\operatorname{sen}\theta \dfrac{\partial \theta}{\partial w}} = -\operatorname{sen}\omega$$

sono indipendenti da w e però

$$\frac{\partial \dfrac{1}{r_{13}}}{\partial w} = 0\,, \qquad \frac{\partial \dfrac{1}{r_{23}}}{\partial w} = 0\,.$$

Le formole (M. A. n. 2)

$$\frac{1}{T_3}=\frac{1}{H_3}\frac{\partial}{\partial w}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{r_{23}}{r_{13}}\right)\right]=0$$

$$\frac{1}{\varrho_3^2}=\frac{1}{r_{13}^2}+\frac{1}{r_{23}^2}$$

insegnano quindi che le linee (w) del sistema (d) sono a torsione nulla e a flessione costante, cioè sono circoli c. d. d.

Si osserverà altresì che le formole (e) dimostrano inversamente che se il sistema di Weingarten nello spazio curvo è ciclico, dovrà pure essere ciclico il sistema corrispondente nello spazio euclideo.

14. Resta a dimostrarsi che i sistemi ciclici di Weingarten dello spazio curvo, definiti dalla (c), coincidono coi sistemi già considerati al § III. Indichiamo perciò con $\frac{1}{\varrho}$ la curvatura assoluta delle linee (w) nel sistema (c), con $\frac{1}{\varrho_u}, \frac{1}{\varrho_v}$ la loro curvatura geodetica sulle rispettive superficie $u=\text{cost}^{\text{te}}$, $v=\text{cost}^{\text{te}}$ e infine con ε l'angolo, che la normale principale delle linee (w) fa colle linee (u). Per le osservazioni del n. 12 avremo

$$\frac{1}{\varrho_u}=\frac{\operatorname{sen}\varepsilon}{\varrho}\,,\quad \frac{1}{\varrho_v}=\frac{\cos\varepsilon}{\varrho}\,;$$

ma i valori di $\frac{1}{\varrho_u}, \frac{1}{\varrho_v}$ sono

$$\frac{1}{\varrho_u}=-\frac{\dfrac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}}{\operatorname{sen}\theta\dfrac{\partial\theta}{\partial w}}=\operatorname{sen}\omega\,,\quad \frac{1}{\varrho_v}=-\frac{\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}}{\cos\theta\dfrac{\partial\theta}{\partial w}}=\cos\omega\,,$$

e, confrontando colle precedenti, risulta quindi

$$\frac{1}{\varrho}=1 \qquad \varepsilon=\omega\,.$$

La prima formola ci dice che i circoli (w) hanno la curvatura $=1$. Se siamo quindi nello spazio di Riemann, ove $K=+\frac{1}{a^2}$, il raggio r di questi circoli è dato (n. 12) dalla formola

$$\frac{1}{a}\cot\frac{r}{a}=1\,,$$

che coincide colla (11) n. 8, quando in quest'ultima si faccia $R=1$. Per lo spazio di Lobatschewsky, ove $K=-\frac{1}{a^2}$, e per ipotesi $a>1$, i circoli (w) sono necessariamente (n. 12) a centro *reale* e il loro raggio r viene fornito dalla relazione

$$\frac{1}{a}\coth\frac{r}{a}=1\,,$$

che combina appunto colla (11') n. 8 per $R=1$.

L'altra formola $\varepsilon = \omega$ insegna che la normale principale dei circoli (w) forma sulle superficie pseudosferiche $w = \text{cost}^{\text{te}}$ l'angolo ω colle linee $v = \text{cost}^{\text{te}}$. Ma quest'angolo ω, nelle formole di Darboux, è appunto l'angolo d'inclinazione di un sistema di geodetiche parallele delle $w = \text{cost}^{\text{te}}$ sulle linee $v = \text{cost}^{\text{te}}$ (M. A. n. 19); ne risulta che la superficie luogo dei centri di questi circoli è superficie complementare delle infinite superficie $w = \text{cost}^{\text{te}}$ e quindi (n. 9) il piano di ciascuno di questi circoli tocca nel centro la superficie anzidetta. Questi sistemi ciclici di Weingarten coincidono adunque coi sistemi di Ribaucour, considerati al § III.

Osservazione. Come nello spazio euclideo, così anche nello spazio curvo, oltre al *gruppo* formato dai sistemi ciclici, esiste un gruppo più generale, formato dai sistemi di Weingarten a flessione costante, pei quali le linee (w), senza essere piane, hanno la flessione costante $= 1$. Le considerazioni superiori dimostrano infatti facilmente che:

Ad ogni sistema di Weingarten a flessione costante nello spazio euclideo corrisponde un sistema di Weingarten a flessione costante nello spazio curvo.

§ V.

Caso in cui la curvatura assoluta e la curvatura relativa delle superficie Σ hanno segno opposto.

15. Riprendiamo la discussione del n. 11, volgendoci ora al caso in cui la curvatura assoluta k e la curvatura relativa $k - K$ delle superficie Σ hanno segno opposto.

Supponendo dapprima $k = -1$ e quindi $K + 1 < 0$, poniamo

$$K + 1 = -\frac{1}{R^2};$$

lo spazio avrà la curvatura costante negativa $-\frac{1}{a^2}$, ove

$$\frac{1}{a^2} = \frac{1}{R^2} + 1.$$

Se

$$ds^2 = H_1^2\, du^2 + H_2^2\, dv^2 + H_3^2\, dw^2$$

è l'espressione dell'elemento lineare dello spazio, riferito al sistema triplo ortogonale supposto, esprimendo che la curvatura k delle superficie $w = \text{cost}^{\text{te}}$ è $= -1$, troviamo dalla 1^{a} delle (2)

$$\frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial w} \cdot \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial w} = \frac{1}{R^2}.$$

Indicando quindi con θ una conveniente funzione ausiliaria, possiamo porre

$$\frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial w} = \frac{\operatorname{tgh} \theta}{R}, \quad \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial w} = \frac{\coth \theta}{R}.$$

Facendo uso delle (2) (2') come al n. 11, troveremo che all'elemento lineare dello spazio si può dare la forma:

$$(15) \qquad ds^2 = \cosh^2 \theta\, du^2 + \operatorname{senh}^2 \theta\, dv^2 + R^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial w}\right)^2 dw^2,$$

dove θ è una funzione di u, v, w che deve soddisfare al sistema di equazioni a derivate parziali:

$$(\mathrm{B})\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}=\operatorname{senh}\theta\cosh\theta\\ &\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right)+\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\frac{\partial\theta}{\partial v}=\cosh\theta\frac{\partial\theta}{\partial w}\\ &\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right)+\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\frac{\partial\theta}{\partial u}=\operatorname{senh}\theta\frac{\partial\theta}{\partial w}\\ &\frac{\partial^3\theta}{\partial u\,\partial v\,\partial w}=\operatorname{tgh}\theta\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}+\coth\theta\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w},\end{aligned}\right.$$

delle quali però la 3° è conseguenza delle prime due.

Inversamente se $\theta\ (u, v, w)$ è una soluzione delle (B), l'elemento lineare (15) appartiene allo spazio di curvatura costante $\mathrm{K}=-\left(1+\frac{1}{\mathrm{R}^2}\right)$ e le superficie $w=\mathrm{cost}^{\mathrm{te}}$ del sistema sono pseudosferiche di raggio $=1$.

Passiamo ora al caso di $k=+1$, supponendo che sia

$$k-\mathrm{K}<0.$$

Se poniamo

$$k-\mathrm{K}=1-\mathrm{K}=-\frac{1}{\mathrm{R}^2},$$

troveremo che all'elemento lineare dello spazio si può dare la forma:

$$(15)\qquad ds^2=\cos^2\theta\,du^2+\operatorname{sen}^2\theta\,dv^2+\mathrm{R}^2\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2\partial w^2,$$

dove la funzione 0 soddisfa alle seguenti equazioni a derivate parziali:

$$(\mathrm{C})\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\theta^2}{\partial u^2}-\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}+\operatorname{sen}\theta\cos\theta=0\\ &\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right)-\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}+\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial w}=0\\ &\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right)+\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}+\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\theta}{\partial w}=0\\ &\frac{\partial^3\theta}{\partial u\,\partial v\,\partial w}=\cot\theta\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}-\operatorname{tg}\theta\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\end{aligned}\right.$$

e inversamente ad ogni soluzione θ delle (C) corrisponde un sistema di Weingarten (15′) nello spazio di Riemann a curvatura $\mathrm{K}=1+\frac{1}{\mathrm{R}^2}$.

Come al n. 5 M. A si dimostrerà, per mezzo delle (B), (C), che sopra le superficie a curvatura costante $w=\mathrm{cost}^{\mathrm{te}}$ dei sistemi (15) o (15′) le linee $\frac{\partial\theta}{\partial w}=\mathrm{cost}^{\mathrm{te}}$ costituiscono un sistema di circoli geodetici paralleli. Queste linee, lungo le quali è costante la distanza normale infinitesima di una superficie $w=\mathrm{cost}^{\mathrm{te}}$ dalla successiva, possono opportunamente chiamarsi *linee di livello.*

Indicando con $\frac{1}{r}$ la loro curvatura geodetica, troveremo per i sistemi pseudosferici (15), tenendo conto delle (B) ed applicando la formola (a) n. 6:

$$(16)\qquad \frac{1}{r^2}=\frac{\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2}{\frac{1}{\cosh^2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right)^2+\frac{1}{\operatorname{senh}^2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right)^2}\,.$$

Ne segue che le linee di livello sulle superficie pseudosferiche $w=\text{cost}^{\text{te}}$ saranno circoli a centro reale, circoli a centro ideale, oppure oricicli secondo che l'espressione

$$(16')\qquad \frac{1}{\cosh^2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right)^2+\frac{1}{\operatorname{senh}^2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right)^2-\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2$$

è negativa, positiva o nulla. È poi facile riscontrare, per mezzo delle (B), che l'espressione stessa (16′) è funzione di w soltanto.

16. Lasciando completamente da parte il caso che le superficie Σ ($w=\text{cost}^{\text{te}}$) abbiano la curvatura positiva, ci occuperemo qui soltanto dei sistemi pseudosferici (15), di cui dimostreremo rigorosamente l'esistenza e studieremo le proprietà.

L'analogia di costruzione del sistema (B) di equazioni a derivate parziali col sistema (A) n. 11 ci condurrà facilmente ad estendere al nuovo sistema le proprietà già studiate in dettaglio per quest'ultimo ai §§ 8, 9 M. A.

Stabiliremo in primo luogo, anche in questo caso, l'esistenza di sistemi ciclici, costruendo delle formole analoghe a quelle di Darboux. Perveniamo a tale risultato colle considerazioni seguenti.

Se la funzione $\theta(u,v)$ è una soluzione dell'equazione a derivate parziali:

$$(17)\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}=\operatorname{senh}\theta\cosh\theta\,,$$

e nelle formole (5) (6′) del n. 3 poniamo

facendovi

$$\sqrt{\mathrm{E}}=\cosh\theta\,,\qquad \sqrt{\mathrm{G}}=\operatorname{senh}\theta$$

$$\frac{1}{r_1}=\frac{\coth\theta}{\mathrm{R}}\,,\qquad \frac{1}{r_2}=\frac{\operatorname{tgh}\theta}{\mathrm{R}}\,,$$

$$\frac{1}{a^2}=\frac{1}{\mathrm{R}^2}+1\,,$$

vediamo che esse sono soddisfatte; ne segue (n. 3) che l'elemente lineare

$$ds^2=\cosh^2\theta\,du^2=\operatorname{senh}^2\theta\,dv^2$$

appartiene ad una superficie pseudosferica S di raggio $=1$, immersa nello spazio di Lobatschewsky colla curvatura $\mathrm{K}=-\left(1+\frac{1}{\mathrm{R}^2}\right)$.

Consideriamo ora sulla S un sistema qualunque di geodetiche parallele e in ogni punto $\mathrm{P}\equiv(u,v)$ di S indichiamo con ω l'angolo, che la geodetica del sistema, uscente

da P. forma colla linea $v = \text{cost}^{\text{te}}$. Procedendo precisamente come al n. 19 § 8. M. A., troveremo che le funzioni $\theta(u, v)$, $\omega(u, v)$ sono legate fra loro dalle relazioni

$$(18)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{\partial \omega}{\partial v} = \operatorname{senh} \theta \cos \omega \\ &\frac{\partial \theta}{\partial v} - \frac{\partial \omega}{\partial u} = \cosh \theta \operatorname{sen} \omega , \end{aligned} \right.$$

analoghe alle formole di Darboux e che possiamo ora considerare sotto un punto di vista puramente analitico.

Come equazioni simultanee alle derivate parziali per la funzione ω, esse sono compatibili appunto perchè θ è soluzione delle (17). Derivando la 1ª delle (18) rispetto a v, la 2ª rispetto ad u e sottraendo, si vede che ω soddisfa l'altra

$$(19)\qquad \frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} = \operatorname{sen} \omega \cos \omega .$$

Inversamente, se ω è una soluzione di questa ultima equazione alle derivate parziali, e nelle (18) riguardiamo θ come funzione incognita, esse sono compatibili in forza della (19) ed ammettono un integrale comune θ, contenente una costante arbitraria.

17. Ciò premesso, se indichiamo con w la costante arbitraria, che figura nell' integrale generale θ delle (18), ove per ω sia sostituita una determinata soluzione della (19), avremo evidentemente:

$$(20)\qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial w} = \cosh \theta \cos \omega \frac{\partial \theta}{\partial w}, \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \, \partial w} = \operatorname{senh} \theta \operatorname{sen} \omega \frac{\partial \theta}{\partial w} \cdot$$

Dopo di ciò si verifica subito che la funzione $\theta(u, v, w)$ soddisfa tutte le equazioni (B) n. 15; la formola

$$(21)\qquad ds^2 = \cosh^2 \theta \, du^2 + \operatorname{senh}^2 \theta \, dv^2 + R^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial w} \right)^2 dw^2$$

definisce adunque l'elemento lineare dello spazio di Lobatschewsky colla curvatura

$$K = -\left(1 + \frac{1}{R^2} \right),$$

riferito ad un sistema pseudosferico di Weingarten. Vogliamo ora di più dimostrare che questo sistema è ciclico. Per ciò basterà giovarsi della rappresentazione conforme del n. 1, ripetendo i calcoli fatti al n. 13 per i sistemi analoghi allora considerati. Così troveremo che nel sistema (21) le linee (w) sono circoli di curvatura $= 1$. E siccome la curvatura dello spazio è qui, in valore assoluto, > 1, dalle osservazioni del n. 12 segue che nel caso attuale i circoli (w) sono a centro ideale. Ciascuno di questi circoli dista poi dalla sua geodetica parallela (n. 12) della lunghezza costante δ, fornita dalla relazione

$$\frac{1}{a} \operatorname{tgh} \frac{\delta}{a} = 1 , \quad \frac{1}{a^2} = 1 + \frac{1}{R^2} \cdot$$

Di più le traccie dei piani di questi circoli sui piani tangenti di ogni superficie pseudosferica $w = \text{cost}^{\text{te}}$ sono le tangenti di quel sistema di geodetiche parallele, che formano l'angolo ω del n. precedente colle linee $v = \text{cost}^{\text{te}}$.

Si potrebbe poi dimostrare che non esistono, nel caso attuale, altri sistemi ciclici di Weingarten all' infuori di quelli ora considerati.

18. Mediante le formole (18), simili a quelle di Darboux, abbiamo constatato l'esistenza di sistemi ciclici. Ed ora, estendendo anche al caso attuale il processo analitico, a cui conduce la trasformazione di Bäcklund, applicata ai sistemi di Weingarten nello spazio euclideo (§ 9 M. A.), giungeremo a dimostrare l'esistenza di infiniti altri sistemi nello stesso grado di arbitrarietà che abbiamo riscontrato per gli altri casi.

Prima però di far conoscere questi nuovi risultati, che presenteremo qui sotto forma analitica, sarà bene accertarsi della esistenza di qualche soluzione particolare del sistema (B), che conduca a sistemi di Weingarten non ciclici. Si ottiene subito un tale integrale delle (B), assumendo θ funzione di una combinazione lineare τ delle variabili

$$\tau = au + bv + w\,,$$

dove a, b sono costanti. Basterà per ciò prendere

$$(21') \qquad \tau = \int \frac{d\theta}{\sqrt{C + \frac{\operatorname{senh}^2\theta}{a^2+b^2}}} \qquad \text{(C costante arbitraria)}$$

e si avranno dei sistemi di Weingarten non ciclici.

Ciò premesso, supponiamo che θ sia una soluzione particolare qualunque del sistema (B) e, indicando con ω una funzione incognita di u, v, w, con α una costante arbitraria determiniamo ω dalle equazioni ai differenziali totali:

$$(22) \qquad \begin{aligned} d\omega = &\left\{ \frac{\partial\theta}{\partial v} - \operatorname{sen}\alpha \cosh\theta \operatorname{sen}\omega + \cos\alpha \operatorname{senh}\theta \cos\omega \right\} du + \\ &+ \left\{ \operatorname{sen}\alpha \operatorname{senh}\theta \cos\omega + \cos\alpha \cosh\theta \operatorname{sen}\omega - \frac{\partial\theta}{\partial u} \right\} dv + \\ &+ \frac{1}{\cos\alpha}\left\{ \frac{\cos\omega}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w} + \frac{\operatorname{sen}\omega}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w} - \operatorname{sen}\alpha\frac{\partial\theta}{\partial w} \right\} dw\,. \end{aligned}$$

Le tre condizioni d'integrabilità per questa equazione si trovano identicamente soddisfatte, a causa delle equazioni (B), cui per ipotesi soddisfa θ. Si fanno queste verifiche nel modo più breve osservando che, se la funzione ω si suppone determinata dalla equazione

$$f(u,\ v,\ w,\ \omega) = 0\,,$$

la f, riguardata come funzione delle quattro variabili u, v, w, ω, considerate come indipendenti, deve soddisfare alle tre equazioni a derivate parziali lineari ed omogenee:

$$(\Delta) \quad \left\{ \begin{aligned} A_1(f) &= \frac{\partial f}{\partial u} + a_1 \frac{\partial f}{\partial \omega} = 0 \\ A_2(f) &= \frac{\partial f}{\partial v} + a_2 \frac{\partial f}{\partial \omega} = 0 \\ A_3(f) &= \frac{\partial f}{\partial w} + a_3 \frac{\partial f}{\partial \omega} = 0 \end{aligned} \right.$$

dove a_1, a_2, a_3 indicano i coefficienti di du, dv, dw nelle (22). Ora l'esser soddisfatte le condizioni d'integrabilità per la (22) porta che il sistema (Δ) sia *Jacobiano* e

inversamente (Cf. Mayer. Math. Annalen Bd 4). Queste condizioni d'integrabilità prendono quindi la forma:

$$A_1(a_2) - A_2(a_1) = 0\,, \quad A_1(a_3) - A_3(a_1) = 0\,, \quad A_2(a_3) - A_3(a_2) = 0.$$

La (22) ammette per conseguenza un integrale ω, contenente una costante arbitraria.

Per questo integrale ω seguono poi dalla (22) le formole seguenti, di cui importa tener conto:

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{\cos\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial w} &= \frac{1}{\cos\alpha}\cosh\theta\frac{\partial\theta}{\partial w} - \operatorname{tg}\alpha\cos\omega\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w} - \frac{\operatorname{sen}\omega\operatorname{senh}\theta}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w} + \\ &\quad + \cos\omega\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w} - \operatorname{tg}\alpha\frac{\cosh\theta\operatorname{sen}\omega}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w} \\ \frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial v\,\partial w} &= \frac{1}{\cos\alpha}\operatorname{senh}\theta\frac{\partial\theta}{\partial w} - \operatorname{sen}\omega\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w} - \operatorname{tg}\alpha\frac{\operatorname{senh}\theta\cos\omega}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w} - \\ &\quad - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{sen}\omega\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w} + \frac{\cosh\theta\cos\omega}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\,. \end{aligned}\right.$$

E mediante queste ultime, la (22) e le (B) si verificherà agevolmente che l'integrale ω delle (22) soddisfa al sistema seguente di equazioni alle derivate parziali:

$$B' \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial v^2} = \operatorname{sen}\omega\cos\omega \\ &\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\cos\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial w}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial\omega}{\partial v}\frac{\partial^2\omega}{\partial v\,\partial w} - \cos\omega\frac{\partial\omega}{\partial w} = 0 \\ &\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial v\,\partial w}\right) - \frac{1}{\cos\omega}\frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial w} + \operatorname{sen}\omega\frac{\partial\omega}{\partial w} = 0 \\ &\frac{\partial^3\omega}{\partial u\,\partial v\,\partial w} + \operatorname{tg}\omega\frac{\partial\omega}{\partial v}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial w} - \cot\omega\frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial^2\omega}{\partial v\,\partial w} = 0\,. \end{aligned}\right.$$

Inversamente supponiamo che ω sia una soluzione delle (B′) e determiniamo la funzione θ di u, v, w dalla equazione a differenziali totali

$$(22')\quad \begin{aligned} d\theta = &\left\{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{senh}\theta\cos\omega + \cos\alpha\cosh\theta\operatorname{sen}\omega - \frac{\partial\omega}{\partial v}\right\}du + \\ &+ \left\{\operatorname{sen}\alpha\cosh\theta\operatorname{sen}\omega - \cos\alpha\operatorname{senh}\theta\cos\omega + \frac{\partial\omega}{\partial u}\right\}dv + \\ &+ \frac{1}{\cos\alpha}\left\{\frac{\cos\theta}{\cos\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial w} - \frac{\operatorname{senh}\theta}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial v\,\partial w} + \operatorname{sen}\alpha\frac{\partial\omega}{\partial w}\right\}\partial w\,, \end{aligned}$$

per la quale, a causa delle (B′), trovansi identicamente soddisfatte le condizioni di integrabilità. L'integrale θ della (2′) contiene una costante arbitraria e, come facilmente si verifica, soddisfa alle equazioni del sistema (B).

19. Ciò posto, è chiaro come, partendo da una soluzione particolare delle (B), e integrando successivamente una serie di coppie di equazioni ai differenziali totali della forma (22), (22′) (dove in ogni singola equazione si potrà dare ad α un valore a piacere) si possa giungere a trovare sempre nuove soluzioni delle (B) (e delle (B′)), contenenti via via un numero crescente di costanti arbitrarie. Riguardo alle equazioni (22), (22′) è da notarsi che, prendendo nella 1ª per incognita $\varLambda = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\omega$ e nella 2ª $\varLambda = \operatorname{tgh}\frac{1}{2}\theta$, esse diventano equazioni del tipo di Riccati, per le quali si possono

ripetere le considerazioni del n. 26 M. A. In particolare se l'integrazione della prima equazione della forma (22) si effettua con quadrature, basterà mantenere alla costante α, nelle successive equazioni della forma (22'), (22) sempre il medesimo valore, e l'applicazione del metodo sopra esposto richiederà soltanto successive quadrature. È questo p. e. il caso se nella soluzione particolare θ delle (B), fornita dalla (21'), si pone

$$a = \operatorname{sen}\alpha\,, \quad b = \cos\alpha\,, \quad C = 0\,.$$

Una importante proprietà delle successive soluzioni θ, ω delle (B), (B'), ottenute col metodo descritto, si rileva dalle (23), che danno luogo alla formola notevole

$$(24) \qquad \frac{1}{\cosh^2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right)^2+\frac{1}{\operatorname{senh}^2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right)^2-\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2=$$
$$=\left(\frac{\partial\omega}{\partial w}\right)^2-\frac{1}{\cos^2\omega}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial w}\right)^2+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\omega}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial v\,\partial w}\right)^2,$$

la quale ci dimostra come le funzioni, che appariscono nel 1° e 2° membro, siano *invarianti* rispetto alle successive trasformazioni (Cf. n. 28. M. A).

20. Se $\theta^{(n)}$ denota una soluzione delle (B), ottenuta dopo un certo numero n di trasformazioni dalla iniziale θ, avremo per la (25):

$$\frac{1}{\cosh^2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right)^2+\frac{1}{\operatorname{senh}^2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right)^2-\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2=$$
$$=\frac{1}{\cosh^2\theta^{(n)}}\left(\frac{\partial^2\theta^{(n)}}{\partial u\,\partial w}\right)^2+\frac{1}{\operatorname{senh}^2\theta^{(n)}}\left(\frac{\partial^2\theta^{(n)}}{\partial v\,\partial w}\right)^2-\left(\frac{\partial\theta^{(n)}}{\partial w}\right)^2.$$

Introducendo le flessioni $\frac{1}{\varrho_3}, \frac{1}{\varrho_3^{(n)}}$ delle linee (w) nei due sistemi di Weingarten, che corrispondono rispettivamente alle soluzioni θ, $\theta^{(n)}$ delle (B), ed osservando che si ha (Cf. n.[i] 12-14):

$$\left(\frac{1}{\varrho_3}\right)^2\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2=\frac{1}{\cosh^2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right)^2+\frac{1}{\operatorname{senh}^2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right)^2$$
$$\left(\frac{1}{\varrho_3^{(n)}}\right)^2\left(\frac{\partial\theta^{(n)}}{\partial w}\right)^2=\frac{1}{\cosh^2\theta^{(n)}}\left(\frac{\partial^2\theta^{(n)}}{\partial u\,\partial w}\right)^2+\frac{1}{\operatorname{senh}^2\theta^{(n)}}\left(\frac{\partial^2\theta^{(n)}}{\partial v\,\partial w}\right)^2,$$

la precedente può scriversi

$$\left\{\left(\frac{1}{\varrho_3}\right)^2-1\right\}\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2=\left\{\left(\frac{1}{\varrho_3^{(n)}}\right)^2-1\right\}\cdot\left(\frac{\partial\theta^{(n)}}{\partial w}\right)^2.$$

Si vede di qui che sarà $\frac{1}{\varrho_3^{(n)}} \lesseqgtr 1$ secondo che inizialmente $\frac{1}{\varrho_3} \lesseqgtr 1$. Per quanto si è detto alla fine del n. 15, si presenta il 1°, 2° e 3° caso, secondo che le linee di livello sulle superficie pseudosferiche $w = \text{cost}^{\text{te}}$ sono circoli a centro reale, circoli a centro ideale, ovvero oricicli.

L'ultimo caso è specialmente notevole, avendo allora le linee (w) la flessione costante $=1$. Rientrano in questa classe i sistemi ciclici del n. 17; però la classe stessa è più comprensiva. Così p. e. se nella (21') poniamo $C=\frac{b^2}{(a^2+b^2)^2}$, il sistema di Weingarten corrispondente ha le linee (w), non piane, a flessione costante. Siccome poi, con un calcolo perfettamente simile a quello della fine del n. 28 M. A.,

si prova che ogni sistema ciclico di Weingarten, per mezzo delle nostre trasformazioni, si cangia in un nuovo sistema ciclico, così ne risulta l'esistenza di infiniti sistemi di Weingarten, non ciclici, a flessione costante.

21. È degno di nota un caso limite delle trasformazioni considerate nei due paragrafi precedenti, caso che risulta dalle (22), (22') per $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Il teorema, che così si ottiene, corrisponde a quello della trasformazione complementare (n. 20. N. A) per i sistemi di Weingarten nello spazio euclideo e può enunciarsi come segue:

Se la funzione θ *di* u, v, w *è una soluzione delle* (B), *l'angolo* ω *definito dalla equazione*:

$$\frac{\cos\omega}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}+\frac{\operatorname{sen}\omega}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}-\frac{\partial\theta}{\partial w}=0 \tag{25}$$

è una soluzione delle (B'); *inversamente se* ω *è una soluzione delle* (B'), *la funzione* θ *che soddisfa alla equazione*:

$$\frac{\cosh\theta}{\cos\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial w}-\frac{\operatorname{senh}\theta}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial v\,\partial w}+\frac{\partial\omega}{\partial w}=0 \tag{26}$$

è una soluzione delle (B).

Le verifiche di queste proprietà si fanno facilmente, tenendo conto nel 1° caso delle equazioni (B), cui soddisfa θ, e nel 2° delle equazioni (B'), cui soddisfa ω.

Si deve però osservare che le (25), (26) danno due valori reali e distinti per ω o per θ, solo quando il 1° (e quindi il 2°) membro della (24) è positivo, cioè quando, essendo $\frac{1}{\varrho_3} > 1$, le linee di livello sulle superficie pseudosferiche del sistema di Weingarten sono circoli a centro ideale, mentre se $\frac{1}{\varrho_3} = 1$ la (25) o (26) dà un solo valore per ω o per θ. La trasformazione, qui considerata, conduce quindi da un sistema noto di Weingarten a nuovi sistemi, senza alcun calcolo d'integrazione, solo quando la flessione delle linee (w) nel sistema iniziale è > 1. La formola (25) è allora suscettibile di una interpretazione geometrica, come la formola analoga (28) M. A. n. 21. Fra le linee di livello, vi è in questo caso una geodetica e l'angolo ω, dato dalla (25), è l'angolo che le geodetiche parallele, nell'un senso o nell'altro, a questa geodetica di livello formano colle linee di curvatura $v = \text{cost}^{\text{te}}$.

§ VI.

Caso in cui la curvatura delle superficie Σ è variabile dall'una all'altra superficie.

22. Fino ad ora abbiamo considerato quei sistemi tripli di superficie ortogonali, nello spazio di Riemann o di Lobatschewsky, in cui le superficie Σ di uno dei tre sistemi hanno la *medesima* curvatura costante. Ora trattiamo brevemente il caso più generale, in cui le superficie Σ sono bensì, individualmente considerate, a curvatura costante k, ma k varia (con continuità) passando dall'una all'altra superficie Σ.

Supporremo qui k negativo e di più ci limiteremo a considerare una porzione dello spazio, in cui la curvatura *relativa* $k - \mathrm{K}$ delle superficie pseudosferiche Σ conservi sempre il medesimo segno.

Sia

$$ds^2 = \mathrm{H}_1^2\, du^2 + \mathrm{H}_2^2\, dv^2 + \mathrm{H}_3^2\, dw^2$$

la forma dell'elemento lineare dello spazio e le superficie Σ siano le $w = \mathrm{cost^{te}}$. Ponendo la loro curvatura

$$k = -\frac{1}{\mathrm{R}^2},$$

sarà R una funzione di w, che supporremo finita e continua insieme colla derivata.

Se consideriamo dapprima il caso di $k - \mathrm{K}$ negativa, potremo porre

$$\mathrm{K} - k = \frac{1}{\lambda^2},$$

ossia

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\mathrm{R}^2} \pm \frac{1}{a^2},$$

secondo che $\mathrm{K} = \pm \frac{1}{a^2}$. Procedendo come al n. 11, troveremo che all'elemento lineare dello spazio di Riemann o di Lobatschewsky, riferito al sistema triplo pseudosferico supposto, si può dare la forma

$$ds^2 = \cos^2\theta\, du^2 + \mathrm{sen}^2\theta\, dv^2 + \lambda^2 \left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2 dw^2,$$

dove le funzioni $\theta(u, v, w)$, $\mathrm{R}(w)$ sono legate fra loro dalle equazioni:

$$(\mathrm{D}) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = \frac{\mathrm{sen}\,\theta \cos\theta}{\mathrm{R}^2} \\ & \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right) - \frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\frac{\partial\theta}{\partial v} - \frac{1}{\mathrm{R}}\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\mathrm{R}}\right) = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right) + \frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\frac{\partial\theta}{\partial u} + \frac{1}{\mathrm{R}}\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\cos\theta}{\mathrm{R}}\right) = 0 \\ & \frac{\partial^3\theta}{\partial u\,\partial v\,\partial w} + \mathrm{tg}\,\theta\,\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\frac{\partial\theta}{\partial v} - \cot\theta\,\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\frac{\partial\theta}{\partial u} = 0. \end{aligned} \right.$$

Inversamente se θ, R soddisfano a queste equazioni la formola precedente definisce, nello spazio curvo, un sistema triplo ortogonale della specie voluta. Le (D) sono le equazioni stesse della mia Nota 3 gennaio 1886, inserita nei Rendiconti di questa r. Accademia. Anche qui troviamo adunque (come al n. 11) che ad ogni sistema pseudosferico nello spazio euclideo ne corrisponde uno nello spazio curvo. Per questi sistemi sussistono quindi in generale i risultati di quella Nota.

23. Sia ora $k - \mathrm{K} = -(1 + \mathrm{K}) > 0$, quindi $\mathrm{K} = -\frac{1}{a^2}$. Se poniamo

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{\mathrm{R}^2}, \tag{27}$$

vedremo che all'elemento lineare dello spazio si può dare la forma

$$ds^2 = \cosh^2\theta\, du^2 + \mathrm{senh}^2\theta\, dv^2 + \lambda^2 \left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2 dw^2, \tag{28}$$

dove $\theta(u, v, w)$ e $R(w)$ sono legate fra loro dalle relazioni:

$$
(E) \quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = \frac{\operatorname{senh}\theta\cosh\theta}{R^2}\\
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right) + \frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\frac{\partial\theta}{\partial v} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\operatorname{senh}\theta}{R}\right)\\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right) + \frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\frac{\partial\theta}{\partial u} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\cosh\theta}{R}\right)\\
&\frac{\partial^3\theta}{\partial u\,\partial v\,\partial w} = \operatorname{tgh}\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w} + \coth\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Inversamente, se θ, R soddisfano a queste equazioni e λ ha il valore (27), l'elemento lineare (28) appartiene allo spazio di curvatura costante $K = -\frac{1}{a^2}$ e le superficie $w = \text{cost}^{\text{te}}$ del sistema triplo ortogonale sono superficie pseudosferiche di raggio variabile $R(w)$.

Le proprietà, dimostrate al n. 18 pel sistema (B), si estendono facilmente al sistema (E). Indichiamo infatti con c una costante arbitraria e poniamo:

$$R = c \operatorname{sen}\alpha\,;$$

quando le funzioni θ, R rendano identiche le (E), l'equazione a differenziali totali per ω:

$$
(29) \quad
\begin{aligned}
d\omega = &\left\{\frac{\partial\theta}{\partial v} - \frac{\cosh\theta\operatorname{sen}\omega}{c} + \frac{\cot\alpha}{c}\operatorname{senh}\theta\cos\omega\right\}du\\
&+\left\{\frac{\operatorname{senh}\theta\cos\omega}{c} + \frac{\cot\alpha}{c}\cosh\theta\operatorname{sen}\omega - \frac{\partial\theta}{\partial u}\right\}dv\\
&+\operatorname{tg}\alpha\left\{c\frac{\cos\omega}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w} + c\frac{\operatorname{sen}\omega}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w} - \frac{\partial\theta}{\partial w}\right\}dw
\end{aligned}
$$

soddisfa identicamente, per le (E), le tre condizioni d'integrabilità e l'integrale ω, contenente una costante arbitraria, soddisfa al sistema di equazioni simultanee:

$$
(E') \quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial v^2} = \frac{\operatorname{sen}\omega\cos\omega}{R^2}\\
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\cos\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial w}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial v\,\partial w}\frac{\partial\omega}{\partial v} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\operatorname{sen}\omega}{R}\right)\\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial v\,\partial w}\right) - \frac{1}{\cos\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial w}\frac{\partial\omega}{\partial u} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\cos\omega}{R}\right)\\
&\frac{\partial^3\omega}{\partial u\,\partial v\,\partial w} = \cot\omega\,\frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial^2\omega}{\partial v\,\partial w} - \operatorname{tg}\omega\,\frac{\partial\omega}{\partial v}\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial w}\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Inversamente, se ω è una soluzione delle (E'), l'equazione a differenziali totali per θ:

$$
(29') \quad
\begin{aligned}
d\theta = &\left\{\frac{\operatorname{senh}\theta\cos\omega}{c} + \frac{\cot\alpha}{c}\cosh\theta\operatorname{sen}\omega - \frac{\partial\omega}{\partial v}\right\}du\\
&+\left\{\frac{\cosh\theta\operatorname{sen}\omega}{c} - \frac{\cot\alpha}{c}\operatorname{senh}\theta\cos\omega + \frac{\partial\omega}{\partial u}\right\}dv\\
&+\operatorname{tg}\alpha\left\{c\frac{\cosh\theta}{\cos\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial w} - c\frac{\operatorname{senh}\theta}{\operatorname{sen}\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial w} + \frac{\partial\omega}{\partial w}\right\}dw
\end{aligned}
$$

è integrabile *illimitatamente* e l'integrale generale θ (con una costante arbitraria) soddisfa al sistema (E).

Il metodo, esposto al n. 19, è quindi anche in questo caso applicabile per rinvenire sempre nuove soluzioni del sistema (E), partendo da una soluzione nota. Per tale soluzione iniziale si può prendere p. e. quella data dalle formole:

$$\cosh\theta = \frac{\cosh\tau}{\operatorname{senh}\tau}\,, \quad \operatorname{senh}\theta = \frac{1}{\operatorname{senh}\tau}$$

$$R = \cos w\,,$$

dove si è posto

$$\tau = u + v \operatorname{tg} w + \psi(w)\,,$$

essendo $\psi(w)$ una funzione arbitraria di w. Se allora nelle successive equazioni (29) (29') si prende

$$c = -1\,, \qquad \cos\alpha = \operatorname{sen} w\,, \qquad \operatorname{sen}\alpha = -\cos w\,,$$

l'applicazione del metodo descritto porterà soltanto ad eseguire successive quadrature.

§ VII.

Caratteristiche dei sistemi di Weingarten.

24. Esponiamo ora un metodo generale per trovare, mediante sviluppi in serie, gli integrali di quei sistemi di equazioni simultanee alle derivate parziali, da cui dipende la ricerca dei varî sistemi tripli ortogonali di Weingarten dello spazio piano o curvo [1]. Per tal modo dimostreremo rigorosamente, per tutti i sistemi di Weingarten, quella parte del teorema A) n. 11. M. A, che si riferisce alla unicità del sistema, sotto le imposte condizioni ai limiti.

Prendiamo per equazioni tipiche le (A) n. 11, avvertendo che identiche considerazioni possono ripetersi per tutti gli altri sistemi di equazioni a derivate parziali sopra citati. Il problema da risolversi è l'integrazione del seguente sistema di equazioni simultanee per la funzione incognita $\theta(u, v, w)$:

$$(31)\left\{\begin{aligned} &(30)\quad \frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = \operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ &\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right) = \cos^2\theta\frac{\partial\theta}{\partial w} - \operatorname{tg}\theta\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right) + \cot\theta\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right) \\ &\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right) = -\operatorname{tg}\theta\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right) + \cot\theta\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right) \\ &\frac{\partial^2}{\partial v^2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right) = \operatorname{sen}^2\theta\frac{\partial\theta}{\partial w} - \operatorname{tg}\theta\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right) + \cot\theta\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right). \end{aligned}\right.$$

Cerchiamo di soddisfarvi con un valore di θ, che sia funzione analitica delle variabili u, v, w, sviluppabile in serie di Taylor per le potenze di w. Scriviamo questa serie nel modo segnente:

$$(32)\qquad \theta = \psi_0 + \psi_1 w + \psi_2\frac{w^2}{1.2} + \cdots + \psi_n\frac{w^n}{\pi(n)} + \cdots,$$

[1] Sistemi (A), (B), (B'), (C), (D), (E), (E') della presente Memoria.

dove i coefficienti ψ_0, $\psi_1, \dots \psi_n \dots$ della serie saranno funzioni analitiche di u, v. Il coefficiente iniziale ψ_0 deve essere evidentemente una soluzione dell'equazione:

$$\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial v^2} = \operatorname{sen} \psi_0 \cos \psi_0 \,; \tag{33}$$

per gli altri $\psi_1, \psi_2 \dots \psi_n, \dots$ le (31) e quelle equazioni, che se ne ottengono per derivazione successiva rapporto a w, stabiliscono delle relazioni ricorrenti, mediante le quali si può determinarli.

25. Supponiamo di conoscere già:

$$\psi_0, \psi_1 \dots \psi_{n-1}$$

Se deriviamo le (31) n—1 volte rispetto a w, indi facciamo nelle equazioni risultanti $w = 0$, otterremo, per determinare ψ_n, le equazioni seguenti:

$$(34)\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial u^2} &= \cos^2 \psi_0 \,.\, \psi_n - \operatorname{tg} \psi_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial u} \cdot \frac{\partial \psi_n}{\partial u} + \cot \psi_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial v} \cdot \frac{\partial \psi_n}{\partial v} + \alpha_n \\
\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial u \partial v} &= - \operatorname{tg} \psi_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial v} \cdot \frac{\partial \psi_n}{\partial u} + \cot \psi_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial u} \frac{\partial \psi_n}{\partial v} + \beta_n \\
\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial v^2} &= \operatorname{sen}^2 \psi_0 \,.\, \psi_n - \operatorname{tg} \psi_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial u} \cdot \frac{\partial \psi_n}{\partial u} + \cot \psi_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial v} \cdot \frac{\partial \psi_n}{\partial v} + \gamma_n,
\end{aligned}\right.$$

dove i termini additivi $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ sono espressioni composte con:

$$\psi_0, \psi_1, \dots \psi_{n-1} \,;\, \frac{\partial \psi_0}{\partial u}, \frac{\partial \psi_1}{\partial u}, \dots \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial u} \,;\, \frac{\partial \psi_0}{\partial v}, \frac{\partial \psi_1}{\partial v}, \dots \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial v}$$

secondo una legge ricorrente che ora andiamo a definire.

Se con F indichiamo una funzione degli argomenti sopra scritti e definiamo un'operazione Ω da eseguirsi sulla F mediante la formola seguente:

$$\Omega(\mathrm{F}) = \sum_{i=0}^{i=n-1} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \psi_i} \cdot \psi_{i+1} + \sum_{i=0}^{i=n-1} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial u}\right)} \cdot \frac{\partial \psi_{i+1}}{\partial u} + \sum_{i=0}^{i=n-1} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial v}\right)} \frac{\partial \psi_{i+1}}{\partial v}, \tag{35}$$

le $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ si dedurranno dalle precedenti $\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}, \gamma_{n-1}$ colle formole ricorrenti:

$$(36)\left\{\begin{aligned}
\alpha_n = &-2 \operatorname{sen} \psi_0 \cos \psi_0 \,.\, \psi_1 \psi_{n-1} - \frac{1}{\cos^2 \psi_0} \frac{\partial \psi_0}{\partial u} \cdot \psi_1 \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial u} - \operatorname{tg} \psi_0 \frac{\partial \psi_1}{\partial u} \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial u} - \\
&- \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \psi_0} \frac{\partial \psi_0}{\partial v} \psi_1 \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial v} + \cot \psi_0 \frac{\partial \psi_1}{\partial v} \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial v} + \Omega(\alpha_{n-1}) \\
\beta_n = &- \frac{1}{\cos^2 \psi_0} \frac{\partial \psi_0}{\partial v} \cdot \psi_1 \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial u} - \operatorname{tg} \psi_0 \frac{\partial \psi_1}{\partial v} \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial u} - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \psi_0} \frac{\partial \psi_0}{\partial u} \psi_1 \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial v} + \\
&+ \cot \psi_0 \frac{\partial \psi_1}{\partial u} \frac{\partial \psi_{n+1}}{\partial u} + \Omega(\beta_{n-1}) \\
\gamma_n = &\,2 \operatorname{sen} \psi_0 \cos \psi_0 \cdot \psi_1 \psi_{n-1} - \frac{1}{\cos^2 \psi_0} \frac{\partial \psi_0}{\partial u} \psi_1 \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial u} - \operatorname{tg} \psi_0 \frac{\partial \psi_1}{\partial u} \frac{\partial \psi_{n-4}}{\partial u} - \\
&- \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \psi_0} \frac{\partial \psi_0}{\partial v} \psi_1 \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial v} + \cot \psi_0 \frac{\partial \psi_1}{\partial v} \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial v} + \Omega(\gamma_{n-1})
\end{aligned}\right.$$

Per mezzo di queste formole, partendo dai valori iniziali

$$\alpha_1 = 0 , \quad \beta_1 = 0 , \quad \gamma_1 = 0 ,$$

si calcoleranno le α, β, γ con un indice qualunque.

Inversamente se ψ_0 è una soluzione della (33) e $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \dots$ soddisfano rispettivamente alle (34) per $n = 1, 2, 3 \dots$, la serie (32), quando sia convergente, definirà una funzione θ, integrale del sistema (30), (31). E infatti le (31) e tutte quelle, che ne seguono per derivazione successiva rispetto a w, saranno soddisfatte per $w = 0$ e quindi le (31) stesse sussisteranno qualunque sia w. Inoltre la (30) sarà soddisfatta per $w=0$ insieme a tutte le equazioni che nascono da questa, derivandola successivamente rapporto a w, poichè queste ultime sono combinazioni lineari di quelle superiormente considerate. Così anche la (30) sarà soddisfatta qualunque sia w, c. d. d.

26. Le equazioni (34) esprimono le derivate seconde della funzione incognita ψ_n per mezzo della funzione stessa e delle sue derivate prime e se le condizioni di *illimitata* integrabilità, contenute nelle formole

$$(37)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \gamma_n}{\partial u} - \dfrac{\partial \beta_n}{\partial v} + \dfrac{1}{\operatorname{sen}\psi_0 \cos\psi_0} \dfrac{\partial \psi_0}{\partial v} \beta_n - \operatorname{tg}\psi_0 \dfrac{\partial \psi_0}{\partial u} \alpha_n - \cot\psi_0 \dfrac{\partial \psi_0}{\partial u} \gamma_n = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \beta_n}{\partial u} - \dfrac{\partial \alpha_n}{\partial v} + \dfrac{1}{\operatorname{sen}\psi_0 \cos\psi_0} \dfrac{\partial \psi_0}{\partial u} \beta_n - \operatorname{tg}\psi_0 \dfrac{\partial \psi_0}{\partial v} \alpha_n - \cot\psi_0 \dfrac{\partial \psi_0}{\partial v} \gamma_n = 0 , \end{cases}$$

si trovano identicamente soddisfatte, esse ammettono una soluzione ψ_n contenente tre costanti arbitrarie.

I primi membri delle (37) sono composti con

$$\psi_0, \psi_1, \dots \psi_{n-1} ; \frac{\partial \psi_0}{\partial u}, \frac{\partial \psi_1}{\partial u}, \dots \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial u} ; \frac{\partial \psi_0}{\partial v}, \frac{\partial \psi_1}{\partial v} \dots \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial v}$$

e noi dimostreremo ora appunto che essi sono identicamente nulli, anche se si riguardano gli argomenti superiori come altrettante variabili indipendenti. Per ciò ammettiamo che la enunciata proprietà si verifichi per $n = 1, 2, \dots m-1$ e dimostriamo che essa sussisterà altresì per $n = m$. Siccome pei primi valori di $n = 1, 2$ la proprietà facilmente si riscontra, così sarà vera in generale.

Ponendo nelle (37) $n=m$ ed esprimendo $\alpha_m, \beta_m, \gamma_m$ per $\alpha_{m-1}, \beta_{m-1}, \gamma_{m-1}$ secondo le formole ricorrenti (36), troviamo che esse si riducono alle seguenti:

$$(37')\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \Omega(\gamma_{m-1})}{\partial u} - \dfrac{\partial \Omega(\beta_{m-1})}{\partial v} + \Omega \left\{ \dfrac{1}{\operatorname{sen}\psi_0 \cos\psi_0} \dfrac{\partial \psi_0}{\partial v} \beta_{m-1} \right\} - \Omega \left(\operatorname{tg}\psi_0 \cdot \dfrac{\partial \psi_0}{\partial u} \alpha_{m-1} \right) - \\ \qquad\qquad - \Omega \left(\cot\psi_0 \dfrac{\partial \psi_0}{\partial u} \gamma_{m-1} \right) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \Omega(\beta_{m-1})}{\partial u} - \dfrac{\partial \Omega(\alpha_{m-1})}{\partial v} + \Omega \left\{ \dfrac{1}{\operatorname{sen}\psi_0 \cos\psi_0} \dfrac{\partial \psi_0}{\partial u} \beta_{m-1} \right\} - \Omega \left(\operatorname{tg}\psi_0 \cdot \dfrac{\partial \psi_0}{\partial v} \alpha_{m-1} \right) - \\ \qquad\qquad - \Omega \left(\cot\psi_0 \dfrac{\partial \psi_0}{\partial v} \gamma_{m-1} \right) = 0 . \end{cases}$$

Ora l'operazione Ω, definita dalla (35), è evidentemente distributiva come un'ordinaria operazione di derivazione; inoltre, ove sia eseguita sopra una funzione

$$F = F\left(\psi_0, \psi_1 \dots \psi_{m-2} ; \frac{\partial \psi_0}{\partial u}, \frac{\partial \psi_1}{\partial u} \dots \frac{\partial \psi_{m-2}}{\partial u} ; \frac{\partial \psi_0}{\partial v} \frac{\partial \psi_1}{\partial v} \dots \frac{\partial \psi_{m-2}}{\partial v} \right),$$

e per $n=1, 2, 3, \dots m-1$ le (34) siano verificate, come qui si suppone, essa è permutabile colle operazioni di derivazione rapporto ad u, v. Tale proprietà compete infatti all'operazione Ω eseguita sui singoli argomenti in F; e invero per $i \leqq m-2$ abbiamo per definizione

$$\Omega(\psi_i) = \psi_{i+1} \qquad \Omega\left(\frac{\partial \psi_i}{\partial u}\right) = \frac{\partial \psi_{i+1}}{\partial u}$$

quindi

$$\frac{\partial \Omega(\psi_i)}{\partial u} = \Omega\left(\frac{\partial \psi_i}{\partial u}\right)$$

e similmente

$$\frac{\partial \Omega(\psi_i)}{\partial v} = \Omega\left(\frac{\partial \psi_i}{\partial v}\right).$$

Abbiamo altresì

$$\frac{\partial}{\partial u}\Omega\left(\frac{\partial \psi_i}{\partial u}\right) = \frac{\partial^2 \psi_{i+1}}{\partial u^2}$$

e d'altra parte, per tutti i valori di n fino ad $m-1$ sussistendo, per ipotesi, le (34) si ha

$$\Omega\left(\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial u^2}\right) = \frac{\partial^2 \psi_{i+1}}{\partial u^2}$$

e quindi

$$\frac{\partial}{\partial u}\Omega\left(\frac{\partial \psi_i}{\partial u}\right) = \Omega\left(\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial u^2}\right) \text{ etc.}$$

Ne segue che le (37′) possono scriversi:

$$\Omega\left\{\frac{\partial \gamma_{m-1}}{\partial u} - \frac{\partial \beta_{m-1}}{\partial v} + \frac{1}{\operatorname{sen}\psi_0 \cos\psi_0}\frac{\partial \psi_0}{\partial v}\beta_{m-1} - \operatorname{tg}\psi_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial u}\alpha_{m-1} - \cot\psi'_0 \frac{\partial \psi'_0}{\partial v}\gamma_{m-1}\right\} = 0$$

$$\Omega\left\{\frac{\partial \beta_{m-1}}{\partial u} - \frac{\partial \alpha_{m-1}}{\partial v} + \frac{1}{\operatorname{sen}\psi_0 \cos\psi_0}\frac{\partial \psi'_0}{\partial u}\beta_{m-1} - \operatorname{tg}\psi_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial v}\alpha_{m-1} - \cot\psi'_0 \frac{\partial \psi'_0}{\partial v}\gamma_{m-1}\right\} = 0,$$

e poichè, per l'ipotesi fatta, le funzioni di

$$\psi_0, \dots \psi_{m-2}; \frac{\partial \psi_0}{\partial u}, \dots \frac{\partial \psi_{m-2}}{\partial u}; \frac{\partial \psi_0}{\partial v}, \dots \frac{\partial \psi_{m-2}}{\partial v},$$

sulle quali in queste ultime formole deve essere eseguita l'operazione Ω, sono *identicamente* nulle, saranno pur nulli i risultati dell'operazione stessa.

Così adunque, per tutti i valori di n, le (34) ammettono una soluzione $\psi_n(u, v)$ contenente tre costanti arbitrarie. Nè sarà inutile osservare che allorquando si conosca delle (34) una soluzione particolare $\psi_n^{(1)}$, la soluzione più generale ψ_n si otterrà aggiungendo a ψ'_n la soluzione più generale Ψ_1 delle (34) per $n=1$.

Osservazione. Il metodo qui esposto per lo sviluppo in serie degli integrali delle equazioni simultanee (30) (31) si semplifica grandemente nel caso dei sistemi di Weingarten a flessione costante, ottenendosi allora ciascun coefficiente ψ_n dai precedenti con una quadratura.

27. Riferendoci ora alle condizioni ai limiti, espresse nel citato teorema A) n. 11 M. A., dimostriamo come per esse risultino completamente individuati i successivi coefficienti

$$\psi_0, \psi_1, \psi_2 \dots \psi_n \dots$$

della serie (32).

Per fissare le idee, supponiamo che si tratti di un sistema di Weingarten nello spazio euclideo, ma lo stesso potrà ripetersi per gli altri sistemi. Di questo sistema sia dunque assegnata una superficie pseudosferica iniziale Σ_0 ed una curva C_0, del sistema (w), uscente da un punto P_0 di Σ_0 normalmente a Σ_0. Questa curva C_0 sarà supposta *analitica*, cioè si ammetterà che le coordinate di un punto mobile sopra di essa siano funzioni analitiche dell'arco. Ciò posto prendiamo per parametro w l'arco di C_0, contato da P_0, sicchè sarà $w=0$ l'equazione della superficie Σ_0 e il termine iniziale $\psi_0(u,v)$ della serie (32) sarà una funzione assegnata di u, v, soluzione della (33), e dipendente dalla forma di Σ_0.

Se indichiamo con $u=u_0$, $v=v_0$ le coordinate curvilinee di P_0 sopra Σ_0, ciascun coefficiente ψ_n della serie (32), dovendo soddisfare alle (34), sarà pienamente determinato quando nel punto iniziale P_0 si conoscano i valori di

$$\psi_n, \frac{\partial \psi_n}{\partial u}, \frac{\partial \psi_n}{\partial v}.$$

Ora se denotiamo in generale con $f^{(0)}$ il valore che prende una funzione $f(u,v)$ per $u=u_0$, $v=v_0$, dobbiamo avere, per ipotesi (1)

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial w}\right)^{(0)} = 1,$$

quindi per la (32)

$$\psi_1^{(0)} = 1, \quad \psi_2^{(0)} = 0, \quad \psi_3^{(0)} = 0, \dots \psi_n^{(0)} = 0 \dots .$$

I valori iniziali di $\frac{\partial \psi_1}{\partial u}, \frac{\partial \psi_1}{\partial v}$ vengono determinati dalle formole (17) n. 8 M. A. E infatti se indichiamo con ϱ_0 il raggio di 1ª curvatura della curva C_0 in P_0 e con ω_0 l'angolo che la sua normale principale fa ivi colla linea $v=\text{cost}^{\text{te}}$ sopra Σ_0, esse ci danno

$$\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial u}\right)^{(0)} = -\frac{\cos\omega_0 \cos\psi_0}{\varrho_0}, \quad \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial v}\right)^{(0)} = -\frac{\operatorname{sen}\omega_0 \operatorname{sen}\psi_0}{\varrho_0}.$$

Resta a vedersi come le condizioni imposte ai limiti determinino i valori iniziali

$$\left(\frac{\partial \psi_n}{\partial u}\right)^{(0)} \quad \left(\frac{\partial \psi_n}{\partial v}\right)^{(0)}.$$

Per ciò ricordiamo che indicando con $\frac{1}{\varrho}, \frac{1}{T}$ la flessione e la torsione delle linee (w) si ha (2)

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial \theta}{\partial w}\right)^2 \dfrac{1}{\varrho^2} = \dfrac{1}{\cos^2\theta}\left(\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial w}\right)^2 + \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\left(\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial v\, \partial w}\right)^2 \\[2ex] \dfrac{\partial \theta}{\partial w}\cdot\dfrac{1}{T} = \dfrac{\partial}{\partial w}\operatorname{arc\,tg}\left[\operatorname{tg}\theta \dfrac{\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}}{\dfrac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}}\right]; \end{cases}$$

(1) L'elemento lineare di una linea (w) è dato infatti da

$$ds_w = \frac{\partial \theta}{\partial w} dw$$

e per $u=v_0$, $v=v_0$ deve ridursi a dw.

(2) M. A. n. 2 formole (7) (8).

queste possono scriversi anche

$$(38)\quad\begin{cases}\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2\dfrac{1}{\varrho^2}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}\left(\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right)^2+\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\left(\dfrac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right)^2\\[2mm] \left(\dfrac{\partial\theta}{\partial w}\right)\dfrac{1}{\varrho^2\mathrm{T}}=\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}\left\{\dfrac{\partial^3\theta}{\partial u\,\partial w^2}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}-\dfrac{\partial^3\theta}{\partial v\,\partial w^2}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right\}+\\[2mm] \qquad+\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial w}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\,.\end{cases}$$

Ora supponiamo di conoscere già

$$\psi_1\ \psi_2\ldots\ldots\psi_{n-1}\,;$$

se deriviamo la 1ª delle (38) $n-1$ volte rapporto a w, la 2ª $n-2$ volte, indi nelle equazioni risultanti facciamo $w=0$ $u=u_0$ $v=v_0$, le derivate successive di $\frac{1}{\varrho}, \frac{1}{\mathrm{T}}$ rapporto a w prenderanno valori assegnati, dipendenti dalla forma della curva C_0, e ne risulteranno, per determinare

$$\left(\frac{\partial\psi_n}{\partial u}\right)^{(0)}\quad\left(\frac{\partial\psi_n}{\partial v}\right)^{(0)}$$

due equazioni lineari della forma

$$\frac{1}{\cos^2\psi_0}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial u}\right)^{(0)}\left(\frac{\partial\psi_n}{\partial u}\right)^{(0)}+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\psi_0}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial v}\right)^{(0)}\left(\frac{\partial\psi_n}{\partial v}\right)^{(0)}=a_n$$
$$\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial v}\right)^{(0)}\left(\frac{\partial\psi_n}{\partial u}\right)^{(0)}-\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial u}\right)^{(0)}\left(\frac{\partial\psi_n}{\partial v}\right)^{(0)}=b_n,$$

dove a_n, b_n sono costanti note. Queste equazioni individuano appunto, come sopra si è asserito, i valori iniziali di $\frac{\partial\psi_n}{\partial u}, \frac{\partial\psi_n}{\partial v}$ purchè non sia nullo il determinante

$$\frac{1}{\cos^2\psi_0}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial u}\right)^{(0)2}+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\psi_0}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial v}\right)^{(0)2}$$

ossia, per la 1ª delle (38), *purchè la curva* C_0 *non abbia in* P_0 *la flessione nulla.*

Lasciando per ora da parte questo caso eccezionale possiamo dire:

Se del sistema di Weingarten si conosce una superficie pseudosferica iniziale ed una curva (analitica), traiettoria ortogonale delle superficie pseudosferiche del sistema, il sistema stesso, quando esista, sarà unico e determinato.

Per accertarsi della sua effettiva esistenza converrebbe esaminare la convergenza della serie (32) corrispondente.

28. Il caso d'eccezione sopra notato può sempre evitarsi, ricorrendo ai teoremi del § 9 M. A. sulla trasformazione di Bäcklund. E infatti se supponiamo che il sistema cercato esista e corrisponda ad una soluzione delle (30) (31), applicando a questo sistema una trasformazione di Bäcklund a costante σ, ne deriviamo un secondo sistema di Weingarten, corrispondente ad una nuova soluzione φ delle (30) (31). Con questa trasformazione la superficie pseudosferica Σ_0 e la curva C_0 si cangieranno in una nuova superficie pseudosferica Σ'_0 e in una curva C'_0, che si potrà dedurre dalla C_0 nel modo spiegato più avanti (n. 29). Ora se nelle formole (37) (39) n. M. A facciamo $w=0$ $u=u_0$ $v=v_0$ osservando che per ipotesi

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^{(0)}=1\quad\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right)^{(0)}=0\quad\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right)^{(0)}=0\,,$$

otteniamo

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial w}\right)^{(0)} = -\frac{1}{\operatorname{sen} \sigma}$$

$$\left(\frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \, \partial w}\right)^{(0)} = -\cot \sigma \cos \theta^{(0)}$$

$$\left(\frac{1}{\operatorname{sen} \varphi} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial u \, \partial w}\right)^{(0)} = -\cot \sigma \operatorname{sen} \theta^{(0)}.$$

Se indichiamo quindi con $\left(\frac{1}{\varrho'}\right)^{(0)}$ la flessione della C'_0 nel punto P'_0 che corrisponde a P_0, avremo per la 1ª delle (38)

$$\left(\frac{1}{\varrho'}\right)^{(0)} = \cos \sigma .$$

Nel sistema di Weingarten derivato è adunque scomparsa la singolarità del sistema iniziale. Determinato questo sistema derivato col metodo del § precedente, basterà applicarvi la trasformazione inversa di Bäcklund per ottenere il sistema di Weingarten cercato.

In particolare si potrà ricorrere alla trasformazione superiore quando la curva data C_0 si riducesse ad una linea retta. Allora si vedrà (sia dalle (38), sia con semplici considerazioni geometriche) che la curva trasformata C'_0 è un' elica circolare, di cui la flessione $\frac{1}{\varrho'}$ e la torsione $\frac{1}{T'}$ sono date da

$$\frac{1}{\varrho'} = \cos \sigma , \ \frac{1}{T'} = \operatorname{sen} \sigma .$$

Ma si può anche, in questo caso, procedere direttamente osservando che se la C_0 è una linea retta, si dovrà avere, *qualunque sia* w:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial w} = 0 , \ \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \, \partial w} = 0 \quad \text{per} \quad u = u_0 , \ v = v_0$$

e perciò le condizioni iniziali che determinano i successivi coefficienti

$$\psi_1 \ \psi_2 \dots \psi_n \dots$$

della serie (32) sono

$$\psi_1^{(0)} = 1 \ \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial u}\right)^{(0)} = 0 \ \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial v}\right)^{(0)} = 0$$

$$\psi_n^{(0)} = 0 \ \left(\frac{\partial \psi_n}{\partial u}\right)^{(0)} = 0 \ \left(\frac{\partial \psi_n}{\partial v}\right)^{(0)} = 0 , \quad n \geq 2 .$$

29. Vediamo ora come si determinano gli elementi caratteristici Σ'_0, C'_0 del sistema derivato, noti che siano quelli Σ_0, C_0 del primitivo. Quanto alla superficie pseudosferica Σ'_0, dedotta per trasformazione di Bäcklund dalla Σ_0, non si ha che a ricordare quanto si disse ai n. 25, 26 M. A; basterà assegnare la direzione del segmento $\overline{P_0 P'_0} = \cos \sigma$, che unisce due dei punti corrispondenti P_0, P'_0 perchè la Σ'_0 risulti pienamente determinata.

Per trovare poi la C'_0 nota che sia la C_0, osserveremo che, per le proprietà della trasformazione di Bäcklund (n. 25, 26 M. A.), fra i punti di C_0, C'_0 viene stabilita una tale corrispondenza che il segmento congiungente due punti corrispondenti

di C_0, C'_0 è costante $= \cos\sigma$ ed ortogonale ad ambedue le curve [1]; inoltre le tangenti a C_0, C'_0 in due punti corrispondenti fanno fra loro l'angolo costante $\frac{\pi}{2} - \sigma$. Tali proprietà definiscono perfettamente la C'_0 nota che sia la C_0 e la direzione del segmento che unisce due dei punti corrispondenti. È infatti la C'_0 è evidentemente descritta sulla superficie canale, inviluppo di una sfera di raggio $= \cos\sigma$ il cui centro percorre la curva C_0, e taglia i circoli di curvatura di questa superficie sotto l'angolo costante σ; basta quindi conoscere un punto di C'_0 per determinarla. Analiticamente, se indichiamo con s l'arco, con $\frac{1}{\varrho}, \frac{1}{T}$ la flessione e la torsione di C_0 e infine con θ l'angolo d'inclinazione del segmento $\overline{PP'}$, che unisce due punti corrispondenti di C_0, C'_0, sulla normale principale di C_0, troveremo, per determinare θ in funzione di s, l'equazione differenziale del 1° ordine:

$$\frac{d\theta}{ds} + \frac{1}{\operatorname{sen}\sigma}\left(1 - \frac{\cos\sigma\cos\theta}{\varrho}\right) - \frac{1}{T} = 0,$$

dalla quale risulta pure la medesima conseguenza.

Osserviamo in fine che per $\sigma = 0$ (trasformazione complementare) la curva derivata C'_0 diventa lo spigolo di regresso della superficie canale (di raggio $= 1$) considerata. Questo spigolo di regresso, corrispondente ai valori di θ dati da

$$\cos\theta = \varrho,$$

è composta di due curve reali e distinte finchè $\varrho < 1$ e coincidenti se $\varrho = 1$. Tenendo conto di queste osservazioni, i risultati dei n. 20-21 M. A. potrebbero enunciarsi sotto forma più geometrica.

[1] Dall'essere costante ed ortogonale a C_0 segue che è ortogonale all'altra C'_0.

RELAZIONE

letta dal Socio R. De Paolis relatore, a nome anche del Socio G. Battaglini, nella seduta del 4 dicembre 1887, sulla Memoria del dott. Giulio Lazzeri, intitolata: *Sopra i sistemi lineari di connessi quaternarî (1, 1).*

« Un connesso quaternario (1, 1) è l'ente geometrico rappresentato da una equazione bilineare nelle coordinate x e v, o y e u, di punti e di piani. Se

$$f = a_x v_\alpha = a'_x v_{\alpha'} = a''_x v_{\alpha''} = a'''_x v_{\alpha'''} = 0$$

è l'equazione di un dato connesso, secondo l'autore il connesso ad esso coniugato (congiunto secondo Battaglini) è quello rappresentato dalla equazione:

$$(a\,a'\,a''\,u)\,(\alpha\,\alpha'\,\alpha''\,y) = 0.$$

« L'autore stesso chiama poi singolare il connesso $f=0$ se per esso è:

$$(a\,a'\,a''\,a''')\,(\alpha\,\alpha'\,\alpha''\,\alpha''') = 0,$$

lo chiama invece *speciale*, se la forma bilineare f si spezza in due fattori che sono due forme lineari, una nelle x e l'altra nelle v. Dopo avere posta la rappresentazione geometrica del connesso $f=0$, anche nei casi particolari in cui si tratti di un connesso singolare o speciale, interpreta geometricamente la relazione che lega un connesso al suo coniugato, e dimostra che il connesso coniugato ad uno singolare è speciale. Queste ed altre semplici considerazioni, contenute nel primo paragrafo della Memoria, servono come introduzione allo studio dei sistemi lineari ∞^i di connessi, râppresentati da equazioni della forma:

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_{i+1} f_{i+1} = 0,$$

essendo le λ parametri arbitrarî indipendenti e le $f=0$ equazioni di dati connessi. Se $i=1$ o $i=2$ abbiamo i fasci o le reti, se $i \gtreqless 8$ abbiamo tutti i possibili connessi quaternarî (1, 1). I paragrafi 2°, 3°, 4° e 5° sono rispettivamente dedicati allo studio dei sistemi lineari ∞^1, ∞^2, ∞^3, ∞^4, come quelli che godono delle proprietà più interessanti, specialmente rispetto ai connessi singolari in essi contenuti; il 6° paragrafo è dedicato allo studio dei rimanenti sistemi lineari ∞^5, ∞^6, ∞^7.

« Tra le proprietà dimostrate dal dott. Lazzeri quelle che più hanno fermato la nostra attenzione sono le seguenti: un fascio di connessi stabilisce una corrispondenza

biunivora tra i punti dello spazio e i raggi di un complesso tetraedrale, corrispondenza già nota, ma che può studiarsi utilmente con l'aiuto del fascio di connessi, che la individua; una rete, o un sistema ∞^4 lineare, di connessi, individua una curiosa reciprocità (3, 3) o (11, 11), dello spazio. Queste reciprocità sono elegantemente studiate dall'autore in tutte le loro circostanze.

« I connessi quaternarî (1, 1) sono stati studiati da più geometri e molte loro proprietà sono perciò note, tuttavia il dott. Lazzeri, nella Memoria di cui parliamo, riesce a scoprirne altre nuove ed interessanti, quindi i Commissarî ne propongono la inserzione negli Atti dell'Accademia ».

Sopra i sistemi lineari di connessi quaternarî (1, 1) ([1]).

Nota del dott. GIULIO LAZZERI

§ I. *Connessi quaternarî* (1, 1) *singolari.*

1. Indichiamo con x_i, u_i le coordinate dei punti e dei piani di uno spazio S, con y_i, v_i quelle dei punti e dei piani di uno spazio S′ sovrapposto. Chiamasi connesso quaternario (m, n) l'ente geometrico rappresentato da un'equazione omogenea di grado m nelle x, omogenea di grado n nelle v.

Rispetto ad un connesso (1, 1)

$$f = a_x v_\alpha = \sum_{ih} a_{ih} v_i x_h \begin{pmatrix} i = 1, 2, 3, 4 \\ h = 1, 2, 3, 4 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

ad un punto x dello spazio S appartengono gli ∞^2 piani v di una stella di S′, e ad un piano v di S′ appartengono gli ∞^2 punti di un piano di S, cioè esiste in S′ una stella y, ogni piano v della quale forma col punto x, scelto ad arbitrio nello spazio S, un elemento del connesso (1), ed un piano u in S, ogni punto del quale forma con un piano dato v di S′ un elemento del connesso stesso.

Fra le coordinate del punto x e quelle del centro della stella y e fra le coordinate dei piani u, v si hanno le relazioni

$$y_i \equiv a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3 + a_{i4} x_4 \equiv \frac{\partial f}{\partial v_i}, \tag{2}$$

$$u_i \equiv a_{1i} v_1 + a_{2i} v_2 + a_{3i} v_3 + a_{4i} v_4 \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i}. \tag{3}$$

Il connesso $f = 0$ dato stabilisce dunque una proiettività fra i due spazi S ed S′.

Per mezzo delle equazioni precedenti la (1) può scriversi

$$\Sigma y_i v_i = 0 \tag{4}$$

$$\Sigma x_i u_i = 0, \tag{5}$$

([1]) Questo breve lavoro non è altro che l'estensione ai connessi quaternarî (1, 1) delle proprietà da me esposte sui sistemi lineari di connessi ternarî (1, 1) nella Memoria *La rappresentazione dello spazio rigato sopra un piano connesso* (Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti, tomo III, serie 6ª.

ed eliminando le x fra le (2), (5), ovvero le v fra le (3), (4) si ottiene l'equazione del connesso coniugato a quello dato [1] che è

$$(6)\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & y_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & y_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & y_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ovvero sotto forma simbolica

$$(a a' a'' u)(\alpha \alpha' \alpha'' y) = 0 .$$

Ponendo

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (a a' a'' a''')(\alpha \alpha' \alpha'' \alpha'''),$$

e chiamando A_{ik} l'elemento reciproco ad a_{ik} in questo determinante, il connesso (6) stabilisce la proiettività data dalle formole

$$(7)\quad x_i \equiv A_{1i}\, y_1 + A_{2i}\, y_2 + A_{3i}\, y_3 + A_{4i}\, y_4$$

$$(8)\quad v_i \equiv A_{i1}\, u_1 + A_{i2}\, u_2 + A_{i3}\, u_3 + A_{i4}\, u_4 ,$$

che è quella stessa stabilita dal connesso (1).

2. Un connesso $f = 0$ ed il suo coniugato stabiliscono una proiettività, purchè il determinante A non sia zero. Chiamerò singolare un connesso (1, 1) che ha nullo il suo determinante.

Essendo $A = 0$, dalle equazioni (2), (3) si ricavano le altre

$$A_{1s}\, y_1 + A_{2s}\, y_2 + A_{3s}\, y_3 + A_{4s}\, y_4 = 0$$

$$A_{s1}\, u_1 + A_{s2}\, u_2 + A_{s3}\, u_3 + A_{s4}\, u_4 = 0 ,$$

le quali provano che non esiste più una vera proiettività fra gli spazi S ed S', perchè i punti dello spazio S', corrispondenti a tutti i punti di S, si trovano sul piano di coordinate $A_{1s}, A_{2s}, A_{3s}, A_{4s}$, che chiamerò α, e tutti i piani corrispondenti ai piani di S' passano per un punto di coordinate $A_{s1}, A_{s2}, A_{s3}, A_{s4}$, che chiamerò A.

Se nella (2) poniamo al posto delle x_i le quantità $x_i + \lambda A_{si}$, e nelle (3) poniamo al posto delle v_i le quantità $v_i + \lambda A_{is}$, è chiaro che si ottiene lo stesso punto y e lo stesso piano u. Dunque dato un punto x di S, a qualunque punto della retta Ax corrisponde uno stesso punto y del piano α nello spazio S', e a tutti i piani di S' che passano per una retta di α corrisponde nello spazio S uno stesso piano u che passa per A. Da ciò si rileva facilmente che:

Un connesso quaternario singolare è determinato da un piano punteggiato α e da una stella di raggi A proiettiva a quello. Gli

[1] Seguo qui le notazioni adottate da Clebsch per i connessi ternarî (*Vorlesungen über Geometrie-Siebente Abtheilung*). Il sig. Battaglini chiama *congiunto* il connesso coniugato (Battaglini, *Sulle forme quaternarie bilineàri*. R. Accademia dei Lincei 1882).

elementi del connesso sono formati da un punto qualunque di un raggio della stella A con un piano qualunque per il punto corrispondente di α, ovvero da un piano qualunque per una retta di α con un punto del piano della stella A corrispondente a quella retta.

Chiamerò stella e piano principale del connesso la stella A ed il piano α.

3. Dato un connesso singolare, il suo determinante è nullo, e perciò gli elementi reciproci a quelli di una linea o colonna in tale determinante sono proporzionali agli elementi reciproci degli elementi di un'altra linea o colonna. Perciò è facile vedere che l'equazione del connesso coniugato diviene

$$(A_{1s}\, y_1 + A_{2s}\, y_2 + A_{3s}\, y_3 + A_{4s}\, y_4) \cdot (A_{t1}\, u_1 + A_{t2}\, u_2 + A_{t3}\, u_3 + A_{t4}\, u_4) = 0\,.$$

Gli elementi di questo connesso sono formati evidentemente dai piani di S per il punto $A \equiv (A_{t1}, A_{t2}, A_{t3}, A_{t4})$ con tutti i punti di S′ e dai punti del piano $\alpha \equiv (A_{1s}, A_{2s}, A_{3s}, A_{4s})$ con tutti i piani di S.

Chiamerò speciale [1] un connesso (1, 1) la cui equazione si spezza in due fattori lineari, ciascuno dei quali contiene una sola serie di variabili, e chiamerò punto e piano principale di esso il punto ed il piano rappresentati dalle equazioni che si ottengono annullando i due fattori nei quali si spezza l'equazione del connesso. Da quanto abbiamo detto sopra risulta:

Il connesso coniugato di un connesso singolare è speciale, ed ha per punto e piano principale il centro della stella ed il piano principale del connesso dato [2].

§ II. *Fasci di connessi* (1, 1).

4. Due connessi (1, 1)

$$f = a_x\, v_\alpha = a'_x\, v_{\alpha'} = \cdots = \sum_{ik} a_{ik}\, v_i\, x_k = 0$$

$$f' = b_x\, v_\beta = b'_x\, v_{\beta'} = \cdots \quad \sum_{ik} b_{ik}\, v_i\, x_k = 0$$

determinano un fascio di connessi

(9) $$\lambda f + \mu f' = 0\,,$$

i quali hanno tutti in comune una coincidenza (1, 1), base del fascio.

Ogni connesso del fascio stabilisce una proiettività fra i due spazi S, S′. Tutti i punti dello spazio S′, che corrispondono ad un punto dello spazio S nelle proiettività stabilite dai vari connessi del fascio, giacciono sopra una retta r', asse del fascio di piani che appartengono ad x rispetto alla coincidenza base del fascio; similmente tutti i piani di S, che corrispondono ad un piano v di S′ nelle proiettività stabilite dai vari connessi del fascio, passano per una retta r, luogo dei punti che appartengono a v rispetto alla coincidenza base del fascio. Così viene stabilita una corrispondenza fra i punti dello spazio S e un sistema C′ di ∞^3 rette dello spazio S′, ed una fra i piani di S′ e un sistema C di ∞^3 rette dello spazio S.

(1) Cnf. Rosanes, *Ueber linear-abhängige Punktsysteme* (Crelle, Bd LXXXVIII).

(2) Battaglini, l. c.

Le formule di trasformazione per passare dalle coordinate dei punti x dello spazio S alle ordinarie coordinate tetraedriche della retta corrispondenti nel sistema C′ sono

$$p_{ik} = \frac{\partial f}{\partial v_i} \cdot \frac{\partial f'}{\partial v_k} - \frac{\partial f'}{\partial v_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial v_k} = a_x\, b_x\, (\alpha\beta)_{ik} .$$

È noto che i sistemi di rette C, C′ sono due complessi tetraedrali; e la loro rappresentazione stabilita in questo §, è quella stessa trovata dal signor Reye (1).

5. Si chiama rapporto anarmonico di quattro connessi del fascio (9) il rapporto anarmonico dei quattro valori corrispondenti del parametro $\frac{\lambda}{\mu}$. È facile vedere che il suo significato geometrico è il seguente:

Rispetto alle ∞^1 proiettività stabilite dai connessi di un fascio, a un punto qualunque x dello spazio S corrispondono i punti di una retta r'.

Il rapporto anarmonico di quattro di questi punti è uguale a quello dei connessi corrispondenti del fascio.

Rispetto alle ∞^1 proiettività stabilite dai connessi di un fascio, a un piano qualunque v dello spazio S′ corrispondono i piani per una retta r.

Il rapporto anarmonico di quattro di questi piani è uguale a quello dei connessi corrispondenti del fascio.

6. Nel fascio di connessi (1) si trovano quattro connessi singolari, che corrispondono ai valori del parametro $\frac{\lambda}{\mu}$ radici dell'equazione

$$(10)\quad M = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} + \mu b_{11}, & \lambda a_{12} + \mu b_{12}, & \lambda a_{13} + \mu b_{13}, & \lambda a_{14} + \mu b_{14} \\ \lambda a_{21} + \mu b_{21}, & \lambda a_{22} + \mu b_{22}, & \lambda a_{23} + \mu b_{23}, & \lambda a_{24} + \mu b_{24} \\ \lambda a_{31} + \mu b_{31}, & \lambda a_{32} + \mu b_{32}, & \lambda a_{33} + \mu b_{33}, & \lambda a_{34} + \mu b_{34} \\ \lambda a_{41} + \mu b_{41}. & \lambda a_{42} + \mu b_{42}, & \lambda a_{43} + \mu b_{43}, & \lambda a_{44} + \mu b_{44} \end{vmatrix} = 0$$

che sotto forma simbolica può scriversi

$$(11)\quad \lambda^4 (aa'a''a''')(\alpha\alpha'\alpha''\alpha''') + 4\lambda^3\mu(\alpha\alpha'\alpha''\beta)(aa'a''b) + 10\lambda^2\mu^2(aa'bb')(\alpha\alpha'\beta\beta') + \\ + 4\lambda\mu^3(abb'b'')(\alpha\beta\beta'\beta'') + \mu^4(bb'b''b''')(\beta\beta'\beta''\beta''') = 0.$$

Indicherò con A_1, A_2, A_3, A_4 i centri delle stelle, con α'_1, α'_2, α'_3, α'_3 i piani principali di questi connessi singolari. Inoltre indicherò con α_1, α_2, α_3, α_4 i piani del tetraedro $A_1\, A_2\, A_3\, A_4$ rispettivamente opposti ai vertici A_1, A_2, A_3, A_4 e con A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 i vertici del tetraedro $\alpha'_1\, \alpha'_2\, \alpha'_3\, \alpha'_4$ rispettivamente opposti ai piani α'_1, α'_2, α'_3, α'_4.

Per determinare il fascio di connessi $\lambda f + \mu f' = 0$ basta che sieno dati invece dei connessi f, f' due connessi qualunque del fascio ed in particolare due connessi singolari, per esempio quelli che hanno A_1, A_2 per centri delle stelle e α'_1, α'_2 per piani punteggiati principali. Ciò equivale a dire che si può generare un complesso tetraedrale C′ ed ottenerne la rappresentazione sullo spazio punteggiato S per mezzo di due stelle A_1, A_2 proiettive a due piani punteggiati α'_1, α'_2, convenendo che la retta r' corrispondente ad un punto x sia la congiungente i punti di α'_1, α'_2, che cor-

(1) Reye, *Geomtrie der Lage.*

rispondono ai raggi $A_1 x$, $A_2 x$ e il punto x' corrispondente ad una retta r' di C' sia il punto d' incontro dei raggi che nelle stelle A_1, A_2 corrispondono ai punti $\alpha'_1 r'$, $\alpha'_2 r'$.

In questo caso, essendo singolari i due connessi dati, l'equazione (11) ha le due radici $\lambda = 0$, $\mu = 0$, e, sopprimendo queste due radici, si riduce all'altra

$$(12)\qquad 2\lambda^2 (aa'a''b)(\alpha\alpha'\alpha''\beta) + 5\lambda\mu (aa'bb')(\alpha\alpha'\beta\beta') + 2\mu^2 (abb'b'')(\alpha\beta\beta'\beta'') = 0\,,$$

che dà i valori del parametro $\frac{\lambda}{\mu}$ corrispondenti agli altri due connessi singolari del fascio.

Si possono costruire geometricamente i centri delle stelle e i piani principali di questi due connessi al pari delle proiettività fra i raggi di quelle stelle e i punti di quei piani.

Infatti, siccome nelle collineazioni stabilite da tutti i connessi del fascio ai punti A_1, A_2, A_3, A_4, corrispondono i punti A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 i piani condotti per A_1, A_2 corrispondenti alla retta $\alpha'_1\,\alpha'_2$ considerata come appartenente al piano α'_2 o α'_1 rispettivamente, sono i piani α_2, α_1. Analogamente i punti di α'_1, α'_2 corrispondenti al raggio $A_1 A_2$, considerato come appartenente alla stella A_2 o alla stella A_1, sono i punti A'_2, A'_1. Un piano condotto per $A'_1 A'_2$ taglia i piani α'_1, α'_2 secondo due rette alle quali corrispondono proiettivamente due piani condotti per la $A_1 A_2$ nelle stelle A_1, A_2. Si ha così nel fascio di piani che ha per asse la retta $A_1 A_2$ una corrispondenza (1, 1). I due elementi uniti sono i piani α_3, α_4. Parimente a un piano condotto per $A_1 A_2$ corrispondono nei piani α'_1, α'_2 due rette passanti per A'_1, A'_2, che sulla retta $\alpha'_1\,\alpha'_2$ determinano una corrispondenza (1, 1), i due elementi uniti della quale sono i punti A'_3, A'_4.

Per istabilire la proiettività fra i raggi per A_4, esempio, e i punti di α'_4, basta osservare che ai raggi $A_4 A_1$, $A_4 A_2$, $A_4 A_3$ corrispondono i punti A'_1, A'_2, A'_3. Se inoltre $x_{(1)}$, $r'_{(1)}$ sono un punto di S e una retta di C' corrispondenti, il raggio $A_4 x_{(1)}$ deve corrispondere al punto $\alpha'_4 r'_{(1)}$. E così la proiettività è stabilita.

Osserverò infine che se il fascio contiene il connesso identico $v_x = 0$ ogni retta r' passa per il punto x corrispondente.

§ III. *Reti di connessi* (1, 1). — *La reciprocità* (3, 3) *nello spazio.*

7. In una rete di connessi (1, 1)

$$(13)\qquad \lambda_1\, a_x^{(1)} v_{\alpha^{(1)}} + \lambda_2\, a_x^{(2)} v_{\alpha^{(2)}} + \lambda_3\, a_x^{(3)} v_{\alpha^{(3)}} = 0$$

esistono ∞^1 connessi singolari che corrispondono ai valori di λ_1, λ_2, λ_3 che soddisfanno l'equazione

$$(14)\qquad M = \begin{vmatrix} \Sigma_i \lambda_i a_{11}^{(i)} & \Sigma_i \lambda_i a_{12}^{(i)} & \Sigma_i \lambda_i a_{13}^{(i)} & \Sigma_i \lambda_i a_{14}^{(i)} \\ \Sigma_i \lambda_i a_{21}^{(i)} & \Sigma_i \lambda_i a_{22}^{(i)} & \Sigma_i \lambda_i a_{23}^{(i)} & \Sigma_i \lambda_i a_{24}^{(i)} \\ \Sigma_i \lambda_i a_{31}^{(i)} & \Sigma_i \lambda_i a_{32}^{(i)} & \Sigma_i \lambda_i a_{33}^{(i)} & \Sigma_i \lambda_i a_{34}^{(i)} \\ \Sigma_i \lambda_i a_{41}^{(i)} & \Sigma_i \lambda_i a_{42}^{(i)} & \Sigma_i \lambda_i a_{43}^{(i)} & \Sigma_i \lambda_i a_{44}^{(i)} \end{vmatrix} = 0.$$

$$(i = 1,\ 2,\ 3,).$$

Indicando con M_{is} gli elementi reciproci agli elementi del determinante M, le coordinate dei centri delle stelle, e dei piani principali di questi connessi singolari sono

$$x_1 \equiv M_{s1} \quad x_2 \equiv M_{s2} \quad x_3 \equiv M_{s3} \quad x_4 \equiv M_{s4}$$
$$v_1 \equiv M_{1s} \quad v_2 \equiv M_{2s} \quad v_3 \equiv M_{3s} \quad v_4 \equiv M_{4s}\,.$$

Per la (14) avremo

$$(15) \qquad \lambda_1 \Sigma_h a_{sh}^{(1)} x_h + \lambda_2 \Sigma_h a_{sh}^{(2)} x_h + \lambda_3 \Sigma_h a_{sh}^{(3)} x_h = 0$$

$$(16) \qquad \lambda_1 \Sigma_h a_{hs}^{(1)} v_h + \lambda_2 \Sigma_h a_{hs}^{(2)} v_h + \lambda_3 \Sigma_h a_{hs}^{(3)} v_h = 0\,.$$

Eliminando le λ_i fra le (15) ovvero fra le (16), otterremo l'equazioni della curva C, luogo dei centri delle stelle e della sviluppabile σ inviluppo dei piani principali dei connessi singolari della rete. La curva C e la sviluppabile σ sono dunque i luoghi rappresentati dalle equazioni che si ottengono, ponendo uguali a zero i minori delle matrici

$$(17) \qquad \left\| \begin{matrix} \Sigma_h a_{1h}^{(1)} x_h & \Sigma_h a_{2h}^{(1)} x_h & \Sigma_h a_{3h}^{(1)} x_h & \Sigma_h a_{4h}^{(1)} x_h \\ \Sigma_h a_{1h}^{(2)} x_h & \Sigma_h a_{2h}^{(2)} x_h & \Sigma_h a_{3h}^{(2)} x_h & \Sigma_h a_{4h}^{(2)} x_h \\ \Sigma_h a_{1h}^{(3)} x_h & \Sigma_h a_{2h}^{(3)} x_h & \Sigma_h a_{3h}^{(3)} x_h & \Sigma_h a_{4h}^{(3)} x_h \end{matrix} \right\|$$

$$(18) \qquad \left\| \begin{matrix} \Sigma_h a_{h1}^{(1)} v_h & \Sigma_h a_{h2}^{(1)} v_h & \Sigma_h a_{h3}^{(1)} v_h & \Sigma_h a_{h4}^{(1)} v_h \\ \Sigma_h a_{h1}^{(2)} v_h & \Sigma_h a_{h2}^{(2)} v_h & \Sigma_h a_{h3}^{(2)} v_h & \Sigma_h a_{h4}^{(2)} v_h \\ \Sigma_h a_{h1}^{(3)} v_h & \Sigma_h a_{h2}^{(3)} v_h & \Sigma_h a_{h3}^{(3)} v_h & \Sigma_h a_{h4}^{(3)} v_h \end{matrix} \right\|\,.$$

Ora le due superficie del 3° ordine

$$\varphi_4 = \left| \begin{matrix} \Sigma_h a_{1h}^{(1)} x_h & \Sigma_h a_{2h}^{(1)} x_h & \Sigma_h a_{3h}^{(1)} x_h \\ \Sigma_h a_{1h}^{(2)} x_h & \Sigma_h a_{2h}^{(2)} x_h & \Sigma_h a_{3h}^{(2)} x_h \\ \Sigma_h a_{1h}^{(3)} x_h & \Sigma_h a_{2h}^{(3)} x_h & \Sigma_h a_{3h}^{(3)} x_h \end{matrix} \right| = 0,$$

$$\varphi_3 = \left| \begin{matrix} \Sigma_h a_{1h}^{(1)} x_h & \Sigma_h a_{2h}^{(1)} x_h & \Sigma_h a_{4h}^{(1)} x_h \\ \Sigma_h a_{1h}^{(2)} x_h & \Sigma_h a_{2h}^{(2)} x_h & \Sigma_h a_{4h}^{(2)} x_h \\ \Sigma_h a_{1h}^{(3)} x_h & \Sigma_h a_{2h}^{(3)} x_h & \Sigma_h a_{4h}^{(3)} x_h \end{matrix} \right| = 0$$

hanno in comune un luogo del 9° ordine, del quale fa parte la cubica comune alle quadriche rappresentate dalle equazioni che si ottengono annullando i minori della matrice

$$\left\| \begin{matrix} \Sigma_h a_{1h}^{(1)} x_h & \Sigma_h a_{1h}^{(2)} x_h & \Sigma_h a_{1h}^{(3)} x_h \\ \Sigma_h a_{2h}^{(1)} x_h & \Sigma_h a_{2h}^{(2)} x_h & \Sigma_h a_{2h}^{(3)} x_h \end{matrix} \right\|\,.$$

Tale cubica non è comune alle altre superficie di 3° ordine le cui equazioni si ottengono annullando gli altri minori della matrice (17), dunque:

La curva C luogo dei centri delle stelle principali di una rete di connessi (1, 1) è una curva del 6° ordine; l'inviluppo σ dei piani principali dei connessi stessi è una sviluppabile di 6ª classe.

I punti di C e i piani di σ si corrispondono univocamente.

8. Ad un punto x di S nelle collineazioni stabilite dai connessi della rete corrispondono i punti di un piano che è quello appartenente ad x rispetto a tutti i connessi della rete. Le formule di trasformazione si ottengono ponendo le v_i proporzionali ai minori della matrice (17), ovvero le x_i proporzionali ai minori della matrice (18). Dunque:

Una rete di connessi (1, 1) stabilisce una reciprocità (3, 3) fra i punti dello spazio S e i piani dello spazio S'.

La curva C e la sviluppabile σ sono la curva e la sviluppabile fondamentali degli spazi S, S' in questa reciprocità.

È chiaro che questa reciprocità è quella stessa stabilita dal signor Cremona per mezzo di tre spazi proiettivi [1].

Per determinare una rete di connessi, basta che sieno dati tre dei suoi connessi singolari. Si deduce da ciò che alle proposizioni precedenti si può dare il seguente enunciato.

Si prendano tre stelle A_1, A_2, A_3 nello spazio S, rispettivamente proiettive a tre piani α'_1, α'_2, α'_3 dello spazio S'. Per mezzo di queste stelle e di questi piani si stabilisce una reciprocità (3, 3) fra i punti di S e i piani di S', convenendo che il piano v corrispondente ad un punto x sia quello determinato dai tre punti di α'_1, α'_2, α'_3 corrispondenti ai raggi A_1x, A_2x, A_3x; e che il punto x corrispondente a un piano v sia il punto d'incontro dei tre piani che nelle stelle A_1, A_2, A_3 corrispondono alle rette $\alpha'_1 v$, $\alpha'_2 v$, $\alpha'_3 v$.

10. Se i tre connessi $a_x^{(1)} v_{\alpha^{(1)}} = 0$, $a_x^{(2)} v_{\alpha^{(2)}} = 0$, $a_x^{(3)} v_{\alpha^{(3)}} = 0$ definiscono tre collineazioni che lasciano invariato lo stesso tetraedro, preso questo per tetraedro fondamentale, le equazioni dei connessi stessi divengono

$$\Sigma a_i^{(1)} v_i x_i = 0$$

$$\Sigma a_i^{(2)} v_i x_i = 0$$

$$\Sigma a_i^{(3)} v_i x_i = 0 ,$$

e le formule della reciprocità di cui abbiamo parlato nei numeri precedenti divengono

$$\begin{aligned} v_1 &\equiv k_1 x_2 x_3 x_4 & \qquad x_1 &\equiv k_1 v_2 v_3 v_4 \\ v_2 &\equiv k_2 x_3 x_4 x_1 & x_2 &\equiv k_2 v_3 v_4 v_1 \\ v_3 &\equiv k_3 x_4 x_1 x_2 & x_3 &\equiv k_3 v_4 v_1 v_2 \\ v_4 &\equiv k_4 x_1 x_2 x_3 & x_4 &\equiv k_4 v_1 v_2 v_3 , \end{aligned}$$

[1] Cremona, *Mémoire de Géometrie pure sur les surfaces du troisième ordre* (Crelle. Vol. 68).

dove k_1, k_2, k_3, k_4 sono proporzionali ai minori della matrice

$$\left\| \begin{matrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} & a_4^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} & a_4^{(2)} \\ a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)} & a_4^{(3)} \end{matrix} \right\| .$$

La curva comune alle superficie imagini delle stelle di S′ si spezza evidentemente nei sei spigoli del tetraedro fondamentale, e la sviluppabile comune alle superficie imagini dei piani di S si spezza pure nei sei spigoli stessi.

11. Se uno dei connessi che determinano la rete è il connesso identico $v_x = 0$, si ottiene una speciale reciprocità (3, 3) nella quale ogni punto giace sul piano corrispondente. In un'altra *Nota* ho dimostrato [1] che questa è la sola reciprocità, oltre i sistemi nulli che gode di una tale proprietà.

Se per definire la rete prendiamo oltre al connesso identico due dei connessi singolari della rete stessa, si vede facilmente che la reciprocità indicata si può costruire per mezzo di due stelle A_1, A_2 proiettive a due piani α'_1, α'_2, convenendo che a un punto x corrisponda il piano v definito dal punto x stesso e dai punti dei piani α'_1, α'_2 che corrispondono ai raggi A_1x, A_2x; e che il punto x, corrispondente a un piano v dato, sia il punto comune al piano v stesso e ai piani delle stelle A_1, A_2 che corrispondono alle rette $\alpha'_1 v$, $\alpha'_2 v$.

§ IV. *Sistemi lineari di* ∞^3 *connessi quaternari* (1, 1).

12. In un sistema lineare di ∞^3 connessi (1, 1)

$$\lambda_1\, a_x^{(1)} v_{\alpha^{(1)}} + \lambda_2\, a_x^{(2)} v_{\alpha^{(2)}} + \lambda_3\, a_x^{(3)} v_{\alpha^{(3)}} + \lambda_4\, a_x^{(4)} v_{\alpha^{(4)}} = 0 \tag{19}$$

ne esistono ∞^2 singolari che soddisfanno l'equazione

$$M = \begin{vmatrix} \Sigma_i \lambda_i a_{11}^{(i)} & \Sigma_i \lambda_i a_{12}^{(i)} & \Sigma_i \lambda_i a_{13}^{(i)} & \Sigma_i \lambda_i a_{14}^{(i)} \\ \Sigma_i \lambda_i a_{21}^{(i)} & \Sigma_i \lambda_i a_{22}^{(i)} & \Sigma_i \lambda_i a_{23}^{(i)} & \Sigma_i \lambda_i a_{24}^{(i)} \\ \Sigma_i \lambda_i a_{31}^{(i)} & \Sigma_i \lambda_i a_{32}^{(i)} & \Sigma_i \lambda_i a_{33}^{(i)} & \Sigma_i \lambda_i a_{34}^{(i)} \\ \Sigma_i \lambda_i a_{41}^{(i)} & \Sigma_i \lambda_i a_{42}^{(i)} & \Sigma_i \lambda_i a_{43}^{(i)} & \Sigma_i \lambda_i a_{44}^{(i)} \end{vmatrix} = 0 \tag{20}$$

$$(i = 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Indicando con M_{is} i minori di questo determinante e con x_i, v_i le coordinate del centro della stella e del piano principale del connesso singolare corrispondente ad una soluzione della (20), si ha

$$x_1 = M_{s1}\,, \quad x_2 = M_{s2}\,, \quad x_3 = M_{s3}\,, \quad x_4 = M_{s4}$$
$$v_1 = M_{1s}\,, \quad v_2 = M_{2s}\,, \quad v_3 = M_{3s}\,, \quad v_4 = M_{4s}\,.$$

[1] *Sulle reciprocità birazionali nel piano e nello spazio.* Rendiconti della r. Accademia dei Lincei, Vol. II, 2° Sem., 1886.

Per la (20) abbiamo

$$\Sigma_i \lambda_i \Sigma_h a_{sh}^{(i)} x_h = 0$$

$$\Sigma_i \lambda_i \Sigma_h a_{hs}^{(i)} v_h = 0$$

e quindi, eliminando le λ_i, si vede che i centri delle stelle e i piani principali dei connessi singolari del sistema costituiscono la coppia di superficie

$$\begin{vmatrix} \Sigma_h a_{1h}^{(1)} x_h & \Sigma_h a_{1h}^{(2)} x_h & \Sigma_h a_{1h}^{(3)} x_h & \Sigma_h a_{1h}^{(4)} x_h \\ \Sigma_h a_{2h}^{(1)} x_h & \Sigma_h a_{2h}^{(2)} x_h & \Sigma_h a_{2h}^{(3)} x_h & \Sigma_h a_{2h}^{(4)} x_h \\ \Sigma_h a_{3h}^{(1)} x_h & \Sigma_h a_{3h}^{(2)} x_h & \Sigma_h a_{3h}^{(3)} x_h & \Sigma_h a_{3h}^{(4)} x_h \\ \Sigma_h a_{4h}^{(1)} x_h & \Sigma_h a_{4h}^{(2)} x_h & \Sigma_h a_{4h}^{(3)} x_h & \Sigma_h a_{4h}^{(4)} x_h \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \Sigma_h a_{h1}^{(1)} v_h & \Sigma_h a_{h1}^{(2)} v_h & \Sigma_h a_{h1}^{(3)} v_h & \Sigma_h a_{h1}^{(4)} v_h \\ \Sigma_h a_{h2}^{(1)} v_h & \Sigma_h a_{h2}^{(2)} v_h & \Sigma_h a_{h2}^{(3)} v_h & \Sigma_h a_{h2}^{(4)} v_h \\ \Sigma_h a_{h3}^{(1)} v_h & \Sigma_h a_{h3}^{(2)} v_h & \Sigma_h a_{h3}^{(3)} v_h & \Sigma_h a_{h3}^{(4)} v_h \\ \Sigma_h a_{h4}^{(1)} v_h & \Sigma_h a_{h4}^{(2)} v_h & \Sigma_h a_{h4}^{(3)} v_h & \Sigma_h a_{h4}^{(4)} v_h \end{vmatrix} = 0$$

ossia sotto forma simbolica

$$\left(\alpha^{(1)} \alpha^{(2)} \alpha^{(3)} \alpha^{(4)}\right) \; a_x^{(1)} \; a_x^{(2)} \; a_x^{(3)} \; a_x^{(4)} = 0$$

$$\left(a^{(1)} \; a^{(2)} \; a^{(3)} \; a^{(4)}\right) \; v_{\alpha^{(1)}} v_{\alpha^{(2)}} v_{\alpha^{(3)}} v_{\alpha^{(4)}} = 0 \; .$$

Queste equazioni rappresentano la coppia di superficie comuni a tutti i connessi del sistema dato. Dunque:

La coppia di superficie comune agli ∞^3 connessi (1, 1) di un sistema lineare è formata dal luogo dei centri delle stelle e dall'inviluppo dei piani principali dei connessi singolari del sistema.

§ V. *Sistemi lineari di* ∞^4 *connessi* (1, 1). — *Una reciprocità* (11,11) *nello spazio.*

13. In un sistema lineare Ξ di ∞^4 connessi (1, 1)

$$\lambda_1 a_x^{(1)} v_{\alpha^{(1)}} + \lambda_2 a_x^{(2)} v_{\alpha^{(2)}} + \lambda_3 a_x^{(3)} v_{\alpha^{(3)}} + \lambda_4 a_x^{(4)} v_{\alpha^{(4)}} + \lambda_5 a_x^{(5)} v_{\alpha^{(5)}} = 0$$

ne esistono ∞^3 singolari che corrispondono ai sistemi di valori delle λ_i per i quali è nullo il determinante M formato come nei n. 7 e 12.

Indicando al solito con M_{is} i minori di M, con x_i v_i le coordinate del centro della stella e del piano principale del connesso singolare corrispondente a una soluzione λ_i della equazione

$$M = 0 ,$$

si ha al solito

$$x_1 \equiv M_{s1} , \quad x_2 \equiv M_{s2} , \quad x_3 \equiv M_{s3} , \quad x_4 \equiv M_{s4}$$

$$v_1 \equiv M_{1s} , \quad v_2 \equiv M_{2s} , \quad v_3 \equiv M_{3s} , \quad v_4 \equiv M_{4s} ,$$

e per conseguenza

$$\Sigma_i \lambda_i \Sigma_h a_{sh}^{(i)} x_h = 0 \tag{21}$$

$$\Sigma_i \lambda_i \Sigma_h a_{hs}^{(i)} v_h = 0 . \tag{22}$$

$$(i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

Se ne deduce che le λ_i sono proporzionali ai minori delle due matrici

$$\left\| \begin{matrix} \Sigma_h a_{1h}^{(1)} x_h & \Sigma_h a_{1h}^{(2)} x_h & \Sigma_h a_{1h}^{(3)} x_h & \Sigma_h a_{1h}^{(4)} x_h & \Sigma_h a_{1h}^{(5)} x_h \\ \Sigma_h a_{2h}^{(1)} x_h & \Sigma_h a_{2h}^{(2)} x_h & \Sigma_h a_{2h}^{(3)} x_h & \Sigma_h a_{2h}^{(4)} x_h & \Sigma_h a_{2h}^{(5)} x_h \\ \Sigma_h a_{3h}^{(1)} x_h & \Sigma_h a_{3h}^{(2)} x_h & \Sigma_h a_{3h}^{(3)} x_h & \Sigma_h a_{3h}^{(4)} x_h & \Sigma_h a_{3h}^{(5)} x_h \\ \Sigma_h a_{4h}^{(1)} x_h & \Sigma_h a_{4h}^{(2)} x_h & \Sigma_h a_{4h}^{(3)} x_h & \Sigma_h a_{4h}^{(4)} x_h & \Sigma_h a_{4h}^{(5)} x_h \end{matrix} \right\|$$

$$\left\| \begin{matrix} \Sigma_h a_{h1}^{(1)} v_h & \Sigma_h a_{h1}^{(2)} v_h & \Sigma_h a_{h1}^{(3)} v_h & \Sigma_h a_{h1}^{(4)} v_h & \Sigma_h a_{h1}^{(5)} v_h \\ \Sigma_h a_{h2}^{(1)} v_h & \Sigma_h a_{h2}^{(2)} v_h & \Sigma_h a_{h2}^{(3)} v_h & \Sigma_h a_{h2}^{(4)} v_h & \Sigma_h a_{h2}^{(5)} v_h \\ \Sigma_h a_{h3}^{(1)} v_h & \Sigma_h a_{h3}^{(2)} v_h & \Sigma_h a_{h3}^{(3)} v_h & \Sigma_h a_{h3}^{(4)} v_h & \Sigma_h a_{h3}^{(5)} v_h \\ \Sigma_h a_{h4}^{(1)} v_h & \Sigma_h a_{h4}^{(2)} v_h & \Sigma_h a_{h4}^{(3)} v_h & \Sigma_h a_{h4}^{(4)} v_h & \Sigma_h a_{h4}^{(5)} v_h \end{matrix} \right\|$$

che indicherò con

$$A^4_{(1)_x} , \ A^4_{(2)_x} , \ A^4_{(3)_x} , \ A^4_{(4)_x} , \ A^4_{(5)_x} ; \quad \mathcal{A}^4_{(1)_v} , \ \mathcal{A}^4_{(2)_v} , \ \mathcal{A}^4_{(3)_v} , \ \mathcal{A}^4_{(4)_v} , \ \mathcal{A}^4_{(5)_v} ,$$

e che simbolicamente sono espressi nel modo seguente:

$$A^4_{(1)_x} = (\alpha^{(2)} \alpha^{(3)} \alpha^{(4)} \alpha^{(5)}) \, a_x^{(2)} a_x^{(3)} a_x^{(4)} a_x^{(5)} \qquad \mathcal{A}^4_{(1)_v} = (a^{(2)} a^{(3)} a^{(4)} a^{(5)}) \, v_{\alpha^{(2)}} v_{\alpha^{(3)}} v_{\alpha^{(4)}} v_{\alpha^{(5)}}$$

$$A^4_{(2)_x} = (\alpha^{(3)} \alpha^{(4)} \alpha^{(5)} \alpha^{(1)}) \, a_x^{(3)} a_x^{(4)} a_x^{(5)} a_x^{(1)} \qquad \mathcal{A}^4_{(2)_v} = (a^{(3)} a^{(4)} a^{(5)} a^{(1)}) \, v_{\alpha^{(3)}} v_{\alpha^{(4)}} v_{\alpha^{(5)}} v_{\alpha^{(1)}}$$

$$A^4_{(3)_x} = (\alpha^{(4)} \alpha^{(5)} \alpha^{(1)} \alpha^{(2)}) \, a_x^{(4)} a_x^{(5)} a_x^{(1)} a_x^{(2)} \qquad \mathcal{A}^4_{(3)_v} = (a^{(4)} a^{(5)} a^{(1)} a^{(2)}) \, v_{\alpha^{(4)}} v_{\alpha^{(5)}} v_{\alpha^{(1)}} v_{\alpha^{(2)}}$$

$$A^4_{(4)_x} = (\alpha^{(5)} \alpha^{(1)} \alpha^{(2)} \alpha^{(3)}) \, a_x^{(5)} a_x^{(1)} a_x^{(2)} a_x^{(3)} \qquad \mathcal{A}^4_{(4)_v} = (a^{(5)} a^{(1)} a^{(2)} a^{(3)}) \, v_{\alpha^{(5)}} v_{\alpha^{(1)}} v_{\alpha^{(2)}} v_{\alpha^{(3)}}$$

$$A^4_{(5)_x} = (\alpha^{(1)} \alpha^{(2)} \alpha^{(3)} \alpha^{(4)}) \, a_x^{(1)} a_x^{(2)} a_x^{(3)} a_x^{(4)} \qquad \mathcal{A}^4_{(5)_v} = (a^{(1)} a^{(2)} a^{(3)} a^{(4)}) \, v_{\alpha^{(1)}} v_{\alpha^{(2)}} v_{\alpha^{(3)}} v_{\alpha^{(4)}}$$

Si ha dunque

$$(23)\qquad \lambda_1:\lambda_2:\lambda_3:\lambda_4:\lambda_5 = \mathrm{A}^4_{(1)_x}:\mathrm{A}^4_{(2)_x}:\mathrm{A}^4_{(3)_x}:\mathrm{A}^4_{(4)_x}:\mathrm{A}^4_{(5)_x}$$

$$(24)\qquad \lambda_1:\lambda_2:\lambda_3:\lambda_4:\lambda_5 = A^4_{(1)_v}:A^4_{(2)_v}:A^4_{(3)_v}:A^4_{(4)_v}:A^4_{(5)_v}\,.$$

Sostituendo nelle (21) alle λ_i i valori proporzionali dati dalle (24) e nelle (22) alle λ_i i valori proporzionali dati dalle (23) si ha

$$(25)\qquad \Sigma_i\, x_i\, A_{si} = 0$$

$$(26)\qquad \Sigma_i\, v_i\, \mathrm{L}_{is} = 0$$

dove per brevità si è posto

$$A_{si} = \Sigma_h\, a^{(h)}_{si}\, A^4_{(h)_v}\,.$$

$$\mathrm{L}_{is} = \Sigma_h\, a^{(h)}_{is}\, \mathrm{A}^4_{(h)_x}$$

ossia

$$(27)\qquad A_{si} = \begin{vmatrix} a^{(1)}_{si} & a^{(2)}_{si} & a^{(3)}_{si} & a^{(4)}_{si} & a^{(5)}_{si} \\ \Sigma_h a^{(1)}_{h1} v_h & \Sigma_h a^{(2)}_{h1} v_h & \Sigma_h a^{(3)}_{h1} v_h & \Sigma_h a^{(4)}_{h1} v_h & \Sigma_h a^{(5)}_{h1} v_h \\ \Sigma_h a^{(1)}_{h2} v_h & \Sigma_h a^{(2)}_{h2} v_h & \Sigma_h a^{(3)}_{h2} v_h & \Sigma_h a^{(4)}_{h2} v_h & \Sigma_h a^{(5)}_{h2} v_h \\ \Sigma_h a^{(1)}_{h3} v_h & \Sigma_h a^{(2)}_{h3} v_h & \Sigma_h a^{(3)}_{h3} v_h & \Sigma_h a^{(4)}_{h3} v_h & \Sigma_h a^{(5)}_{h3} v_h \\ \Sigma_h a^{(1)}_{h4} v_h & \Sigma_h a^{(2)}_{h4} v_h & \Sigma_h a^{(3)}_{h4} v_h & \Sigma_h a^{(4)}_{h4} v_h & \Sigma_h a^{(5)}_{h4} v_h \end{vmatrix}$$

$$(28)\qquad \mathrm{L}_{is} = \begin{vmatrix} a^{(1)}_{is} & a^{(2)}_{is} & a^{(3)}_{is} & a^{(4)}_{is} & a^{(5)}_{is} \\ \Sigma_h a^{(1)}_{1h} x_h & \Sigma_h a^{(2)}_{1h} x_h & \Sigma_h a^{(3)}_{1h} x_h & \Sigma_h a^{(4)}_{1h} x_h & \Sigma_h a^{(5)}_{1h} x_h \\ \Sigma_h a^{(1)}_{2h} x_h & \Sigma_h a^{(2)}_{2h} x_h & \Sigma_h a^{(3)}_{2h} x_h & \Sigma_h a^{(4)}_{2h} x_h & \Sigma_h a^{(5)}_{2h} x_h \\ \Sigma_h a^{(1)}_{3h} x_h & \Sigma_h a^{(2)}_{3h} x_h & \Sigma_h a^{(3)}_{3h} x_h & \Sigma_h a^{(4)}_{3h} x_h & \Sigma_h a^{(5)}_{3h} x_h \\ \Sigma_h a^{(1)}_{4h} x_h & \Sigma_h a^{(2)}_{4h} x_h & \Sigma_h a^{(3)}_{4h} x_h & \Sigma_h a^{(4)}_{4h} x_h & \Sigma_h a^{(5)}_{4h} x_h \end{vmatrix}$$

Risolvendo tre delle equazioni (25) rispetto alla x, si ha

$$x_1:x_2:x_3:x_4 = \Phi_{l1}:\Phi_{l2}:\Phi_{l3}:\Phi_{l4}$$

dove Φ_{ls} sono gli elementi reciproci agli elementi del determinante

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix}.$$

Dalla (27) si ricavano le identità

$$\Sigma_i A_{is} v_i = 0 ,$$

dalle quali si ha:

$$v_1 : v_2 : v_3 : v_4 = \Phi_{1s} : \Phi_{2s} : \Phi_{3s} : \Phi_{4s} ,$$

ossia

$$\begin{array}{llll} \Phi_{11} = v_1 \Phi_1 & \Phi_{21} = v_2 \Phi_1 & \Phi_{31} = v_3 \Phi_1 & \Phi_{41} = v_4 \Phi_1 \\ \Phi_{12} = v_1 \Phi_2 & \Phi_{22} = v_2 \Phi_2 & \Phi_{32} = v_3 \Phi_2 & \Phi_{42} = v_4 \Phi_2 \\ \Phi_{13} = v_1 \Phi_3 & \Phi_{23} = v_2 \Phi_3 & \Phi_{33} = a_3 \Phi_3 & \Phi_{43} = v_4 \Phi_3 \\ \Phi_{14} = v_1 \Phi_4 & \Phi_{24} = v_2 \Phi_4 & \Phi_{34} = v_3 \Phi_4 & \Phi_{44} = v_4 \Phi_4 , \end{array}$$

dove $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$ sono funzioni di 11° grado delle v_i. Perciò si ha

(29) $$x_i = \Phi_i .$$

Analogamente dalle (26) si ricava

$$v_1 : v_2 : v_3 : v_4 = F_{1l} : F_{2l} : F_{3l} : F_{4l} ,$$

dove F_{sl} sono gli elementi reciproci agli elementi del determinante

$$\begin{vmatrix} L_{11} & L_{21} & L_{31} & L_{41} \\ L_{12} & L_{22} & L_{32} & L_{42} \\ L_{13} & L_{23} & L_{33} & L_{43} \\ L_{14} & L_{24} & L_{34} & L_{44} \end{vmatrix} .$$

Dalle (28) si ricavano le identità

$$\Sigma_i L_{si} x_i = 0$$

e da queste le altre

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = F_{s1} : F_{s2} : F_{s3} : F_{s4}$$

ossia

$$\begin{array}{llll} F_{11} = x_1 F_1 , & F_{12} = x_2 F_1 , & F_{13} = x_3 F_1 , & F_{14} = x_4 F_1 \\ F_{21} = x_1 F_2 . & F_{22} = x_2 F_2 , & F_{23} = x_3 F_2 , & F_{24} = x_4 F_2 \\ F_{31} = x_1 F_3 , & F_{32} = x_2 F_3 , & F_{33} = x_3 F_3 , & F_{34} = x_4 F_3 \\ F_{41} = x_1 F_4 , & F_{42} = x_2 F_4 , & F_{43} = x_3 F_4 , & F_{44} = x_4 F_4 \end{array}$$

dove le F_i sono funzioni di 11° grado delle x. Perciò si ha

(30) $$v_i \equiv F_i .$$

Dunque:

I centri delle stelle e i piani principali degli ∞^3 connessi singolari di un sistema lineare Ξ di ∞^4 connessi (1, 1) stabiliscono una reciprocità birazionale (11, 11) fra i punti di uno spazio S e i piani di uno spazio S'.

§ VI. *Sistemi lineari di* ∞^5, ∞^6, ∞^7 *connessi quaternarî* (1, 1).

14. In un sistema lineare di ∞^5 connessi quaternarî (1, 1)

(31) $$\Sigma_i \lambda_i a_x^{(i)} v_{\alpha^{(i)}} \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

ne esistono ∞^4 singolari, per i quali è nullo il determinante M. Fra le coordinate

dei centri delle stelle e dei piani principali di questi connessi e le soluzioni corrispondenti della equazione $M=0$ si trovano, come nei §§ precedenti, le relazioni

(32) $$\Sigma_i \lambda_i \Sigma_h a_{sh}^{(i)} x_h = 0$$

(33) $$\Sigma_i \lambda_i \Sigma_h a_{hs}^{(i)} v_h = 0 .$$

Indichiamo con V_{lm} il determinante, rispetto alle λ, delle sei equazioni che restano fra le 8 precedenti, lasciando da parte quelle fra le equazioni (32), che corrispondono ai valori l, m di s, e indichiamo con X_{lm} il determinante, rispetto alle λ, delle sei equazioni che restano delle otto equazioni (32), (33), lasciando da parte quelle fra le (33), che corrispondono ai valori l, m di s. Eliminando le λ fra le 8 equazioni suddette, si trova

$$V_{lm}=0 \qquad X_{lm}=0 \qquad (l, m = 1, 2, 3, 4).$$

Tutte queste equazioni sono conseguenza di tre sole di esse per es. delle tre

$$X_{lm}=0 \qquad X_{ln}=0 \qquad X_{lp}=0 ,$$

ovvero delle altre

$$V_{lm}=0 \qquad V_{ln}=0 \qquad V_{lp}=0 ,$$

dove l, m, n, p sono i quattro indici 1, 2, 3, 4 scritti in un ordine qualunque. È facile però dimostrare che è identicamente

$$x_m X_{lm} + x_n X_{ln} + x_p X_{lp} = 0$$
$$v_m V_{lm} + v_n V_{ln} + v_p V_{lp} = 0 .$$

Si deduce da ciò che X_{lm} è divisibile per x_n e per x_p e V_{lm} è divisibile per v_n e per v_p. Posto $\frac{X_{lm}}{x_n x_p} = X'_{lm}$, $\frac{V_{lm}}{v_n v_p} = V'_{lm}$ le identità precedenti divengono

$$X'_{lm} + X'_{ln} + X'_{lp} = 0$$

$$V'_{lm} + V'_{ln} + V'_{lp} = 0 .$$

Si può concludere da ciò che se sono verificate due delle 12 equazioni

$$X'_{lm}=0 \qquad V'_{lm}=0 ,$$

sono verificate tutte. Tali equazioni rappresentano evidentemente connessi (2, 2); dunque:

I centri delle stelle e i piani principali dei connessi singolari di un sistema lineare di ∞^5 connessi quaternarî (1, 1) costituiscono la congruenza comune a due connessi quaternarî (2, 2).

15. In un sistema lineare di ∞^6 connessi quaternarî (1, 1)

$$\Sigma_i \lambda_i a_x^{(i)} v_{\alpha^{(i)}} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) ,$$

ne esistono ∞^5 singolari che hanno nullo il determinante M. Fra le coordinate dei centri delle stelle e dei piani principali di questi connessi e i valori corrispondenti delle λ si hanno le 8 relazioni

$$\Sigma_i \lambda_i \Sigma_h a_{sh}^{(i)} x_h = 0$$

$$\Sigma_i \lambda_i \Sigma_h a_{hs}^{(i)} v_h = 0 .$$

Indichiamo con X_1, X_2, X_3, X_4; V_1, V_2, V_3, V_4 i determinanti formati con sette delle equazioni precedenti, scartando successivamente la 1ª, la 2ª, ..., si dimostra facilmente che è identicamente

$$\frac{V_i}{x_i} = \frac{X_h}{u_h} = \Omega \qquad (i, h = 1, 2, 3, 4)$$

dove Ω è una funzione omogenea e di 3° grado nelle x, ed omogenea e di 3° grado nelle v. Eliminando dunque le λ fra le equazioni precedenti, si ottiene l'equazione

$$\Omega = 0 .$$

Dunque:

I centri delle stelle e i piani principali dei connessi singolari di un sistema di ∞^6 connessi (1, 1) formano un connesso (3, 3).

16. Finalmente per i centri e gli assi dei connessi singolari di un sistema di ∞^7 connessi (1, 1)

$$\Sigma \lambda_i a_x^{(i)} v_{\alpha^{(i)}} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$$

si hanno le otto relazioni solite

$$\Sigma_i \lambda_i \Sigma_h a_{sh}^{(i)} x_h = 0$$

$$\Sigma_i \lambda_i \Sigma_h a_{hs}^{(i)} v_h = 0 .$$

È facile vedere che il determinante di queste equazioni è identicamente nullo. Dunque:

Ogni elemento (x, v) dello spazio è centro della stella e piano principale di uno e di un solo connesso singolare del sistema.

RELAZIONE

letta dal Socio S. Cannizzaro, relatore, a nome anche del Socio A. Cossa nella seduta del 13 novembre 1887, sulla Memoria del dott. G. Ciamician, intitolata: *Il pirrolo ed i suoi derivati.*

« Il dott. G. Ciamician il quale ha per molti anni lavorato sul pirrolo ed ha scoverto molti derivati di questa singolare sostanza; dopo avere comunicato a questa Accademia volta per volta i risultati delle sue assidue ricerche, ha ora riunito in una sola Memoria tutto quanto è stato fatto sul pirrolo da lui e da altri chimici, e di questo ricco materiale si è servito per discutere la costituzione ed il comportamento chimico del pirrolo, le analogie e le differenze con altre sostanze le quali abbiano con esso, per uno o altro riguardo, qualche somiglianza di costituzione.

« Cotesta riunione e discussione dei fatti è certamente il genere di lavoro il più fecondo per l'ulteriore progresso della chimica organica nello stadio attuale di questa scienza in via di formazione, ed il Ciamician l'ha fatto sul pirrolo con piena cognizione del materiale sperimentale e con giudizio.

« I vostri commissari vi propongono perciò l'inserzione negli Atti dell'Accademia di questa pregevole ed originale monografia, la quale gioverà notevolmente ai cultori della chimica del carbonio ed allo ulteriore sviluppo di questo ramo di scienza ».

Il pirrolo e i suoi derivati.
Memoria del dott. GIACOMO CIAMICIAN.

PREFAZIONE

Nelle seguenti pagine io ho tentato di esporre brevemente tutto ciò che da me e da altri è stato fatto e scritto fin'ora intorno al pirrolo, cercando nello stesso tempo di porre in rilievo le analogie che esso presenta con quelle sostanze alle quali più si avvicina per la sua costituzione. Ho creduto poi utile di far seguire a questa succinta esposizione un quadro completo di tutti i derivati del pirrolo di cui si conosce la composizione chimica.

Forse a taluni il mio tentativo sembrerà prematuro, nè io invero mi nascondo che la chimica del pirrolo si trovi ancora nelle prime fasi del suo sviluppo; ma se anche l'opera mia, più che a rilevare quello che già è stato fatto, servirà a mettere in evidenza quello che ancora rimane a fare, essa conseguirà già per questo gran parte del suo scopo, perchè io la considero, più che altro, come aiuto e sprone a proseguire nello studio di questo gruppo di composti, che per varietà di forme, può essere annoverato fra i più interessanti della chimica organica. Su due punti ancora, che mi servirono di guida nello scrivere il presente lavoro, vorrei richiamare l'attenzione di chi legge: lo sviluppo straordinario che la chimica organica vanta in questi ultimi anni, rende sempre più malagevole a chi studia, il seguirne i rapidi progressi, per cui è generalmente sentito il bisogno di ordinare al più presto il ricco materiale che giornalmente esce dalle tante officine scientifiche, e di ciò fanno fede le pregevoli Monografie, che si sono pubblicate in questi ultimi anni, sopra singoli gruppi di composti organici. Oltre a questa ragione, ch'io chiamerei materiale, ce n'è un'altra ancora che mi ha spinto a scrivere la storia della chimica del pirrolo, e che io stimo ancora più importante. Chi presentemente si occupa di chimica organica deve cercare di coordinare i fatti nell'intento di stabilire il comportamento chimico dei grandi gruppi di composti organici, perchè dalla conoscenza esatta dei caratteri chimici dei diversi aggruppamenti di atomi di carbonio si potrà conseguire quella delle leggi che li governano, di quelle leggi che formano la preoccupazione costante di tutti i cultori della chimica. Io ho cercato perciò di mettere in rilievo con la presente Monografia il comportamento chimico del pirrolo ed i suoi caratteri principali.

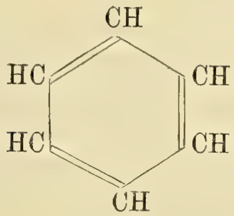
Trieste, settembre 1887.

Giacomo Ciamician.

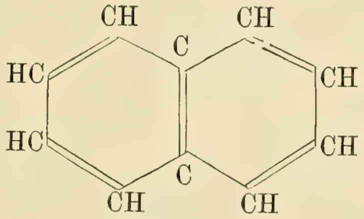
I.

La piridina, il pirrolo, il tiofene ed il furfurano considerati come sostanze analoghe alla benzina.

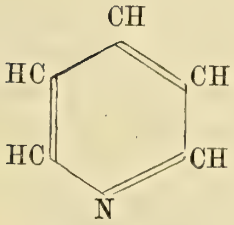
In questi ultimi anni molti cultori della chimica organica si sono dedicati allo studio di una grande classe di composti, che per la loro costituzione e per il loro comportamento hanno una notevole analogia con la benzina ed i suoi derivati. Il nucleo fondamentale di queste sostanze non è formato esclusivamente da atomi di carbonio ma contiene anche altri corpi semplici. E assai notevole il fatto, che mentre il comportamento chimico del carbonio è tanto diverso da quello di tutti gli altri elementi, l'azoto, l'ossigeno e lo zolfo possano rimpiazzare uno o due residui metinici del benzolo, senza produrre un mutamento completo delle proprietà del nucleo aromatico. La piridina e la chinolina, il pirrolo e l'indolo, il tiofene ed il tionaftene, il furfurano ed il cumarone, somigliano nel loro comportamento, in molti punti, tanto al benzolo ed alla naftalina, da invogliare anche i più restii alle speculazioni teoriche a rintracciare le cause di queste relazioni. Presentemente però non è possibile di determinare le vere ragioni di queste somiglianze, perchè non si conoscono ancora le leggi che regolano l'equilibrio degli atomi, e non si può che mettere in rilievo l'analogia di questi fenomeni con altri, che sono più comuni e meglio studiati. Volendo considerare i composti in questione come derivati dal benzolo, si osserva che i mutamenti prodotti nelle proprietà di questo, per la sostituzione di uno o due metini con l'azoto, lo zolfo o l'ossigeno, sono comparabili a quelli che avvengono nei composti organici, per lo scambio degli atomi d'idrogeno con altri elementi, negli ordinarî processi di sostituzione.



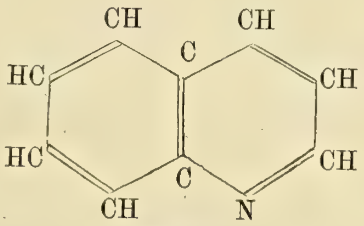
benzolo



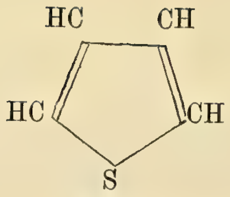
naftalina



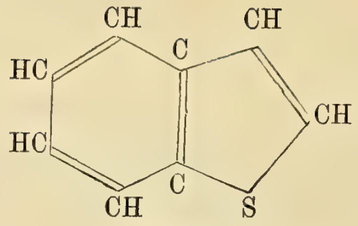
piridina



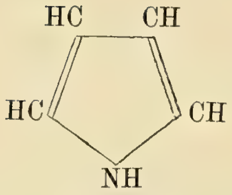
chinolina



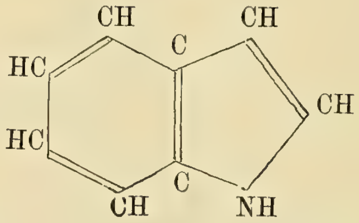
tiofene



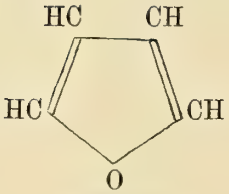
tionaftene



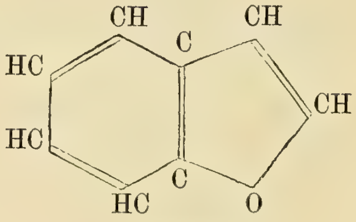
pirrolo



indolo



furfurano



cumarone

In tutti questi casi si osserva che sono rispettate le regole della valenza, perchè un atomo d'azoto rimpiazza un residuo metinico trivalente, mentre il gruppo bivalente di due metini è sostituito dallo zolfo, dall'ossigeno o dal bivalente residuo imminico (*), e si nota inoltre, che tutti questi elementi sostituenti il carbonio, sono appunto quelli, pei quali il carbonio ha maggiore affinità. Si può quindi comprendere perchè i nuovi edificî atomici possiedono, come la benzina, un alto grado di stabilità; e se ancora si tiene conto del fatto, che in tutte le sostanze in questione la sostituzione non si estende che ad uno o due atomi di carbonio del residuo aromatico, si comprende pure come, rimanendo inalterata la parte maggiore della molecola, questa mantenga quasi inalterato il suo carattere speciale. Il nuovo composto si avvicinerà tanto più alle sostanze aromatiche, quanto più passiva sarà la funzione del nuovo atomo entrato a far parte del nucleo (furfurano, tiofene), ed assumerà un carattere più o meno diverso, quando l'elemento che fa parte della nuova combinazione atomica eserciterà per suo conto una funzione attiva e bene determinata (pirrolo, piridina). Che la prevalenza del residuo aromatico sull'altra parte della molecola, ne determini il carattere, apparisce evidente se si comparano le relazioni che esistono

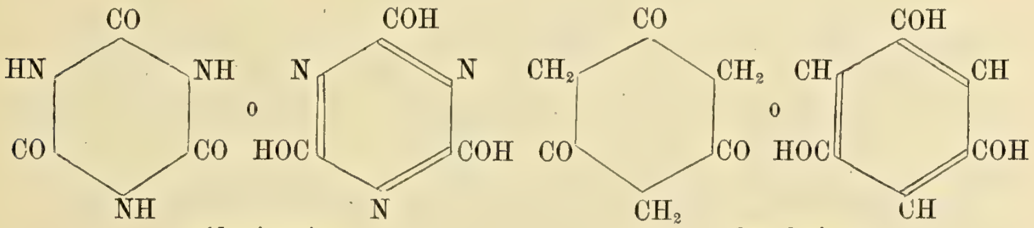
(*) Lo scrivente propone di chiamare « *immino* » il residuo NH, invece di dire residuo imminico, già che si dice ossidrile invece di residuo ossidrilico.

fra il benzolo e la piridina, con quelle che passano fra l'acetilene e l'acido cianidrico.

$[CH]_6$ e $[CH]_5N$ .... $[CH]_2$ e $[CH]N$

benzolo piridina acetilene acido cianidrico

Nell'ultimo caso l'analogia di comportamento è così poco sensibile, che forse non tutti i chimici saranno egualmente disposti a riconoscerla. Si può però ricordare che all'acetilene non manca un certo carattere acido, il quale si rende più manifesto nell'acido prussico, che questo come l'acetilene tende a trasformarsi in un composto polimero formato da sei atomi e che inoltre in questi processi di condensazione l'acido prussico può sostituire in parte l'altro composto, per cui si forma la piridina [1] invece del benzolo. Infine si può dimostrare che la disposizione degli atomi in forma di catena chiusa non basta a dare ai composti organici caratteri simili a quelli della benzina, comparando le proprietà dell'acido cianurico a quelle della floroglucina, a cui corrisponderebbe per analogia di formola:



acido cianurico floroglucina

Anche qui come nell'acido prussico il numero d'atomi d'azoto, eguale a quello degli atomi di carbonio, determina la differenza di comportamento.

La sostituzione nella benzina di uno o due residui metinici con l'azoto o l'immino, dà ai composti che ne derivano caratteri, che in parte sono comuni ai composti azotati organici in genere. Sembra prima di tutto, che le proprietà alcaline di queste sostanze dipendano in certo modo dal numero d'atomi di carbonio, come apparisce dalla seguente serie:

$[CH]_5N$	$[CH]_4NH$	$[CH]_3N$	$[CH]_2NH$	$[CH]N$
piridina	pirrolo	?	?	acido cianidrico

Il pirrolo ha proprietà alcaline appena sensibili e l'ultimo termine della serie è un acido. La piridina ha carattere decisamente alcalino, ma non è base molto energica; si può dire che il suo comportamento stia fra quello dell'anilina e quello del benzolo. Essa ha di questo la grande stabilità e resistenza all'azione del calore, degli acidi e degli ossidanti, ma non ha eguale al benzolo la tendenza a dare i prodotti di sostituzione. I derivati alogenati si formano difficilmente, del pari i solfoacidi e mancano del tutto i nitrocomposti. Con l'anilina la piridina ha comune specialmente il comportamento con i joduri alcoolici [2]. I composti di addizione con queste sostanze si trasformano, a temperature elevate, in omologhi della piridina. Qui va notato il fatto scoperto da Ladenburg [3], che il jodoetilato di piridina può dare alla temperatura di 290° piccole quantità di etilbenzolo con formazione di joduro ammonico;

in questa interessante reazione, il joduro di etile reagendo ulteriormente sulla γ-etilpiridina già formatasi, ne sposta l'azoto ed effettua l'unico caso finora conosciuto di diretto passaggio dalla serie piridica all'aromatica.

Le isomerie nei prodotti di sostituzione della piridina sono del tutto corrispondenti a quelle dei derivati del benzolo, se si considera la piridina come prodotto monosostituito. Nella serie piridica, come nell'aromatica, i prodotti di sostituzione con radicali alcoolici danno per ossidazione gli acidi carbossilici, che servirono di base per la determinazione dei posti nelle isomerie. Si osserva inoltre nei punti di fusione dei derivati monosostituiti piridici, la stessa regola che regge pei derivati bisostituiti aromatici ([4]); per esempio i punti di fusione dei tre acidi piridinmonocarbonici, corrispondono a quelli dei tre acidi amidobenzoici. In base a questa corrispondenza Skraup classificò pel primo i tre acidi carbopiridici assegnando al composto più fusibile la posizione « orto » (α) ed a quello meno fusibile la posizione « para » (γ), e questa ipotesi è stata poi largamente confermata dalle ulteriori esperienze.

acido picolinico o α-piridincarbonico p. f. 134,5-136°	acido nicotico o β-piridincarbonico p. f. 231-232°	acido isonicotico o γ-piridincarbonico p. f. 309°,5
acido o-amidobenzoico p. f. 144-145°	acido m-amidobenzoico p. f. 174°	acido p-amidobenzoico p. f. 186-187°

È pure degno di nota, che l'acido picolinico è fra i tre quello meno stabile e merita inoltre d'essere rilevato il fatto, che fra gli acidi piridincarbonici solamente quelli che contengono almeno uno dei carbossili in posizione « orto » per rispetto all'azoto, danno coi sali ferrosi delle colorazioni caratteristiche ([5]). Questa regola ricorda alcune altre della serie aromatica (*).

Dove la piridina si stacca dai composti aromatici e dove la presenza dell'azoto fa più specialmente sentire la sua influenza è nel comportamento con l'idrogeno nascente. Il nucleo piridico offre poca resistenza alle sostanze riducenti, esso addiziona molto facilmente sei atomi d'idrogeno ([6]), diventando base secondaria, ed alcuni derivati della piridina, come p. es. gli acidi piridincarbonici, vengono trasformati già per azione dell'amalgama di sodio in sostanze appartenenti alla serie grassa, con catena aperta di atomi di carbonio, mentre l'azoto viene eliminato in forma di ammoniaca ([7]).

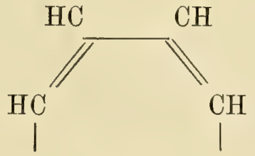
Il comportamento delle chinoline corrisponde perfettamente a quello della piridina, e come questa riproduce in gran parte i fenomeni che si osservano nei derivati del benzolo; le prime ricordano in molte reazioni la naftalina.

I caratteri chimici di quelle sostanze che contengono nel loro nucleo due atomi d'azoto in luogo di due metini aromatici sono troppo poco noti per potere essere discussi.

Il pirrolo, il tiofene ed il furfurano si possono considerare come sostanze derivanti dal benzolo, in cui due residui metinici sono sostituiti dall'immino, dallo zolfo

(*) Segnatamente nei fenoli e negli acidi ossicarbossilici aromatici si osserva, che soltanto quelli che appartengono alla serie « orto » danno coi sali ferrici delle colorazioni caratteristiche.

e dall'ossigeno. Simile al tiofene sarà di certo il selenofene ([8]) che è ancora pochissimo studiato. La costituzione di queste sostanze è stata dedotta da una serie di reazioni ed è stata sottoposta a tante prove sperimentali, che può ritenersi ora quasi definitivamente stabilita. La discussione in proposito verrà fatta più tardi. L'analogia di costituzione di questi tre corpi si riflette fedelmente nei loro caratteri e nel corso di questa Monografia si terrà sempre conto trattando, del pirrolo, delle sue relazioni con gli altri due composti. Il loro comportamento ricorda più o meno quello delle sostanze aromatiche. La somiglianza del tiofene col benzolo è veramente sorprendente, meno spiccata apparisce quella del furfurano ed il pirrolo è quello dei tre composti, che più si scosta dal benzolo. Queste relazioni sono dovute senza dubbio ai caratteri aromatici che il residuo:



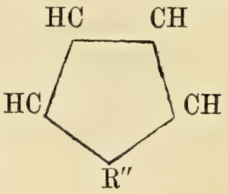
mantiene quasi inalterati nei nuovi edificî atomici, sebbene non si sappia presentemente se esso possegga anche da solo quella stabilità, che acquista quando è unito ad un radicale bivalente. Dal fatto che nel tiofene sono più marcate le analogie con le sostanze benzeniche, si deve dedurre che lo zolfo altera il meno possibile le proprietà del residuo C_4H_4, ed invero si sa che le metamorfosi del tiofene avvengono senza che lo zolfo vi prenda parte diretta. Da quest'ultimo punto di vista si comporta egualmente anche l'ossigeno del furfurano, ma al completo sviluppo dei caratteri aromatici nuoce probabilmente in questo corpo la funzione troppo negativa dell'ossigeno. Le proprietà dello zolfo invece sono tali da renderlo adatto a fare in certi casi le veci del carbonio: lo zolfo è, oltre a quest'ultimo, il solo elemento che essendo solido dà un biossido gassoso, che in molti punti ricorda l'anidride carbonica; lo zolfo a temperature non troppo elevate sopra il suo punto di ebollizione ha una molecola composta di sei atomi; esso è l'unico elemento, oltre al carbonio, che forma delle catene composte di cinque atomi riuniti direttamente fra di loro ed oltre alla sua affinità pel carbonio in genere va notata nei composti organici l'analogia del solfossile col carbossile (*). Nessuno di certo vorrebbe affermare che il carbonio abbia in genere un comportamento analogo allo zolfo, ma pure non si può non riconoscere, che nelle proprietà di questo si trovano in parte le ragioni della meravigliosa somiglianza fra tiofene e benzolo. Nel pirrolo la presenza dell'immino dà al composto un carattere speciale, che non si manifesta con reazione decisamente alcalina, ma che sta fra quello dell'anilina e del fenolo. Le analogie del pirrolo coi fenoli si rivelano, come si vedrà più tardi, in parecchie reazioni.

Il tiofene, il furfurano ed il pirrolo hanno comune col benzolo la stabilità, che nel tiofene è maggiore che negli altri due composti. Le tre sostanze resistono come

(*) Basti qui ricordare l'analogia degli acidi ossibenzoici con gli acidi fenolsolfonici e specialmente quella dell'acido fenolortosolfonico con l'acido salicilico, di cui possiede anche le proprietà antisettiche.

il benzolo all'azione del calore e si formano, come questo, per reazioni pirogeniche, ma differiscono dal primo ed anche dalla piridina per la poca resistenza che offrono all'azione degli acidi; il pirrolo è il più alterabile, segue poi il furfurano ed anche il tiofene, che è il più resistente, viene distrutto dall'acido solforico concentrato.

Esclusivamente proprie al gruppo:



sembrano essere certe reazioni per cui si formano delle materie coloranti: coll'isatina (9), col fenantrenchinone, col chinone, col gliossal, coll'acido fenilgliossilico ed altri composti dichetonici (10) tutti i tre corpi in questione ed in oltre il selenoxene [$C_4H_2(CH_3)_2Se$] (11), il tionaftene (12) e gli indoli (13) danno delle colorazioni, massime in presenza d'acido solforico, che variano spesso fra l'azzurro ed il rosso.

Gli alogeni danno con tutte le sostanze tetroliche i prodotti di sostituzione, sembra però che soltanto il furfurano ed i suoi derivati, sieno in grado di addizionare gli alogeni senza che si formino contemporaneamente i prodotti di sostituzione; il bromo secco trasforma p. e. l'acido piromucico nel suo tetrabromuro (14). Gli atomi di idrogeno del pirrolo e del tiofene vengono invece sostituiti tanto facilmente dagli alogeni, che i composti di addizione non si formano, che quando gli idrogeni sono già tutti rimpiazzati, come nei percloruri: $C_4Cl_4S.Cl_4$ (15), $C_4Cl_3N.Cl_4$ (16) e $C_4Cl_3\langle{}^{N}_{CO}\rangle.Cl_4$ (17). Nel pirrolo poi lo scambio ha luogo più facilmente che in qualunque altro composto organico, tanto che è difficile di ottenere i derivati sostituiti parzialmente (18). Volendo classificare le tre sostanze in ragione della mobilità dei loro atomi di idrogeno risulta la seguente disposizione:

Pirrolo > Tiofene > Furfurano,

che esprime anche il comportamento con altri radicali negativi. Se si trattasse di introdurre in questa serie anche il benzolo, esso verrebbe probabilmente ad occupare il posto fra il tiofene ed il furfurano; gli idrogeni tiofenici sono certamente più facilmente sostituibili di quelli del benzolo, come lo dimostra il fatto che in un miscuglio di queste due sostanze il bromo attacca tutto il tiofene (formando monobromo e bibromotiofene) (19) prima di agire sul benzolo. Se il benzolo sia da collocarsi prima o dopo il furfarano è per ora difficile a decidere, ma è probabile che il benzolo formi più facilmente del furfurano i prodotti di sostituzione.

Il comportamento del tiofene coll'acido solforico è del tutto analogo a quello del benzolo ed i solfoacidi del gruppo del primo, che si formano più facilmente di quelli aromatici (20), corrispondono in tutto a questi ultimi. I solfoacidi del gruppo del pirrolo e del furfurano sono ancora troppo poco noti.

Il tiofene ed i derivati del pirrolo formano i nitrocomposti come le sostanze

aromatiche, solamente è da notarsi (ciò che dal resto vale anche per i solfoacidi), che per la poca resistenza che i composti tetrolici offrono agli acidi in genere, è necessario di usare delle cautele speciali per evitare la distruzione completa della materia, che si vuole trasformare in nitrocomposto. Il gruppo del furfurano è stato anche da questo lato ancora troppo poco studiato. I nitroderivati del tiofene e del pirrolo differiscono però essenzialmente dai nitroderivati benzenici per il loro comportamento con l'idrogeno nascente. Gli amido-derivati corrispondenti non si ottengono che con grande difficoltà e sono poco stabili ([21]); sembra inoltre che anche altri composti tetrolici si prestino male a questo genere di riduzioni, perchè anche i solfacidi danno a fatica i solfidrati relativi ([22]). Per es. nella riduzione dell'acido tiofensolfinico [$C_4H_3(SO_2H)S$] non si ottengono che piccole quantità di solfidrato di tienile [$C_4H_3S.SH$], mentre la riduzione dell'analogo composto aromatico dà quantitativamente il tiofenolo. Non è stato possibile di ottenere finora dalla tiofenina (amidotiofene), sostanze corrispondenti alla rosanilina, ed anche in questo l'amidotiofene si scosta molto dall'anilina. Si può accennare qui per incidenza che si ottiene molto facilmente un difeniltienilmetano facendo agire il benzidrolo [$(C_6H_5)_2CHOH$] sul tiofene in presenza di anidride fosforica ([23]); la reazione avviene già a temperatura ordinaria (ciò che prova anco una volta la mobilità degli idrogeni tiofenici) ed il composto che si forma corrisponde al trifenilmetano. Il difeniltienilmetano non ha dato però finora in nessun modo nè i nitrocomposti, nè il carbinolo, che dà il composto aromatico ([23]). Di materie coloranti di questo genere, non si conosce nella serie tetrolica che il verde di malachite derivante dalle aldeidi tiofenica e furfuranica.

Gli omologhi superiori del tiofene corrispondono quasi in tutto a quelli della benzina. Si ottennero mediante la reazione di Fittig e quella di Friedel e Crafts e si osservò, che in questi processi si verificano le stesse regole, stabilite per le sintesi degl'idrocaburi aromatici. Si è notato che, col metodo di Fittig, è più difficile d'introdurre il metile che i radicali a catena normale più lunga ([24]), e si è avvertito inoltre, che i radicali alcoolici non normali si attaccano difficilmente al tienile come al fenile ([25]). L'introduzione di più radicali alcoolici è un'operazione altrettanto malagevole nel tiofene che nel benzolo ([24]). Gli omologhi del furfurano non sono stati ottenuti finora dal furfurano ed anche quelli del pirrolo si ebbero per sintesi speciali, perchè mancano i derivati mono- e bialogenati del pirrolo ed i composti tetraalogenati non si prestano affatto a queste trasformazioni. Il comportamento degli omologhi del tiofene è analogo a quello degli omologhi del benzolo, essi danno per ossidazione gli acidi tiofencarbonici, che ricordano in tutto quelli aromatici. È da notarsi però, che nella serie tiofenica l'ossidazione delle catene laterali non conduce sempre direttamente agli acidi carbonici, ma che inoltre si ottengono, alle volte, i composti intermedî, che segnano le fasi del processo d'ossidazione, ciò che come è noto non avviene nella serie aromatica. L'etiltiofene dà per ossidazione, oltre all'acido α- tiofenico, anche l'acido tienilgliossilico [$C_4H_3S.CO.COOH$] ([26]). Il propiltiofene si comporta però come il propilbenzolo ([27]). Quando vi sono due catene laterali l'ossidazione avviene in due fasi come nei derivati aromatici. Gli omologhi del pirrolo hanno un comportamento del tutto diverso, che ricorda quello dei fenoli superiori, e la loro trasformazione in acidi pirrolcarbonici è altrettanto difficile di quella degli omologhi del fenolo in ossiacidi aromatici ([18]).

Gli acidi tiofencarbonici si ottengono inoltre direttamente dal tiofene mediante le reazioni di Merz ([28]) e di Würtz ([29]) e con quella del cloruro d'urea $\left[CO<^{NH_2}_{Cl} \right]$ ([30]). Gli acidi pirrolcarbonici si formano invece mediante quei processi che servono ad ottenere gli ossiacidi aromatici ([18]). Gli acidi carbonici della serie furfurica non sono stati ottenuti finora dal furfurano.

Le aldeidi tiofenica e furfuranica, (la pirrolica non è ancora conosciuta), ricordano moltissimo l'aldeide benzoica, non tanto per il loro modo di formazione, quanto pel loro comportamento. Ambedue danno per azione della potassa l'acido e l'alcool corrispondente ([31]) ([32]), tutte e due si condensano mediante la reazione di Perkin ([33]) ([34]) per dare gli acidi analoghi al cinnamico. Con la dimetilanilina si comportano come la benzaldeide formando il tetrametil-diamido-tienildifenilmetano ([35]) ed il tetrametil-diamido-furfurdifenilmetano ([36]), da cui si ottengono materie coloranti simili al verde di malachite. Il furfurolo forma poi con l'ammoniaca la furfuramide ([37]) e la furfurina ([37]) corrispondenti all'idrobenzamide ed all'amarina; col cianuro potassico la furoina ([38]) che è l'analogo della benzoina. Malgrado ciò però l'aldeide tiofenica somiglia più della furfurica all'aldeide benzoica: la prima si combina con l'acido m-amidobenzoico, dando come l'aldeide benzoica una sostanza senza colore ([33]), il furfurolo invece dà con lo stesso acido, l'acido furfuramidobenzoico ([39]), che è una materia colorante rossa. Del pari non corrispondono al comportamento dell'aldeide benzoica i composti che il furfurolo forma con l'anilina e con altre ammine aromatiche. L'aldeide tiofenica reagisce inoltre coll'acido succinico in modo identico all'essenza di mandorle amare, formando l'ossitionaftene, che corrisponde perfettamente all'α-naftolo ([40]).

I composti chetonici del tiofene e del pirrolo (quelli del furfurano presentemente non sono noti) hanno un interesse speciale e sono importantissimi. Si formano in genere con le stesse reazioni, che permettono di ottenere i composti aromatici corrispondenti, ma con maggiore facilità. I chetoni tiofenici ([41]) si ottengono tutti con i cloruri dei rispettivi acidi in presenza di cloruro d'alluminio, ma più agevolmente degli aromatici, quelli del pirrolo poi si formano senza bisogno d'un cloruro metallico, già per azione delle anidridi degli acidi organici ([18]). I chetoni della serie tiofenica sono quasi tutti liquidi e somigliano moltissimo ai corrispondenti composti benzenici, quelli della serie pirrolica sono solidi, e vanno annoverati fra i più stabili derivati del pirrolo. Il comportamento dei chetoni tiofenici e pirrolici con gli ossidanti è degno di speciale menzione, perchè in questa reazione essi differiscono dagli acetoni aromatici. Mentre questi ultimi si trasformano per ossidazione facilmente negli acidi carbonici e soltanto, in condizioni speciali, si sono potuti ottenere ultimamente anche gli acidi chetonici ([42]), i primi danno per ossidazione sempre gli acidi gliossilici, tanto che massime nelle serie pirrolica è difficile di passare dal chetone all'acido carbonico corrispondente. Così p. es. l'acetotienone ($C_4H_3S.CO.CH_3$) ([43]) ed il pirrilmetilchetone ($C_4H_3NH.CO.CH_3$) ([18]) danno col permanganato potassico l'acido α- tiofenico e l'acido tienilgliossilico ($C_4H_3S.CO.COOH$) e l'acido pirrilgliossilico ($C_4H_3NH.CO.COOH$.) L'acido tienilgliossilico è una sostanza molto interessante perchè da questo si ottengono gli acidi tienilglicolico (tienilmandelico) e tienilacetico ([44]) ed inoltre l'aldeide tiofenica ([43]). L'aldeide pirrolica non si è potuta ottenere fin ora, perchè l'acido

pirrilgliossilico si scompone completamente per azione del calore. Dalla formazione dei composti chetonici apparisce evidente che gl'idrogeni del tiofene, e massime del pirrolo, sono molto più facilmente sostituibili di quelli della benzina.

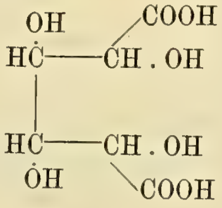
II.

Reazioni nelle quali si forma il pirrolo, processi sintetici per cui si ottengono derivati pirrolici e metodi per preparare il pirrolo.

Runge (45) segnalò pel primo la presenza di una sostanza nel catrame e nell'olio animale, che arrossa vivamente una scheggia d'abete bagnata d'acido cloridrico, e che egli perciò chiamò *pirrolo* (*), ma spetta ad Anderson (46) il merito di avere nel 1857 estratto dall'olio animale il pirrolo puro, e di averne determinato la composizione e le proprietà principali. Il pirrolo si trova fra i prodotti della distillazione secca di molte sostanze azotate organiche e principalmente delle materie proteiche (47); Schützenberger lo trovò anche nei prodotti di decomposizione di queste con la barite a 150° (48). Il pirrolo si forma per diverse reazioni pirogeniche, per cui si comprende facilmente la sua presenza nel catrame del carbone fossile e nei prodotti di distillazione delle ossa; esso si produce in piccola quantità facendo passare l'acetilene e l'ammoniaca (49) o la dietilammina (50) attraverso a tubi roventi e la etilallilamina sull'ossido di piombo riscaldato a 500° (51). A questi modi di formazione del pirrolo corrispondono le sintesi, per le quali si ottiene il tiofene facendo passare attraverso a tubi roventi l'acetilene assieme a vapori di zolfo (52), o il solfuro di etile (53).

Più importante delle reazioni ora accennate, è la formazione del pirrolo dal mucato ammonico, osservata da Schwanert (54) nel 1860, perchè essa, oltre a dare maggiori quantità di prodotto, ha servito di base ad alcune trasformazioni analoghe di altri sali dell'acido mucico, per le quali si sono potuti ottenere parecchi interessanti derivati del pirrolo.

La reazione di Schwanert è interessante anche perchè ha contribuito a mettere in evidenza le relazioni che esistono fra pirrolo, furfurano e tiofene. L'acido mucico, in seguito alla sua costituzione:

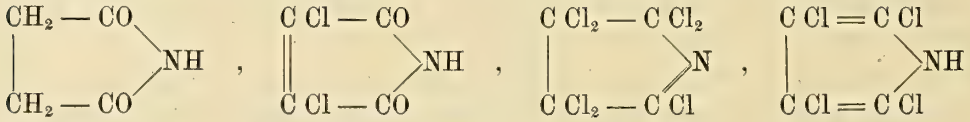


si trasforma per distillazione in acido furfuranomonocarbonico (55) (acido piromucico) e dicarbonico (56) (acido deidromucico) e dà l'acido α-tiofen-monocarbonico (57) se viene

(*) Il nome *pirrolo* deriva dal greco πυρρος, che significa *colore del fuoco*; con questo termine Runge volle alludere alla reazione coll'acido cloridrico, e distinse così il pirrolo dal leucolo (chinolina) e kianolo (anilina), da lui scoperti pure nel catrame.

riscaldato con solfuro di bario a 200-210°; il suo sale ammonico dà invece per una scissione del tutto analoga alle precedenti, l'amide pirrolmonocarbonica ed il pirrolo. Questo ultimo si ottiene poi più abbondantemente riscaldando il mucato ammonico con glicerina a 180-200° ([58]). Nel 1877 Ch. Bell ottenne poi distillando i mucati di metil-, etil- e amilammina, assieme al metil-, etil- ed amilpirrolo le amidi dimetil-, dietil-, e trietil- e diamilcarbopirroliche ([59]); il fenilpirrolo ([60]) venne pure preparato da Köttnitz in modo analogo. È da notarsi che anche i sali dell'acido saccarico ([61]) si comportano similmente. Fra queste reazioni è da annoverarsi anche la formazione di pirrolo dall'acido glutammico osservata da Haitinger ([62]).

La trasformazione dell'imide succinica in pirrolo è una reazione interessante, perchè contribuisce a svelare la costituzione di questo corpo, sebbene sia praticamente di poca importanza. Già nel 1880, Bell ottenne piccole quantità di pirrolo distillando la succinimide sulla polvere di zinco o facendo passare i vapori di quest'ultima, mescolati all'idrogeno, sulla spugna di platino riscaldata ([63]), Ciamician e Silber riuscirono poi ad effettuare questa trasformazione mediante una serie di reazioni, che permettono di ottenere il pirrolo anche in grandi quantità. L'eliminazione dell'ossigeno dall'imide succinica per mezzo del pentacloruro di fosforo riesce male ([64]), mentre invece è facilissima la sostituzione del cloro all'ossigeno nell'imide bicloromaleica, che si ottiene facendo agire il cloro sulla succinimide fusa ([17]). L'imide bicloromaleica si trasforma, per azione del pentacloruro di fosforo in tubi chiusi a 200°, in un percloruro della formola C_4Cl_7N ([16]), che per azione dell'idrogeno nascente non perde tutto il suo cloro, ma si converte in tetracloropirrolo C_4Cl_4NH ([16]). Per ottenere il pirrolo da questa sostanza conviene trasformarla in tetrajodopirrolo, ciò che può farsi agevolmente, bollendola con una soluzione alcoolica di joduro potassico. Il tetrajodopirrolo cosí ottenuto si riduce facilmente con potassa e polvere di zinco ([65]). La serie di queste successive trasformazioni dell'imide succinica può essere rappresentata dalle seguenti formole:



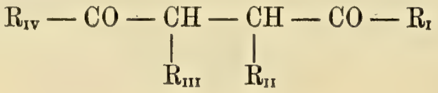
imide succinica, imide bicloromaleica, percloruro di tetracloropirrolo, tetracloropirrolo

C_4I_4NH e C_4H_4NH

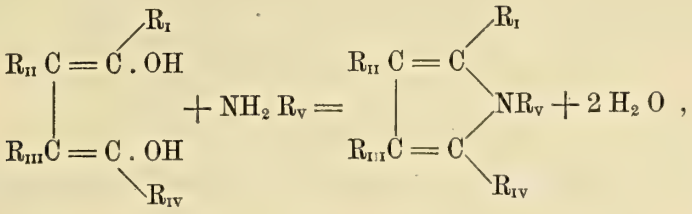
tetrajodopirrolo, pirrolo.

Il passaggio ora descritto dall'imide succinica al pirrolo corrisponde perfettamente alla preparazione del tiofene dall'anidride succinica o dal succinato sodico per mezzo del pentasolfuro o trisolfuro di fosforo col metodo di Volhard e Erdmann ([66]).

In questi ultimi tre anni sono stati ottenuti per via sintetica parecchi derivati del pirrolo, mediante alcune interessanti trasformazioni di certi composti dichetonici, che possono venire rappresentati con la formola generale ([67]):

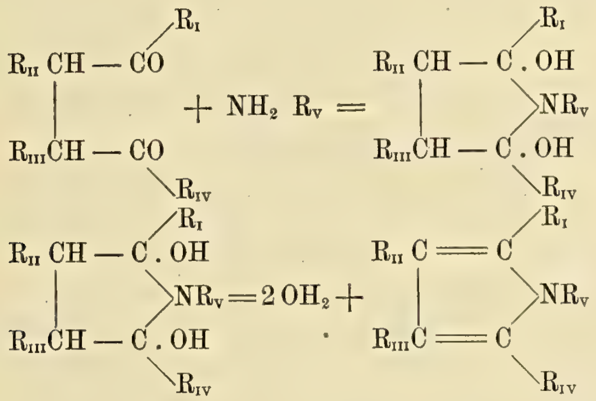


Queste sostanze danno, per azione dell'ammoniaca o delle ammine primarie, una svariata serie di derivati del pirrolo. La reazione che avviene sempre allo stesso modo, può essere interpretata differentemente: si può ammettere che il dichetone, diventi prima alcool terziario e che questo agisca sull'ammoniaca secondo l'equazione:



oppure che il dichetone addizioni prima l'ammoniaca o l'ammina e che il composto, così formatosi, perda spontaneamente due molecole d'acqua diventando derivato pirrolico:

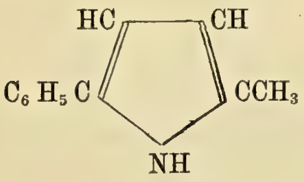
1.
2.

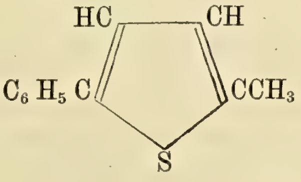


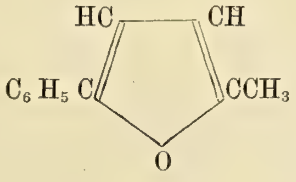
Alcune di queste reazioni sono molto interessanti, perchè permettono di ottenere, partendo dallo stesso composto, oltre al derivato pirrolico, anche il composto furfuranico e tiofenico corrispondente. Così p. es. C. Paal ha potuto preparare dell'acetofenonacetone

$$C_6H_5 . CO - CH_2 - CH_2 - CO . CH_3 ,$$

per azione dell'ammoniaca il metilfenilpirrolo ([68]), per azione del pentasolfuro di fosforo il metilfeniltiofene ([68]) e per azione d'un disidratante, come l'acido cloridrico fumante ([69]) e l'anidride acetica, il metilfenilfurfurano:



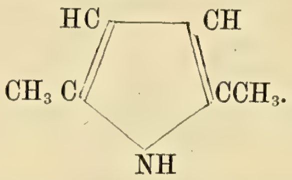




Similmente all'acetofenonacetone si comporta l'acetonilacetone ([70])

$$CH_3 . CO — CH_2 — CH_2 — CO . CH_3 ,$$

da cui si ottiene per azione dell'ammoniaca un dimetilpirrolo



I dichetoni contenenti carbossili, come l'etere etilico dell'acido acetofenonaceto-acetico ([71]):

$$\begin{array}{l} CH_3 . CO — \underset{\displaystyle COOC_2 H_5}{\underset{|}{CH}} — CH_2 — CO . C_6 H_5 , \end{array}$$

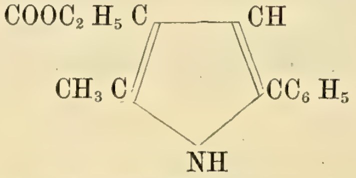
l'etere dietilico dell'acido diacetilsuccinico ([72]) ([67])

$$CH_3 . CO — \underset{\displaystyle COOC_2 H_5}{\underset{|}{CH}} —— \underset{\displaystyle COOC_2 H_5}{\underset{|}{CH}} — CO . CH_3$$

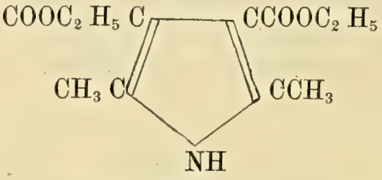
e l'etere dietilico dell'acido diacetil-glutarico ([73])

$$CH_3 . CO — \underset{\displaystyle COOC_2 H_5}{\underset{|}{CH}} —— \underset{\displaystyle CH_2 . COOC_2 H_5}{\underset{|}{CH}} — CO . CH_3 ,$$

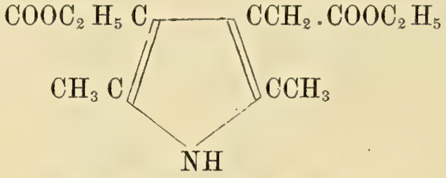
reagiscono del pari con l'ammoniaca e le ammine, come è stato indicato più sopra, dando origine ad una serie di acidi pirrolmonocarbonici e pirroldicarbonici polisostituiti. Con l'ammoniaca p. es. Lederer e Paal ottennero l'etere etilico dell'acido metilfenilpirrolmonocarbonico dal primo di questi composti e Knorr preparò dagli altri due gli eteri dietilici degli acidi dimetilpirroldicarbonico e dimetilpirrolcarbonacetico.



etere metilfenilpirrolmonocarbonico



etere dimetilpirroldicarbonico

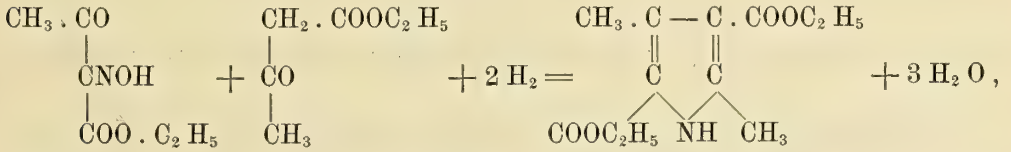


etere dimetilpirrolcarbonacetico

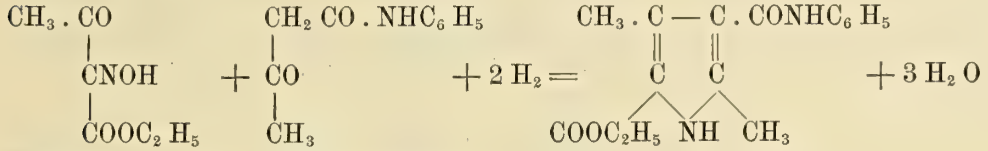
Facendo agire sui cinque composti chetonici accennati, invece dell'ammoniaca, le ammine, gli acidi amidati, gli amidofenoli, le idrazine, l'idrossilammina ecc. si ottengono i derivati corrispondenti dei composti pirrolici ora descritti, in cui l'idrogeno

imminico è sostituito dai diversi radicali. Tutte queste sostanze sono registrate nelle tabelle che accompagnano questa Monografia.

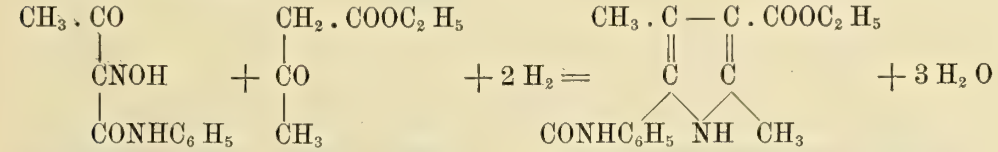
Per rendere completo il quadro delle sintesi dei derivati pirrolici, resta ancora a dire della formazione dell'etere dietilico di un acido dimetilpirroldicarbonico assimmetrico, ottenuto da L. Knorr per azione dell'idrogeno nascente sopra un miscuglio di parti equimolecolari di etere acetoacetico ed etere nitrosoacetoacetico ([67]). La reazione può essere interpretata nel seguente modo:



e che realmente l'etere ottenuto appartenga ad un acido assimmetrico, lo prova il fatto che si ottengono due composti diversi facendo agire l'anilide acetoacetica sull'etere nitrosoacetoacetico, invece dell'anilide nitrosoacetoacetica sull'etere acetoacetico. I due eteri isomeri sono i seguenti:



etere nitrosoacetoacetico — anilide acetoacetica



anilide nitrosoacetoacetica — etere acetoacetico — anilidi degli eteri monoetilici dell'acido dimetilpirroldicarbonico assimmetrico.

Nessuno però dei processi, ora descritti, ad eccezione della distillazione del mucato ammonico, può servire praticamente a preparare il pirrolo. Per procurarsi questa sostanza in grandi quantità conviene ricorrere all'estrazione dall'olio animale ([74]). Quest'ultimo è un miscuglio complessissimo formato principalmente dalle basi della serie piridica e di alcune della serie grassa, dai nitrili degli acidi della forma $C_n H_{2n} O_2$, da una serie di idrocarburi aromatici e finalmente dal pirrolo ed i suoi omologhi. Per preparare il pirrolo si agita la frazione dell'olio, che distilla fra 100° e 150°, con acido solforico diluito e si bolle la parte non alcalina con potassa fino a che cessa lo sviluppo di ammoniaca; distillando ora con vapore acqueo, resta indietro la soluzione acquosa dei sali potassici, provenienti dai nitrili degli acidi grassi, e passa un olio che non contiene altro che i pirroli e gl'idrocarburi. La porzione di questo che bolle fra 110 e 135° viene impiegata per l'estrazione del pirrolo, che può farsi col potassio o colla potassa. In tutti i due modi si ottiene un composto potassico solido: nel primo introducendo il metallo a pezzetti nell'olio lievemente riscaldato, fino a che questo lo

sciogli e [74], nel secondo bollendo a lungo l'olio con un eccesso di potassa solida fusa di fresco [75]. Il composto potassico, che nel secondo caso contiene della potassa, viene separato dall'olio rimasto inalterato (idrocarburi), lavato con etere anidro e decomposto con acqua. Il pirrolo, che si rende libero, viene separato dalla potassa per distillazione con vapore acqueo e sottoposto alla distillazione frazionata [74].

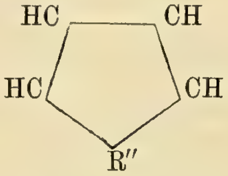
III.

Costituzione del pirrolo, isomerie e nomenclatura dei derivati pirrolici.

Il pirrolo ed il furfurano furono considerati da Limpricht nel 1869 come l'ammina ed il fenolo di un idrocarburo ipotetico [76]

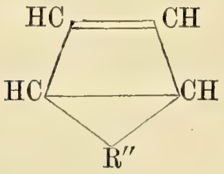
$$\begin{array}{ccc} CH & — & CH \\ \| & & \| \\ CH & — & CH, \end{array}$$

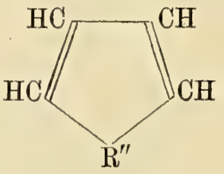
simile al benzolo, e da lui chiamato *tetrolo*; già nell'anno seguente però Baeyer [77] propose per queste sostanze le formole ora generalmente usate e Vittorio Meyer [20] avendo nel 1883 scoperto il tiofene, ne fece risaltare l'analogia con gli altri due corpi. Che la costituzione del pirrolo, tiofene e furfurano possa essere rappresentata dallo schema:

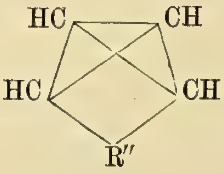


è cosa oramai del tutto accertata, i processi sintetici per cui sono state ottenute queste sostanze ed il loro comportamento hanno tolto ogni incertezza sul modo d'interpretare le loro formole, specialmente dopo che V. Meyer è riuscito ad appianare le difficoltà che apparentemente erano insorte sulla costituzione del tiofene [78].

La questione si fa più difficile se, entrando nella costituzione intima del radicale tetrolico C_4H_4, si cerca di stabilire la disposizione delle quattro valenze, che non sono indicate nello schema suaccennato. Le difficoltà che qui s'incontrano sono della stessa natura di quelle, che si oppongono ad una soluzione definitiva della questione sulla formula di struttura della benzina, e similmente a questa, al pirrolo ed alle altre due sostanze spetterebbe una delle tre seguenti formole:

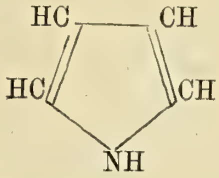




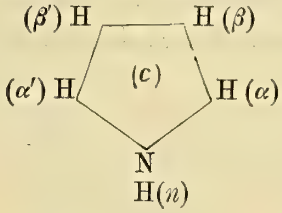


Senza voler entrare in una discussione sulla maggiore o minore probabilità di ciascuna di queste diverse disposizioni delle quattro valenze del carbonio, cosa che

presentemente sarebbe altrettanto difficile quanto oziosa, si può dire, che se realmente, come sembra probabile, alla benzina spetta la formola di Kekulè, il pirrolo e gli altri due corpi, per la grande analogia che hanno col benzolo, sono da rappresentarsi con le formole ora generalmente usate. Il pirrolo verrà perciò, nella presente Monografia, sempre rappresentato collo schema:



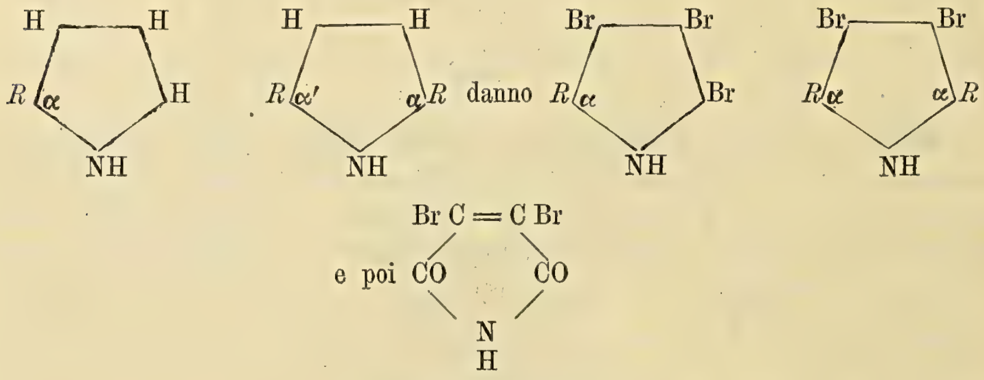
In seguito a questa simmetrica disposizione degli atomi d'idrogeno, che come si è detto, non può più essere posta in dubbio, essi si dividono in due gruppi, l'uno formato dall'idrogeno imminico e l'altro dai quattro idrogeni legati a carbonio; questi ultimi poi essendo disposti simmetricamente, per rispetto all'immino, si suddividono in due paia, di cui ciascuno è composto da due atomi tra di loro equivalenti. Da ciò risulta che la sostituzione di un atomo d'idrogeno nel pirrolo con un radicale qualsiasi può dar luogo alla formazione di tre derivati monosostituiti diversi, la sostituzione di due atomi, con radicali uguali, alla formazione di sei isomeri; del pari sei isomeri può produrre la sostituzione di tre atomi e nuovamente di tre quella di quattro idrogeni. Perciò è necessario, di stabilire pei derivati del pirrolo una nomenclatura razionale, che permetta subito di riconoscerne la costituzione. A questo scopo lo scrivente si associa volentieri alla proposta di M. Dennstedt ([79]), di designare l'idrogeno imminico con la lettera *n* e di indicare indistintamente gli altri quattro con la lettera *c*, e propone poi, di segnare, quando occorra, con le lettere greche α α' gli atomi d'idrogeno vicini all'azoto e con le lettere β β' gli altri due, come fece V. Meyer pel tiofene:



Inoltre è necessario di dare dei nomi speciali, simili a quelli usati nella serie aromatica, a certi radicali che più sovente si riscontrano nei derivati del pirrolo. La nomenclatura proposta a questo scopo da Ciamician e Dennstedt ([80]) corrisponde perfettamente a quella impiegata da V. Meyer e dai suoi allievi pel tiofene. Si chiama *pirrile* il residuo $[C_4H_3NH]'$, che corrisponde al tienile $[C_4H_3S]'$, *pirroile* il residuo $\left[\begin{matrix} C_4H_3NH \\ \dot{C}O \end{matrix}\right]'$ che corrisponde al tenoile $[C_4H_3S.CO]'$ e finalmente *pirrilene* il radicale bivalente $[C_4H_2NH]''$ e *pirrolene* il radicale $[C_4H_3N]''$, che è bivalente anch'esso. Per ultimo sarebbe pure utile di avere un termine per indicare i derivati pirrolici, furfuranici e tiofenici in genere. O. Jacobsen, nel suo bell'articolo su

queste sostanze nel dizionario del Ladenburg (*), li chiama composti del gruppo del furfurano in senso lato, però onde evitare equivoci, chi scrive, ha preferito di chiamare in questa Memoria *derivati tetrolici* tutti i composti in questione, lasciando al residuo bivalente C_4H_4 l'antico nome di *tetrolo*, sebbene non s'abbia da intendere con questo l'idrocarburo ipotetico di Limpricht.

Il problema della determinazione dei posti nei derivati del pirrolo è stato risoluto finora per vie diverse. Nei composti, che si ottennero direttamente per sintesi, la posizione dei radicali è per lo più già determinata dalla natura stessa della sostanza, che si trasforma in derivato pirrolico. Così, a modo d'esempio, i posti del metile e del fenile, e del metile, fenile e carbossietíle nei prodotti ottenuti da Paal dall'acetofenonacetone ([68]) e dall'etere acetofenonacetoacetico ([71]), sono determinati dalla costituzione di questi due composti, ed i due derivati pirrolici sono perciò l'α-metil-α'-fenilpirrolo e l'etere etilico dell'acido α'-metil-α-fenil-β'-carbonico; per le stesse ragioni gli eteri ottenuti da Knorr da quelli degli acidi diacetilsuccinico ([67]) e nitrosoacetoacetico ([67]) devono essere gli eteri dietilici degli acidi $\alpha\alpha'$-dimetil-$\beta\beta'$-pirroldicarbonico e $\alpha\beta'$-dimetil-$\alpha'\beta$-pirroldicarbonico. Nei composti che sono stati ottenuti del pirrolo per sostituzione, la posizione dei radicali non è nota a priori che in rarissimi casi e deve per lo più venire determinata con speciali reazioni. I prodotti in cui è avvenuta la sostituzione dell'idrogeno imminico, si riconoscono facilmente al loro modo di formazione e di comportamento: l'*n*-metilpirrolo p. es. dà per riscaldamento con acido cloridrico in tubi chiusi la metilammina e l'*n*- acetilpirrolo si scinde con la potassa in pirrolo ed acido acetico ([18]). Il criterio principale invece, che ha servito di guida per giudicare della posizione dei radicali attaccati al carbonio, è fondato sulla trasformazione dei derivati del pirrolo in imide bibromomaleica ([81]). Ciamician e Silber hanno trovato, che alcuni di questi corpi, dopo essere stati bromurati completamente, danno per ossidazione con l'acido nitrico a bassa temperatura la bibromomaleinimide; ora è chiaro che questa sostanza non si potrà ottenere che da quei composti, che contengono due atomi di bromo nelle posizioni $\beta\beta'$, per cui in ultima analisi da quei derivati del pirrolo, che contengono i radicali nelle posizioni $\alpha\alpha'$.



imide bibromo-maleica

(*) Handwörterbuch der Chemie IV Bd. 1887.

In queste reazioni si deve ammettere, naturalmente, che non abbiano luogo delle trasposizioni intramolecolari e che il bromo non sposti i radicali già esistenti nel composto da classificarsi.

In modo del tutto analogo è stata pure determinata la posizione dei radicali in alcuni prodotti di sostituzione del furfurano ([82]).

IV.

Proprietà del pirrolo e suo comportamento chimico in generale.

Il pirrolo è un liquido senza colore, d'un odore caratteristico, non molto forte, che ricorda un poco quello del cloroformio; all'aria ed alla luce diventa bruno per una parziale resinificazione, che avviene per assorbimento d'ossigeno. Esso bolle a 130-131° a 761 mm. ([83]), la sua densità è a 12,°5 $d = 0,9752$; è quasi insolubile nell'acqua e negli alcali, solubilissimo nell'alcool e nell'etere. Non ha reazione alcalina ne forma sali con gli acidi (gl'indoli si comportano nello stesso modo), fatta eccezione d'un picrato che è pochissimo stabile ([84]). Negli acidi diluiti è poco solubile, ma tutti gli acidi minerali, ed anche l'acido formico, lo trasformano, lentamente a freddo e rapidamente a caldo, in una sostanza amorfa, insolubile, chiamata da Anderson *rosso di pirrolo*. La formazione di questo corpo avviene in principio secondo l'eguaglianza:

$$3\, C_4H_5N + H_2O = C_{12}H_{14}N_2O + NH_3\,,$$

ma la sua composizione è variabile come il suo colore, che da giallo ranciato diviene finalmente nero; questi mutamenti sono accompagnati da assorbimento di ossigeno ([46]) ([74]).

I vapori di pirrolo arrossano vivamente una scheggia d'abete bagnata d'acido cloridrico e questa reazione è caratteristica pel gruppo del pirrolo, perchè la danno non solo gran parte dei derivati del pirrolo, ma anche gli indoli. Il pirrolo e molti dei suoi derivati danno poi con certi composti dichetonici delle materie coloranti, massime in presenza di acido solforico o meglio ancora d'acido acetico glaciale ([9]) ([10]). Queste reazioni sono proprie, come s'è detto più avanti, a tutte le sostanze del gruppo tetrolico. Nel pirrolo è un po' più studiata la reazione coll'isatina ([9]), ma non si è potuto determinare finora la composizione della materia azzurra, che si produce bollendo una soluzione di isatina in acido acetico glaciale con alcune goccie di pirrolo. Le altre materie coloranti, che si formano col fenantrenchinone, col chinone, col benzile, coll'acido fenilgliossilico, col gliossale ecc., sono molto meno stabili e non si manifestano che con reazioni fugaci ([10]).

Il pirrolo dà anche coll'allossana, massime in presenza di un acido, una colorazione azzurro-violetta, ma oltre alla materia colorante si forma anche un composto cristallino, che è senza colore ([85]). Per ottenerlo puro bisogna impiegare una soluzione di allossana purissima, oppure aggiungervi alcune goccie di carbonato sodico.

Questo composto è un prodotto di addizione dell'allossana col pirrolo della formola:

$$« C_8 H_7 N_3 O_4 » ,$$

che Ciamician e Silber hanno chiamato perciò *pirrolallossana.*

Non si conosce presentemente la costituzione di questa sostanza, che è perfettamente analoga al composto che l'allossana fa con l'anilina (*), si sa solamente che il residuo allossanico deve essere attaccato ad un atomo di carbonio del pirrolo, perchè l'n-metilpirrolo forma del pari, come il pirrolo, una *n-metilpirrolallossana* $C_8H_6(CH_3)N_3O_4$. La pirrolallossana, che avrà perciò probabilmente la costituzione $[C_4H_3\ NH] . C_4H_3N_2O_4$, si scinde già a freddo per azione della potassa in anidride carbonica, ammoniaca ed una sostanza di reazione acida, che ha la formola $[C_4 H_3 NH] . C_3 H_2 NO_3$, secondo l'eguaglianza:

$$C_8 H_7 N_3 O_4 + OH_2 = C_7 H_6 N_2 O_3 + CO_2 + NH_3 .$$

Il composto acido è molto alterabile e si trasforma già per ebollizione con acqua in una materia amorfa d'un colore rosso scarlatto.

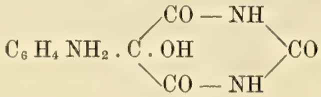
Assai strano è il comportamento del pirrolo con l'idrossilammina ([86]): bollendolo col cloridrato di questa base e con carbonato sodico, in soluzione alcoolica, si ottiene un composto, fusibile a 173°, che secondo le analisi di Ciamician e Dennstedt, ha la composizione

$$« C_4 H_8 N_2 O_2 » .$$

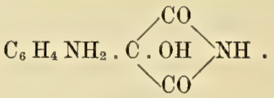
Anche di questa sostanza non si conosce presentemente la costituzione (**).

Gli ossidanti energici distruggono completamente il pirrolo, l'acido nitrico non dà che acido ossalico, il permanganato potassico dà anch'esso soltanto i prodotti di una completa combustione e solamente l'ossido d'argento pare che dia piccolissime quantità di un acido volatile di composizione ancora ignota ([87]). Resultati migliori si ottengono ossidando il pirrolo con gli ipocloriti ed ipobromiti alcalini ([88]). Gli alogeni agiscono

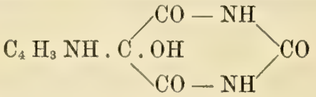
(*) Il comportamento dell'allossana colle ammine aromatiche è stato studiato recentemente da G. Pellizzari, Gazz. chim. XVII, 409, il quale ha trovato, che il radicale aromatico si unisce direttamente al carbonio chetonico dell'allossana. Il composto coll'anilina, ha probabilmente la costituzione:



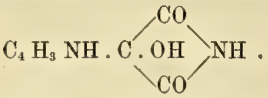
e l'acido che ne deriva è:



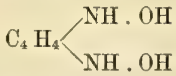
La pirrolallossana ed il composto acido corrispondente avranno perciò con molta probabilità le formole:



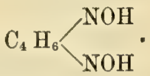
e



(**) Il composto che il pirrolo forma con l'idrossilammina può essere interpretato nei due modi seguenti:



oppure



Quest'ultima formola rappresenterebbe la diossima della dialdeide succinica:

$$\begin{matrix} CH_2 - CHO \\ | \\ CH_2 - CHO \end{matrix} .$$

sul pirrolo formando i prodotti tetrasostituiti, ma per ottenere queste sostanze sono necessarie certe cautele speciali per evitare la completa resinificazione e distruzione del prodotto. Il cloro ed il bromo in soluzione alcalina danno invece principalmente prodotti di ossidazione: l'ipoclorito sodico trasforma il pirrolo in ammoniaca ed acido bicloromaleico o bicloroacetico, secondo la concentrazione del reattivo, ed il bromo in soluzione alcalina dà quasi esclusivamente l'imide bibromomaleica. Questi prodotti di ossidazione del pirrolo corrispondono alle sostanze, che si ottengono in modo analogo dai derivati del furfurano, perchè se anche presentemente non si conosce il comportamento di questo con gli ipocloriti ed ipobromiti alcalini, si sa già da lungo tempo che l'acido piromucico dà col cloro e col bromo in presenza di acqua i cosidetti acidi mucoclorico ([89]) ([90]) e mucobromico ([90]) ([91]) e l'acido fumarico ([91]) ([92]). Il tiofene è più resistente e non dà con gli ipocloriti alcalini che dei derivati clorurati.

Il pirrolo è in grado di addizionare due o quattro atomi di idrogeno e di trasformarsi in basi secondarie energiche ([18]). Per studiare l'azione dei riducenti si deve naturalmente escludere l'idrogeno che si svolge dagli acidi minerali, e siccome sembra, che quello che si svolge dalle soluzioni alcaline sia senza azione sul pirrolo, così venne studiato da Ciamician e Dennstedt ([83]) il comportamento con l'acido acetico e zinco. In questo modo non vengono assorbiti che due atomi di idrogeno, e la base ottenuta fu chiamata «*pirrolina*»; per ottenere il tetraidropirrolo o *pirrolidina* Ciamician e Magnaghi ([93]) riscaldarono la pirrolina con acido jodidrico e fosforo in tubi chiusi a 250°. Di queste sostanze si tratterà più diffusamente in uno dei seguenti capitoli.

Il pirrolo non possiede che alcuni dei caratteri delle basi secondarie organiche e, come s'è già detto nel primo capitolo, per il suo comportamento generale, esso ricorda da un lato le ammine aromatiche e dall'altro i fenoli.

Il pirrolo, come venne accennato più avanti, non forma sali con gli acidi, non si combina coi joduri alcoolici (*), non forma un nitroso-derivato, nè dà cloroplatinati o cloroaurati ([18]). Esso si combina però con alcuni sali minerali e forma coi cloruri mercurico e cadmico dei precipitati bianchi e cristallini, che hanno le formole: $C_4H_5N \cdot 2\,HgCl_2$ e $4\,C_4N_5N \cdot 3\,CdCl_2$ ([46]). Il suo carattere imminico si manifesta specialmente nel comportamento con i composti alogenati dei radicali organici; bisogna però rammentare, che in causa della poca resistenza, che il pirrolo ed i suoi derivati offrono agli acidi minerali, si deve in queste reazioni impiegare il pirrolo in forma del suo composto potassico, per evitare la formazione di idracidi liberi. In questo modo si riesce a sostituire l'idrogeno imminico con radicali alcoolici e ad ottenere p. es. l'*n-metil-*([80]) e l'*n-etilpirrolo* ([94]) e del pari si possono preparare col cloruro di cianogeno ([95]), col cloruro di carbonile ([96]), coll'etere clorocarbonico ([97]) e col cloruro d'acetile ([98]), facendo agire queste sostanze sul composto potassico del pirrolo, la *tetrolcianamide*, il *carbonilpirrolo* o *ditetrolurea*, la *tetroluretana* e l'*acetilpirrolo*:

$$C_4H_4N \cdot CN\,, \quad (C_4H_4N)_2CO\,, \quad C_4H_4N \cdot CO \cdot OC_2H_5 \quad e \quad C_4H_4N \cdot COCH_3\,,$$

quest'ultimo può anche ottenersi facendo agire l'anidride ([98]) acetica sul pirrolo libero.

(*) I composti che il pirrolo forma coi joduri alcoolici sono di natura affatto differente da quelli che si ottengono con le ammine ordinarie, e non sono ancora studiati sufficientemente.

Qui però bisogna fare notare che quando trattasi di radicali acidi, assieme ai composti accennati, si formano spesso altri corpi, isomeri a questi, nei quali l'idrogeno imminico è libero ed il radicale è attaccato ad uno degli atomi di carbonio. La formazione di queste sostanze, che corrispondono tutte al tipo

$$\begin{matrix} C_4\,H_3\,NH \\ \overset{\circ}{C}O\,.\,R' \end{matrix} ,$$

costituisce uno dei caratteri più spiccati del gruppo pirrolico, il quale carattere si riscontra perciò anche presso gl'indoli (99).

L'idrogeno imminico del pirrolo può venire sostituito dai metalli alcalini, potassio e sodio; il primo si scioglie già a temperatura ordinaria con sviluppo di idrogeno (94), il secondo agisce solamente a temperature elevate riscaldando in tubi chiusi (100). Il composto potassico è una sostanza bianca e cristallina, pulverulenta, che con acqua si decompone prontamente, con sviluppo di calore, in pirrolo e potassa. Si può ottenerlo anche per azione della potassa solida sul pirrolo (75), ed in questo caso la sua formazione avviene evidentemente con eliminazione d'acqua, secondo l'equazione:

$$C_4\,H_4\,NH + KOH = C_4\,H_4\,NK + H_2\,O\,.$$

La potassa si scioglie nel pirrolo bollente e, per raffreddamento, tutta la massa si solidifica. È probabile che in questa reazione una parte della potassa serva da disidratante. Il composto potassico del pirrolo si comporta con l'anidride carbonica come i fenati dei metalli alcalini: riscaldandolo in una corrente di questo gaz, si ottengono i sali degli acidi pirrolcarbonici (18). Il carattere fenico del pirrolo si manifesta anche in altre reazioni. L'idrogeno imminico, che non possiede proprietà alcaline che nei prodotti di riduzione del pirrolo, acquista, come l'idrogeno fenico, caratteri decisamente acidi nei derivati alogenati e massime nei nitrocomposti; il dinitropirrolo p. es. ricorda in certi punti l'acido picrico (18). Il pirrolo si trasforma, come i fenoli, in acidi pirrolcarbonici riscaldandolo col carbonato ammonico o col bicarbonato sodico e col tetracloruro di carbonio in soluzione alcalina; non si è potuto però ottenere fin'ora l'aldeide carbopirrolica con la reazione di Reimer e Tiemann (18). Una reazione molto interessante, e del pari adatta a rilevare l'analogia di comportamento del pirrolo coi fenoli, è quella scoperta recentemente da O. Fischer e Hepp (101). Il pirrolo non dà coi cloruri dei diazocomposti aromatici i diazo-amido-composti, ma forma bensì, come i fenoli e specialmente la resorcina, molto facilmente gli azoderivati ed i dis-azoderivati. Col cloruro di diazobenzolo si ottiene a mo' d'esempio, a seconda se si opera in soluzione acida o in soluzione alcalina, il *pirrolazobenzolo* o il *pirroldisazodibenzolo*:

$$C_4\,H_4\,NH + C_6\,H_5\,N_2\,Cl = [C_4\,H_3\,NH]\,.\,N = N\,.\,C_6\,H_5 + H\,Cl \quad \text{e}$$
$$C_4\,H_4\,NH + 2\;C_6\,H_5\,N_2\,Cl = C_6\,H_5\,N_2\,.\,[C_4\,H_2\,NH]\,.\,N_2\,C_6\,H_5 + 2\;H\,Cl\,.$$

È da notarsi che anche la tiofenina ($C_4\,H_3\,S\,.\,NH_2$) ed il tienilmercaptano ($C_4\,H_3\,S\,.\,SH$) hanno un comportamento analogo. La prima non dà col cloruro di diazobenzolo, come fa l'anilina, un diazoamidocomposto, ma bensì un azoderivato misto: $C_6\,H_5\cdot N = N\cdot C_4\,H_2\,S\cdot NH_2$ (102), ed il secondo forma con lo stesso reattivo

un composto cristallino d'un colore gialloranciato, mentre il corrispondente corpo aromatico, il fenilmercaptano, non reagisce affatto ([12]). Queste reazioni servono mirabilmente a mettere in rilievo la grande mobilità degli atomi di idrogeno del residuo tetrolico (C_4H_4) del pirrolo e del tiofene, e dimostrano che questo ha spesso proprietà analoghe a quelle del radicale aromatico dei fenoli.

V.

Trasformazione del pirrolo in derivati della piridina.

La trasformazione del nucleo pirrolico in nucleo piridico è una delle reazioni più interessanti e caratteristiche della chimica del pirrolo; essa contribuisce non solo a mettere in evidenza le relazioni che esistono fra la piridina ed il pirrolo, ma rende altresì possibile il passaggio indiretto di quest'ultimo ai derivati della benzina, perchè come venne accennato nel primo capitolo, la piridina è stata trasformata da Ladenburg in etilbenzolo. Se inoltre si tiene presente, che il nucleo pirrolico mantiene anche nell'indolo questa sua proprietà caratteristica, per cui gli indoli possono essere trasformati in derivati chinolici, si comprende facilmente l'importanza delle reazioni, alle quali è dedicato il presente capitolo.

La prima trasformazione del pirrolo in derivati piridici è stata osservata nel 1881 da Ciamician e Dennstedt ([103]), che ottennero la β-cloropiridina facendo agire il cloroformio sul composto potassico del pirrolo. Queste reazioni furono poi studiate da Ciamician e Silber e da Dennstedt e vennero applicate anche agli indoli da Ciamician ([13]), Magnanini ed ultimamente da E. Fischer.

Si ottengono derivati piridici facendo agire sul pirrolo in presenza di alcoolato potassico o sodico ([100]), il cloroformio o il bromoformio, il joduro di metilene ([104]) ed il cloruro di benzale ([105]). Col cloroformio o bromoformio la reazione avviene secondo le equazioni:

$$C_4H_4NH + CHCl_3 = C_4H_4 . \overset{\beta}{C}Cl . N + 2\,HCl$$
cloropiridina

$$C_4H_4NH + CHBr_3 = C_4H_4 . \overset{\beta}{C}Br . N + 2\,HBr$$
bromopiridina

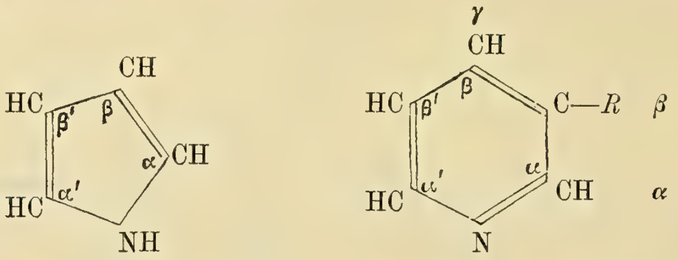
col joduro di metilene e col cloruro di benzale si hanno l'eguaglianze:

$$C_4H_4NH + CH_2I_2 = C_4H_4 . \overset{\beta}{C}H . N + 2\,HI$$
piridina

$$C_4H_4NH + C\,C_6H_5HCl_2 = C_4H_4 . C\overset{\beta}{C_6}H_5 . N + 2\,HCl .$$
fenilpiridina

In tutte queste reazioni il pirrolo cede il suo idrogeno imminico, che esce in forma di acido cloridrico, bromidrico o jodidrico, ed i residui « CCl », « CBr », « CH » e « CC_6H_5 » entrano nel nucleo del pirrolo trasformandolo in derivati piridici. I composti che si formano in questo modo appartengono alla serie « meta » (β)

e perciò è molto probabile che in questi casi il quinto atomo di carbonio, che entra nel nucleo del pirrolo, per trasformarlo in piridina, venga ad occupare anch'esso nel nuovo nucleo, a cui dà origine, la posizione « meta » per rispetto all'atomo d'azoto. Si hanno perciò gli schemi:



Si deve però far notare che i rendimenti di basi piridiche che si hanno nelle reazioni accennate sono poco soddisfacenti e non ascendono tutto al più che a 10 % di quelli richiesti dalla teoria; perciò apparisce probabile, che presentemente non si conosca ancora con sufficiente esattezza l'andamento di questi processi e che oltre alle basi piridiche si formino anche altre sostanze di natura non alcalina. Lo studio di questi corpi riesce difficile in causa delle materie resinose che si producono contemporaneamente agli altri prodotti della reazione. Questa supposizione viene inoltre avvalorata dal fatto che le aldeidi ed i chetoni che, pure corrispondono ai cloruri che servono a trasformare il pirrolo in derivati piridici, danno, in luogo di questi, gli omologhi del pirrolo. L'aldeide acetica non forma col pirrolo la β-picolina, come si potrebbe supporre, ma dà bensì, come si vedrà più tardi, il β-etilpirrolo. Si può quindi ammettere con grande probabilità che esista una certa relazione fra queste due differenti metamorfosi del pirrolo.

Per preparare la cloropiridina e la bromopiridina si fa agire sopra un miscuglio di pirrolo ed alcoolato sodico, sciolto (100) in un eccesso d'alcool, a poco a poco il cloroformio (103) o il bromoformio (106) in quantità corrispondenti alle eguaglianze:

$$C_4H_5N + 2\,NaOH + CHCl_3 = C_5H_4ClN + 2\,NaCl + 2\,H_2O$$
$$C_4H_5N + 2\,NaOH + CHBr_3 = C_5H_4BrN + 2\,NaBr + 2\,H_2O\,.$$

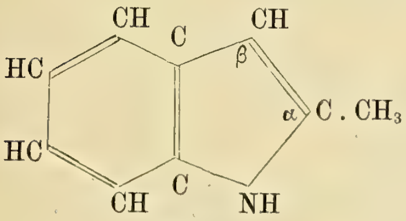
La reazione avviene spontaneamente con forte sviluppo di calore ed, oltre ai prodotti indicati dalle equazioni, si forma sempre una materia resinosa, rossastra simile al « rosso di pirrolo ». Per ottenere gli alcaloidi si scaccia l'alcool, si bolle ripetutamente sotto pressione il residuo, con acido cloridrico, per distruggere il pirrolo rimasto inalterato e gli altri prodotti non alcalini, e si distilla con un eccesso di potassa. La cloropiridina e la bromopiridina provenienti dal pirrolo, formano cloroplatinati monoclini, isomorfi [$(C_5H_4ClN\,HCl)_2\,PtCl_4 + 2OH_2$ e $(C_5H_4BrN\,HCl)_2\,PtCl_4 + 2OH_2$] (106), perciò è molto probabile che contengano tutte e due l'alogeno nella stessa posizione. La bromopiridina è identica a quella di Hoffmann, in cui secondo le ricerche di Weidel (107) e quelle più recenti di George Pfeiffer (108) il bromo si trova in posizione β, e si trasforma in piridina per azione dello zinco ed acido cloridrico.

Le stesse basi si ottengono pure, se invece del pirrolo ed alcoolato sodico si impiega il composto potassico del pirrolo sospeso nell'etere anidro (103) (106). La cloropiridina

si forma inoltre anche se al cloroformio si sostituisce il tetracloruro di carbonio, il cloralio o l'etere tricloroacetico ([106]).

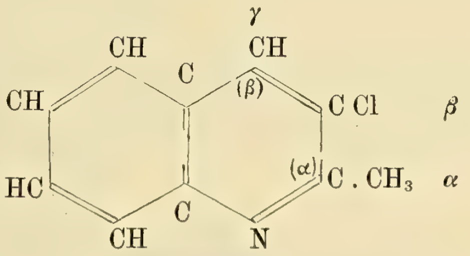
Il joduro di metilene (*) ([104]) ed il cloruro benzalico ([105]) formano derivati piridici soltanto se vengono riscaldati col pirrolo ed alcoolato sodico nelle debite proporzioni, in tubi chiusi alla temperatura di 160-170°. Nel primo caso si formano tracce di piridina, nel secondo si ottiene la β-fenilpiridina di Skraup in piccola quantità.

Gli indoli si comportano, come s'è detto più sopra, in modo analogo al pirrolo ([13]). Il metilchetolo e lo scatolo danno, in presenza di alcoolato sodico, col cloroformio e col bromoformio, le metilclorochinoline e le metilbromochinoline, che si preparano seguendo il metodo già indicato per ottenere la cloro- e la bromopiridina ([109]). Inoltre è molto probabile che anche in queste reazioni i residui « C Cl » e « C Br » entrino nel nucleo pirrolico degli indoli in modo di venire ad occupare la posizione β nei gruppi piridici a cui danno origine, perchè le basi ottenute dal metilchetolo e dallo scatolo sono con grande probabilità la *β-cloro-* e *β-bromochinaldina* e la *β-cloro-* e la *β-bromo-γ-lepidina*.

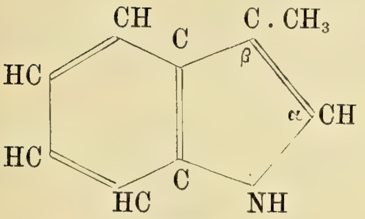


Metilchetolo

dà

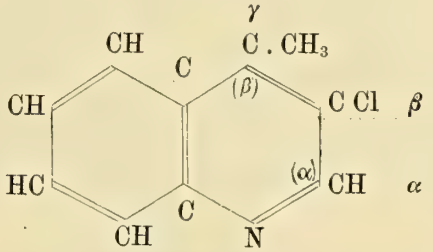


β-cloro-chinaldina



Scatolo

dà



β-cloro-γ-lepidina

Assai interessante è il comportamento degli indoli con i joduri alcoolici (R'I), studiato ultimamente da E. Fischer ([110]) ([111]), perchè in queste reazioni invece di chinoline si formano i derivati di una *diidrochinolina*. Per esempio col metilchetolo e joduro di metile la reazione avviene secondo le equazioni:

$$C_9\,H_8\,NH + C\,H_3\,I = C_9\,H_8\,.\,C\,H_2\,.\,NH + HI \qquad e$$

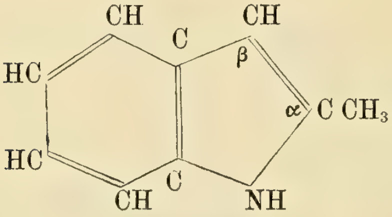
metilchetolo — diidrometilchinolina

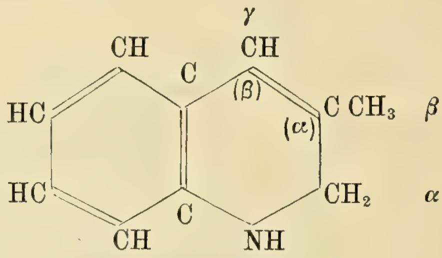
$$C_9\,H_8\,.\,C\,H_2\,.\,NH + C\,H_3\,I = C_9\,H_8\,.\,C\,H_2\,.\,N\,.\,C\,H_3 + HI\,.$$

diidrometilchinolina — diidrodimetilchinolina

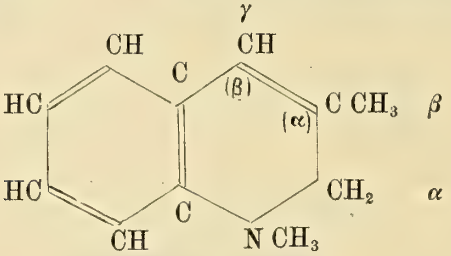
(*) Il cloruro di metilene non agisce.

In questi casi è il gruppo metilenico « CH_2 » o il residuo bivalente « CHR », che entra nel nucleo indolico per trasformarlo in gruppo chinolinico, per cui restando il nuovo composto base secondaria, il metilene non può più venire ad avere nel nucleo a cui dà origine la posizione « meta », ma bensì quella « orto » o « para ». Emilio Fischer preferisce la prima interpretazione e dà alla idrochinolina da lui ottenuta dal metilchetolo la formola seguente ([111]):





metilchetolo da orto-diidro-β-lepidina e



ortodiidro-metil-β-lepidina

Queste reazioni si distinguono dalle precedenti anche perchè danno rendimenti che corrispondono a quelli richiesti dalla teoria ([110]).

Il comportamento del pirrolo con i joduri alcoolici non è ancora studiato.

Gli indoli si comportano col cloruro benzalico e col fenilcloroformio ($C.C_6H_5.Cl_3$) come coll'aldeide benzoica e col cloruro di benzoile ([99]) formando dei derivati analoghi al trifenilmetano ([112]). Col metilchetolo si ottengono p. es. i composti:

$$C_6H_5.CH\begin{cases}C_9H_8N\\C_9H_8N\end{cases} \quad \text{e} \quad C_6H_5-C\begin{cases}C_9H_8N\\C_9H_7N.\end{cases}$$

Queste reazioni fanno ritenere come probabile che si formino anche col pirrolo simili prodotti, i quali poi potrebbero convertirsi in derivati della piridina.

Per ultimo è ancora da notarsi che gli omologhi del pirrolo danno, per riscaldamento con acido cloridrico, piccole quantità di basi piridiche ([113]) ([114]).

VI.

Omologhi del pirrolo e pirroli terziarî.

I derivati del pirrolo che contengono al posto dell'idrogeno imminico un radicale alcoolico sono stati ottenuti per due vie diverse. La prima si fonda sulla reazione di Schwanert ([54]), la seconda è una sintesi per mezzo del composto potassico del

pirrolo. Distillando alcuni dei sali, che l'acido mucico forma coi diversi alcaloidi organici, si ottengono oltre alle carbopirrolamidi sostituite, i pirroli terziarî corrispondenti. Così p. es. distillando il mucato di metilamina, Ch. Bell ottenne assieme alla dimetilcarbopirrolamide [$(C_4H_3NCH_3)CONHCH_3$], l'n-metilpirrolo [59] ed in modo simile furono ottenuti del pari l'n-etil [115], n-isoamil- [59] e l'n-fenilpirrolo [60]. Coll'altro metodo impiegato per la prima volta da Liubawin e poi da Bell [94] e da altri, sono stati preparati oltre all'n-metil [80], e all'n-fenilpirrolo [101] già menzionati, anche l'n-allilpirrolo [97] e l'n-benzilpirrolo [116]. In questi processi si fa agire direttamente il radicale alogenato sul composto potassico del pirrolo, usando, se la reazione è troppo violenta, l'etere anidro per diluire il reattivo. Questa reazione avviene alle volte spontaneamente, altrimenti è sufficiente per avviarla di riscaldare lievemente a b. m.. Col joduro di metile la trasformazione si compie, in causa della volatilità del reattivo, più facilmente in apparecchi chiusi e senza bisogno di riscaldamento. I composti che così si formano, si ottengono distillando con vapore acqueo il prodotto della reazione e sottoponendo la parte volatile alla distillazione frazionata. Il rendimento migliore si ha col joduro di metile, col joduro etilico si formano delle altre sostanze che hanno un punto di ebollizione più elevato dell'etilpirrolo, coi joduri dei radicali alcoolici superiori della serie grassa il rendimento è assai cattivo.

I pirroli terziarî sono per lo più liquidi che bollono a temperature inferiori dei corrispondenti omologhi del pirrolo loro isomeri, si ha p. es. per l'n-metilpirrolo e per l'n-etilpirrolo una differenza di circa 30°, comparando i loro punti di ebollizione con quelli degli omopirroli e del c-etilpirrolo.

n-metilpirrolo	bolle a 114-115°
omopirroli	bollono a 142-143° e 147-148°
n-etilpirrolo	bolle a 131°
c-etilpirrolo	bolle a 163-165°.

Le loro proprietà sono poco dissimili da quelle del pirrolo; tutti i pirroli terziarî si colorano all'aria ed alla luce, tutti arrossano la scheggia d'abete bagnate d'acido cloridrico e danno coll'isatina, col fenantrenchinone ecc., delle colorazioni caratteristiche: tutti si combinano col cloruro mercurico.

Gli acidi minerali li resinificano meno facilmente del pirrolo ed in queste reazioni una parte dell'azoto esce in forma di ammina assieme al radicale che era stato introdotto nel pirrolo [18]. Questo fatto prova all'evidenza che il pirrolo è un'ammina secondaria e che il potassio ne sostituisce l'idrogeno imminico.

Gli omologhi del pirrolo sono stati scoperti nell'olio animale da Weidel e Ciamician [74], i quali nel 1880 riuscirono a preparare gli omopirroli ed un c-dimetilpirrolo, a questi composti è da aggiungersi il trimetilpirrolo che Ciamician e Dennstedt hanno estratto l'anno seguente dalla stessa materia prima [113]. In questi ultimi anni Knorr e Paal ottennero mediante certi processi sintetici, già menzionati nel primo capitolo, una serie di derivati pirrolici fra cui parecchi pirroli sostituiti con radicali alcoolici, e finalmente Dennstedt e Zimmermann [114] prepararono un c-etilpirrolo ed un c-isopropilpirrolo facendo agire sul pirrolo la paraldeide [114] e l'acetone [117] [118].

Gli omologhi del pirrolo si possono ottenere dalle frazioni dell'olio animale, che bollono sopra i 140°, trattandole col potassio o colla potassa. Questo secondo metodo è molto preferibile al primo, perchè adoperando la potassa in difetto si riesce ad effettuare un frazionamento del prodotto. Il pirrolo si combina colla potassa più facilmente dei suoi omologhi, ed inoltre anche questi vi si uniscono gradatamente, a seconda il loro punto di ebollizione, in modo che i meno volatili entrano in reazione solamente dopo che si sono combinati i più volatili ([119]). In questo modo Dennstedt e Zimmermann hanno potuto separare i due c-metilpirroli dalla frazione dell'olio animale che bolle fra 140 e 150° ([114]). L'omopirrolo ricavato da questa frazione col potassio, era già stato scisso da Ciamician nei due c-metilpirroli isomeri, per mezzo degli acidi omopirrolcarbonici, che si ottengono per azione dell'anidride carbonica sul miscuglio dei composti potassici dei due omopirroli ([120]). — I pirroli superiori si ottengono dai loro composti potassici come il pirrolo, per decomposizione con acqua, distillazione e frazionamento del prodotto.

I composti ottenuti sinteticamente da Paal e da Knorr, possono distinguersi in due gruppi: in quelli ottenuti direttamente ed in quelli che si ebbero dagli acidi pirrolmonocarbonici e pirroldicarbonici corrispondenti. Appartengono ai secondi i pirroli superiori che si ottennero dagli eteri pirrolcarbonici provenienti dagli eteri diacetilsuccinico ([67]) ([72]), acetofenonacetoacetico ([71]) e nitrosoacetoacetico ([67]). Dagli acidi corrispondenti agli eteri rappresentati dalle seguenti formole:

$$C_4(\overset{\beta\beta'}{COOC_2}H_5)_2(\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2N\acute{R}, \quad C_4(\overset{\beta}{COOC_2}H_5)\overset{\beta'}{H}.\overset{\alpha}{CH_3}.C_6\overset{\alpha'}{H_5}N\acute{R} \quad e$$

$$C_4(\overset{\beta'}{COOC_2}H_5)\overset{\beta}{CH_3}(\overset{\alpha}{COOC_2}H_5)\overset{\alpha'}{CH_3}NH$$

si prepararono per eliminazione di anidride carbonica i pirroli superiori che hanno la seguente costituzione:

$$C_4H_2(\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2N\acute{R}, \quad C_4H_2(\overset{\alpha}{CH_3})(C_6\overset{\alpha'}{H_5})N\acute{R} \quad e \quad C_4\overset{\beta}{H}(\overset{\beta'}{CH_3})(\overset{\alpha}{CH_3})\overset{\alpha'}{H}NH.$$

Così per esempio Knorr ottenne l'*αα'-dimetilpirrolo*, che è identico a quello ricavato dall'olio animale da Weidel e Ciamician, l'*αα'-dimetil-n-metilpirrolo*, l'*αα'-dimetil-n-fenilpirrolo* ecc., riscaldando gli acidi dicarbonici corrispondenti sopra il loro punto di fusione, e similmente ottene Paal l'*α-metil-α'-fenil-n-fenilpirrolo* dal suo etere monocarbonico. L'*αβ'-dimetilpirrolo* è stato ottenuto da Knorr, riscaldando l'etere dietilico dell'acido carbonico corrispondente con potassa alcoolica o con acido solforico concentrato ([67]). Direttamente furono preparati da Paal dall'acetonilacetone ([70]) e dall'acetofenonacetone ([68]), per azione dell'ammoniaca alcoolica a 150° il *dimetilpirrolo simmetrico* [$C_4H_2(\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2NH$] già accennato e l'*α-metil-α'-fenilpirrolo*. Tutte queste sostanze, con le loro principali proprietà, si trovano registrate nelle tabelle che accompagnano la presente Monografia.

Le aldeidi ([118]) ed i chetoni ([121]) ([118]) agiscono sul pirrolo, in presenza di cloruro di zinco o di acido cloridrico, formando dei prodotti di condensazione ([121]) ([118])

complessi. Coll'acetone ed alcune goccie d'acido cloridrico, per esempio, il pirrolo dà un composto, che ha la formola (*):

$$« C_{14} H_{18} N_2 » ,$$

e che può considerarsi come formato da due molecole di pirrolo e due d'acetone meno due di acqua [118]

$$2 C_4 H_5 N + 2 C_3 H_6 O = 2 H_2 O + C_{14} H_{18} N_2 .$$

Questi prodotti di condensazione si scindono poi, per distillazione, in pirrolo e negli omologhi superiori del pirrolo. Dennstedt e Zimmermann hanno ottenuto in questo modo con la paraldeide e coll'acetone un *c-etilpirrolo* [114] ed un *c-isopropilpirrolo* [118] [121].

$$\begin{matrix} C_4 H_3 NH \\ \dot{C}_2 H_5 \end{matrix} \quad e \quad \begin{matrix} C_4 H_3 NH \\ \dot{C}H (CH_3)_2 \end{matrix} .$$

Sebbene queste reazioni non sieno ancora sufficientemente studiate, pure già ora si riconosce, che esse presentano una certa analogia col comportamento del tiofene e dei fenoli aromatici in casi simili. Il tiofene dà col cloralio in presenza di acido solforico il ditieniltricloroetano [122] [123]

$$\begin{matrix} C_4 H_3 S \\ C_4 H_3 S \end{matrix} \!\!> CH . C Cl_3 ,$$

e coll'alcool benzilico il tienilfenilmetano [123]

$$\begin{matrix} C_4 H_3 S \\ \dot{C}H_2 . C_6 H_5 . \end{matrix}$$

La formazione di quest'ultimo, ricorda moltissimo le sintesi degli omologhi del fenolo, mediante gli alcooli in presenza di cloruro di zinco.

Il c-etilpirrolo [114] ed il c-isopropilpirrolo [117] si ottengono riscaldando il pirrolo con parti eguali di paraldeide o di acetone e con cloruro di zinco. Si distilla il prodotto e si fraziona la parte principale più volatile. I pirroli così ottenuti si purificano per mezzo del composto potassico.

È probabile, come si vedrà più tardi, che in queste due sostanze il radicale alcoolico occupi la posizione β.

Gli omologhi del pirrolo non si sono potuti ottenere fino ad ora nè dai composti alogenati del pirrolo, nè dai pirroli terziarî per trasposizione del radicale alcoolico.

Gli omologhi del pirrolo sono liquidi oleosi, che hanno un odore simile a quello del pirrolo, ma più pungente e disaggradevole; all'aria ed alla luce si alterano più facilmente di questo; tutti danno la reazione col fuscello d'abete, e si combinano col cloruro mercurico. Con gli acidi minerali si resinificano più difficilmente del pirrolo, ed in queste reazioni si formano spesso piccole quantità di basi piridiche che sono per ora

(*) Forma un composto col nitrato d'argento della formola $(C_{14} H_{18} N_2)_2 + Ag NO_3$.

poco studiate [113] [114]. I loro punti di ebollizione aumentano, come di consueto nelle serie omologhe, col numero crescente di atomi di carbonio.

C_4H_5N	pirrolo 131°		
C_5H_7N	c-metilpirroli (omopirroli) 142-143° e 147-148°		
C_6H_9N	αα'-dimetilpirrolo, 165°	αβ'-dimetilpirrolo, 171°	β-etilpirrolo 163-165°
$C_7H_{11}N$	c-trimetilpirroli, 180-195°	β-isopropilpirrolo 173-175°	

Il loro comportamento chimico si avvicina a quello dei fenoli superiori aromatici, perchè non danno con gli ossidanti ordinarî gli acidi pirrolcarbonici corrispondenti (Ciamician) [18]. Questi non si sono potuti ottenere fin'ora dagli omologhi del pirrolo, che fondendo i loro composti potassici con la potassa [120]. Soltanto in questo modo i due c-metilpirroli danno i due acidi pirrolmonocarbonici [120], e l'isopropilpirrolo l'acido β-carbopirrolico [117]. I composti potassici degli omopirroli danno con l'anidride carbonica gli acidi omopirrolcarbonici [120].

Gli omologhi del pirrolo hanno perciò un comportamento diverso da quelli del tiofene, i quali si convertono facilmente, per ossidazione col camaleonte, negli acidi tiofenici corrispondenti.

VII.

Gli acidi pirrolcarbonici.

Il primo acido pirrolcarbonico è stato ottenuto dal mucato ammonico da Schwanert nel 1860 in forma dell'amide [54]; oltre a questo modo di sintesi, si conoscono presentemente, in seguito ai già più volte citati lavori di Knorr e di Paal, i processi di trasformazione in acidi pirrolmonocarbonici e pirroldicarbonici degli eteri di alcuni acidi chetonici e dichetonici. Gli acidi pirrolcarbonici si ottennero poi dal pirrolo per azione dell'anidride carbonica, dei bicarbonati sodico ed ammonico, e del tetracloruro di carbonio. Finalmente per ossidazione degli omologhi del pirrolo e dei composti chetonici, di cui si farà parola nel prossimo capitolo.

I due acidi pirrolmonocarbonici previsti dalla teoria, sono entrambi conosciuti e si ottengono tutti e due assieme, fondendo con potassa il miscuglio dei composti potassici dei due omopirroli isomeri [120]. I due acidi si separano per mezzo dell'acetato piombico, perchè solamente l'acido β-carbopirrolico precipita con questo reattivo, dando un sale piombico poco solubile nell'acqua. Direttamente dal pirrolo si ottiene quasi esclusivamente l'altro acido, quello di Schwanert, tanto coll'anidride carbonica [18] [124] e coi bicarbonati alcalini [125], che col tetracloruro di carbonio [124]. Facendo

agire sul composto potassico del pirrolo riscaldato a 180°-200° una corrente di anidride carbonica secca, distilla una parte del pirrolo corrispondente alla eguaglianza:

$$2\,C_4H_4NK + CO_2 = \underset{\dot{C}OOK}{C_4H_4NK} + C_4H_5N\,,$$

come avviene pel fenolo nella sua trasformazione in acido salicilico, ed il prodotto della reazione contiene principalmente l'acido di Schwanert. Oltre a questo si formano piccole quantità dell'acido $\alpha\alpha'$-pirroldicarbonico, di cui si parlerà più avanti, ed in certe condizioni fin' ora non bene determinate, anche dell'acido β-carbopirrolico. Queste due ultime sostanze sono contenute nella parte del prodotto che precipita in soluzione acquosa coll'acetato di piombo. L'azione del carbonato ammonico e del bicarbonato sodico sul pirrolo corrisponde a quella dell'anidride carbonica, e costituisce il metodo migliore per preparare praticamente l'acido di Schwanert dal pirrolo ([125]). Questo viene riscaldato, a tale scopo, con 4 parti di carbonato ammonico e 5 parti di acqua in apparecchi chiusi a 130°-140° per 6--10 ore, ed il prodotto greggio, che contiene sempre inalterata una parte delle due sostanze, viene liberato da queste per distillazione a b. m.. La soluzione acquosa così ottenuta contiene quasi esclusivamente il sale ammonico dell'acido di Schwanert, che si ottiene, dopo avere concentrato convenientemente e filtrato il liquido, acidificando con acido solforico diluito ed estraendo ripetutamente e rapidamente con etere. La reazione col tetracloruro di carbonio, pirrolo e potassa alcoolica a 100° in apparecchi chiusi ([124]), non ha nessuna importanza pratica ed è interessante solamente perchè è del tutto analoga alla trasformazione dei fenoli in ossiacidi aromatici mediante il processo di Reimer e Tiemann. Per preparare l'acido di Schwanert dal mucato ammonico si distilla questo sale, secondo la prescrizione di Ciamician e Silber ([126]), in porzioni di 20 gr. per volta, in piccole stortine di vetro, alla temperatura di circa 300°; si separa il pirrolo dal distillato acquoso e si libera questo dal carbonato ammonico, che si forma durante la distillazione, svaporando a b. m.. Il residuo è la carbopirrolamide greggia, che si purifica, coll'ajuto del nero animale, facendola cristallizzare dall'acqua bollente. Per ottenere da questa l'acido libero, la si scompone bollendola con barite e si tratta la soluzione acquosa del sale baritico, dopo averla liberata dall'eccesso di barite con l'anidride carbonica, con carbonato sodico o potassico. Della soluzione filtrata e convenientemente concentrata del sale alcalino, si ha l'acido di Schwanert acidificando con acido solforico diluito ed estraendo con etere.

La trasformazione dell'acido mucico in carbopirrolamide è una reazione interessante, perchè permette un'applicazione più estesa. S' è detto già più volte che rimpiazzando l'ammoniaca con altre basi organiche si possono ottenere le carbopirrolamidi sostituite, assieme ai pirroli terziarî corrispondenti. Ch. Bell ottenne distillando i mucati di metilammina, etilammina e amilammina, le dimetil-, dietil- e diamilcarbopirrolamidi e da queste gli acidi n-metil- ed n-etilcarbopirrolici ([59]).

$C_4H_3NCH_3$ $\dot{C}ONHCH_3$	$C_4H_3NC_2H_5$ $\dot{C}ONHC_2H_5$	e	$C_4H_3NCH_3$ $\dot{C}OOH$	$C_4H_3NC_2H_5$ $\dot{C}OOH$.
dimetilcarbopirrol-amide	dietilcarbopirrol-amide		acido n-metil-carbopirrolico	acido n-etil-carbopirrolico

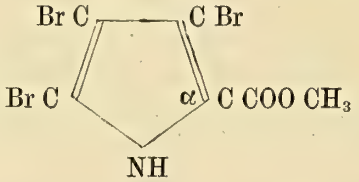
Speciale interesse merita il mucato di etilammina, perchè da questo sale, Bell ottenne oltre alla dietilcarbopirrolamide ([59]), anche la trietil-dicarbopirrolamide e da questa, per saponificazione con la potassa alcoolica, l'acido n-etildicarbopirrolico ([59]), che per la sua formazione è molto probabilmente il derivato terziario dell'acido $\alpha\alpha'$-dicarbonico.

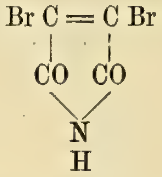
$$C_4H_2N(C_2H_5)\begin{cases} CONHC_2H_5 & \alpha' \\ CONHC_2H_5 & \alpha \end{cases} \qquad C_4H_2N(C_2H_5)\begin{cases} COOH & \alpha' \\ COOH & \alpha \end{cases}$$

trietildicarbopirrolamide — acido n-etil-$\alpha\alpha'$-pirroldicarbonico.

La formazione di un acido pirroldicarbonico dall'acido mucico, corrisponde come si vede, a quella dell'acido furfurandicarbonico o deidromucico, e sembra inoltre che anche riscaldando l'acido mucico con solfuro di bario, si formi oltre all'acido α-tiofenico anche tracce dell'acido $\alpha\alpha'$-tiofendicarbonico. Così l'acido mucico dà origine non solamente ai tre acidi α-monocarbonici della serie tetrolica, ma indirettamente anche ai tre acidi $\alpha\alpha'$-dicarbonici.

La costituzione dell'acido di Schwanert è determinata con grande probabilità dalla sua formazione dall'acido mucico, anch'esso come gli acidi α-tiofenico e piromucico (Baeyer ([127])) appartiene certamente alla serie dei derivati α. La posizione del carbossile in prossimità dell'azoto, risulta inoltre come sommamente probabile da una serie di reazioni, delle quali si parlerà più tardi, e principalmente dalla trasformazione dell'etere tribromocarbopirrolico in bibromomaleinimide. Ciamician e Silber ([81]) hanno trovato che questo etere si converte, per azione dell'acido nitrico fumante, a temperatura ordinaria, in imide bibromomaleica. Questa reazione dimostra che due atomi di bromo devono perciò necessariamente trovarsi nelle posizioni $\beta\beta'$ e che il carbossile per conseguenza non può che occupare il posto di un idrogeno situato in vicinanza dell'immino:





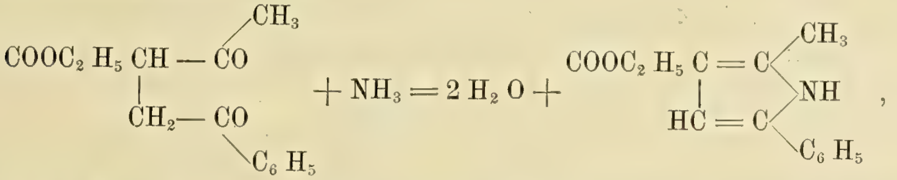
L'altro acido pirrolmonocarbonico deve necessariamente essere il β-carbopirrolico. Questa sostanza non è stata ottenuta esclusivamente fin' ora, che dal isopropilpirrolo di Dennstedt e Zimmermann, per fusione del composto potassico con la potassa ([117]). Essa differisce dall'acido di Schwanert perchè è precipitabile in soluzione acquosa dall'acetato piombico, per il suo punto di fusione e per quello del suo etere metilico.

acido α-carbopirrolico	acido β-carbopirrolico
p. f. 192°	p. f. 166°
etere metilico α-carbopirrolico	etere metilico β-carbopirrolico
p. f. 73°	p. f. 129°

L'isopropilpirrolo e probabilmente anche il c-etilpirrolo già menzionati, contengono perciò anch'essi il radicale alcoolico in posizione β.

L'unico acido pirroldicarbonico ([128]) finora conosciuto è l'acido $\alpha\alpha'$-dicarbonico, che si ottiene principalmente per ossidazione dell'$\alpha\alpha'$-diacetilpirrolo $[C_4H_2NH(COCH_3)_2]$, del quale si parlerà nel prossimo capitolo. A questo acido corrisponde l'acido n-etil-$\alpha\alpha'$-pirroldicarbonico di Bell, accennato più sopra.

Resta ancora a trattare, un po' più diffusamente di quello che s' è fatto finora, delle sintesi di Knorr e di Paal, per le quali si ottengono i prodotti di sostituzione con varî radicali organici degli acidi pirrolmonocarbonici e dicarbonici. In primo luogo vanno accennate le sintesi di acidi pirrolmonocarbonici per mezzo dell'etere acetofenonacetoacetico, effettuate da Lederer e Paal ([71]) e da Paal e Schneider ([129]). Facendo agire l'ammoniaca su questa sostanza si ottiene l'etere *α-metil-α'-fenil-β-pirrolmonocarbonico*, secondo l'equazione:

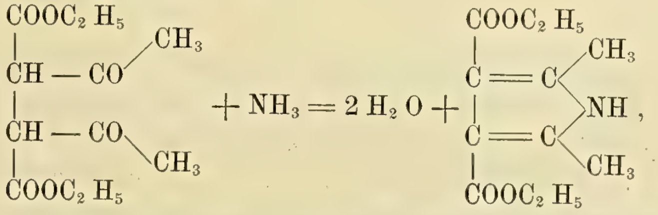


da cui si ha l'acido libero per saponificazione con la potassa alcoolica. In modo del tutto analogo si ottengono con la metilammina, l'etilammina, l'anilina, l'orto-e la para-toluidina, la α- e la β- naftilammina, la glicocolla, l'acido amidobenzoico e l'amidoazobenzolo, gli eteri degli acidi in cui l'idrogeno imminico è sostituito dai varî radicali organici provenienti da questi composti. Con la etilendiammina, la m-fenilen-diammina, la benzidina si formano poi dei derivati *dipirrolici* come p. es. *l'etere dietilico dell'acido n-etilen-α-dimetil-α'-difenil-β-dipirroldicarbonico*:

$$C_4H(\overset{\alpha}{CH_3})(\overset{\alpha'}{C_6}H_5)(COO\overset{\beta}{C_2}H_5)N.CH_2\overset{n}{.}CH_2.NC_4H(\overset{\alpha}{CH_3})(\overset{\alpha'}{C_6}H_5)(COO\overset{\beta}{C_2}H_5),$$

che si ottiene con la prima delle diammine accennate.

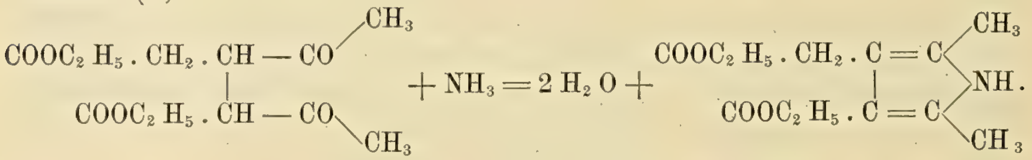
Egualmente ricca di svariate applicazioni è la trasformazione dell'etere diacetilsuccinico in acidi pirrolcarbonici studiata da L. Knorr ([67]). Questa sostanza dà, per trattamento a freddo con l'ammoniaca o con l'acetato ammonico, *l'etere dietilico dell'acido αα'-dimetilpirrol-ββ'-dicarbonico* ([72]):



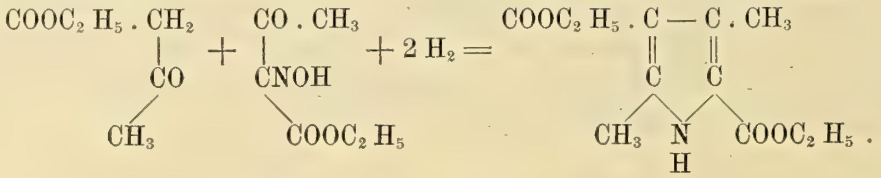
da cui si ha per saponificazione con un alcali un miscuglio dell'acido libero e dell'etere acido; quest'ultimo precipita saturando la soluzione con anidride carbonica o aggiungendovi acido acetico, l'acido libero si ottiene dal filtrato acidificando con un acido minerale. Dall'etere monoetilico si può poi preparare, riscaldandolo sopra il suo punto di fusione, *l'etere etilico dell'acido αα'-dimetil-β-pirrolmonocarbonico*, il di cui acido libero si scinde a 210°-213° in anidride carbonica e nel dimetilpirrolo simmetrico già più volte menzionato.

Facendo agire sull'etere diacetilsuccinico invece dell'ammoniaca la metilammina, l'anilina, la p-toluidina, l'α- e la β- naftilammina, la metilfenilidrazina e la glicocolla, si ottengono i corrispondenti derivati terziarî dell'etere dimetilpirroldicarbonico. Interessante si è, che anche l'idrossilammina ([67]) agisce come l'ammoniaca, dando origine all'etere dell'*acido n-ossi-$\alpha\alpha'$-dimetil-$\beta\beta'$-pirroldicarbonico* $C_4\overset{\alpha\alpha'}{(CH_3)_2}\overset{\beta\beta'}{(COOC_2H_5)_2}NOH$, che in causa dell'ossidrile, che contiene attaccato all'azoto, forma coll'alcoolato potassico un sale della formola $C_{12}H_{16}O_4N.OK$. L'etere dietilico di questo acido si trasforma per saponificazione nell'etere acido, dal quale per ulteriore azione degli alcali non si ottiene l'acido dicarbonico libero, ma bensì l'acido monocarbonico $C_4\overset{\alpha\alpha'}{(CH_3)_2}H\overset{\beta}{(COOH)}N.OH$. Facendo agire sull'etere diacetilsuccinico le diammine ([67]) come p. es. la metatoluilendiammina, si forma o l'etere n-metaamidotolil-$\alpha\alpha'$-dimetil-$\beta\beta'$-pirroldicarbonico $[C_4\overset{\alpha\alpha'}{(CH_3)_2}\overset{\beta\beta'}{(COOC_2H_5)_2}N.C_6H_4\overset{1}{NH_2}\overset{3}{CH_3}]$ o un derivato dipirrolico simile a quelli ottenuti da Paal e Schneider.

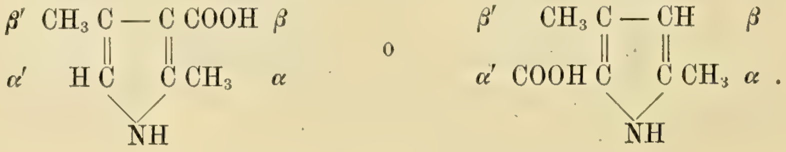
Similmente all'etere diacetilsuccinico si comporta, secondo le esperienze di Knorr, l'etere diacetilglutarico, il quale scaldato con acetato ammonico in soluzione d'acido acetico glaciale, si converte nell'*etere dietilico dell'acido $\alpha\alpha'$-dimetil-$\beta\beta'$-pirrolcarbonacetico* ([73]).



Per ultimo va notata la formazione *dell'etere dietilico dell'acido $\alpha\beta'$-dimetil-$\alpha'\beta$-pirroldicarbonico*, per riduzione di un miscuglio equimolecolare di etere acetoacetico e nitrosoacetoacetico con acido acetico e polvere di zinco ([67]):



Che in questa reazione si formi realmente l'etere di un acido assimmetrico, è stato già dimostrato più avanti, trattando delle sintesi dei derivati pirrolici in genere. Saponificando l'etere dietilico con la potassa alcoolica si forma il sale potassico di un etere monoetilico, che si ottiene precipitando la soluzione con etere, e da cui si ha l'etere monoetilico libero per aggiunta di acido acetico. Questo etere acido si scinde, se lo si riscalda sopra il suo punto di fusione, in anidride carbonica e nell'*etere di un acido $\alpha\beta'$-dimetilpirrolmonocarbonico* assimmetrico, che può avere le formole:



L'acido dimetilpirroldicarbonico assimmetrico libero, si ottiene dall'etere dietilico saponificandolo con soda acquosa.

Gli acidi pirrolcarbonici sono solidi, poco solubili nell'acqua, e sono in genere molto alterabili; in presenza di acidi minerali si convertono più o meno facilmente, con eliminazione di anidride carbonica in rosso di pirrolo. La scissione in anidride carbonica e nei pirroli corrispondenti, avviene sovente già per ebollizione con acqua, come fanno p. es. gli acidi α- e β-carbopirrolico, l'acido $\alpha\alpha$-pirroldicarbonico e l'acido $\alpha\alpha'$-dimetil-$\beta\beta'$-pirroldicarbonico; sempre però ha luogo questa decomposizione riscaldandoli sopra il loro punto di fusione. Anche gli eteri danno direttamente i pirroli corrispondenti, riscaldandoli con la potassa alcoolica o con l'acido solforico concentrato, come fa p. e. l'etere dietilico dell'acido $\alpha\beta'$-dimetil-$\alpha'\beta$-pirroldicarbonico ([67]). Questa poca stabilità degli acidi pirrolcarbonici, li avvicina agli ossiacidi aromatici, che in gran parte si scindono col semplice riscaldamento o per azione dell'acido cloridrico, in anidride carbonica e nei fenoli corrispondenti, mentre invece gli acidi tiofencarbonici e furfurancarbonici si volatilizzano senza decomporsi. Gli eteri degli acidi pirrolcarbonici, che si ottengono facendo agire i joduri alcoolici sui sali d'argento rispettivi ([125]), sono più stabili degli acidi liberi; essi distillano senza decomporsi e resistono in genere anche di più all'azione degli acidi. L'idrogeno imminico negli acidi pirrolcarbonici è meno sostituibile che l'idrogeno fenico degli ossiacidi aromatici e non si salifica ordinariamente; lo fa soltanto quando l'idrogeno carbossilico è eterificato: così p. e. gli eteri dietilici degli acidi dimetilpirroldicarbonici $[C_4(\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2(COO\,\overset{\beta\beta'}{C_2}H_5)_2NH$ e $C_4(\overset{\alpha}{CH_3})(\overset{\alpha'}{COO}\,C_2H_5)(\overset{\beta'}{CH_3})(\overset{\beta}{COO}\,C_2H_5)NH]$ formano colla potassa alcoolica e col potassio in soluzione eterea i composti potassici della formola $C_6H_6(COO\,C_2H_5)_2NK$ ([67]). Alcuni eteri possiedono un debole carattere alcalino, come l'etere dietilico dell'acido $\alpha\alpha'$-dimetil-$\beta\beta'$-dicarbonico, che forma un picrato ed un cloroplatinato $(C_{12}H_{17}NO_4 . HCl)_2PtCl_4$ ([72]).

Il più studiato fra gli acidi pirrolcarbonici è naturalmente quello di Schwanert; del suo comportamento con gli alogeni e con l'acido nitrico si tratterà nei capitoli seguenti; in questo resta soltanto a parlare ancora della sua anidride, la *pirocolla* ([47]). Questa sostanza è stata scoperta da Weidel e Ciamician fra i prodotti della distillazione secca della gelatina pura. In questo processo si ottiene, oltre ad un liquido catramoso, una materia solida formata da sali ammonici e dalla pirocolla. Il primo contiene tutte le sostanze, che si rinvengono nell'olio animale ad eccezione dei nitrili degli acidi della serie $C_nH_{2n}O_2$, che provengono dalle materie grasse contenute nelle ossa, e delle basi piridiche, che si formano probabilmente a spese dell'acroleina. Per preparare la pirocolla si lava la parte solida del prodotto con acqua e con alcool e si fa cristallizzare il residuo insolubile dall'acido acetico glaciale e dal cloroformio. La pirocolla è stata poi ottenuta da Ciamician e Silber riscaldando l'acido carbopirrolico coll'anidride acetica ([126]); durante l'ebollizione del miscuglio di queste due sostanze si svolge anidride carbonica e distillando il prodotto a pressione ridotta a b. m., passano assieme all'eccesso di anidride acetica, piccole quantità di n-acetilpirrolo. Il residuo è un liquido oleoso nerastro, che con acqua si scinde in acido carbopirrolico ed in acido acetico, riscaldato a 160-170° esso entra violentemente in ebollizione e

si scompone in acido acetico ed in una materia solida, che non è altro che pirocolla impura. Questa si purifica facendola cristallizzare dall'acido acetico glaciale bollente. Per spiegare la formazione dell'anidride imminica dell'acido carbopirrolico, si può ammettere che questo si converta prima in un composto acetilico:

$$\begin{matrix} C_4H_3NCOCH_3 \\ \dot{C}OOH \end{matrix} ,$$

il quale poi col riscaldamento si scinde in acido acetico e pirocolla secondo l'equazione:

$$2\begin{matrix} C_4H_3N.CO.CH_3 \\ \dot{C}OOH \end{matrix} = 2\,C_2H_4O_2 + \begin{matrix} C_4H_3N - CO \\ | \qquad\quad | \\ CO - C_4H_3N \end{matrix} .$$

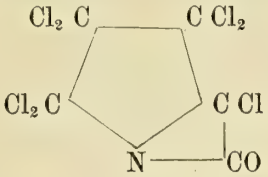
La reazione deve estendersi a due molecole, perchè la pirocolla contiene, come lo dimostra la sua densità di vapore ([47]), nella sua molecola due volte il residuo dell'acido carbopirrolico ed ha la formola $C_{10}H_6N_2O_2$. — Trattando il sale argentico dell'acido carbopirrolico a freddo con cloruro d'acetile diluito con etere petrolico ([125]), si ottiene una materia solida fusibile a 75°, che con acqua si scinde nuovamente negli acidi acetico e carbopirrolico e che col riscaldamento dà del pari acido acetico e pirocolla. Questo composto, che non può avere che una delle seguenti formole:

$$\begin{matrix} C_4H_3NH \\ \dot{C}O.O.COCH_3 \end{matrix} \quad o \quad \begin{matrix} C_4H_3N.COCH_3 \\ \dot{C}OOH \end{matrix} ,$$

è forse identico al prodotto intermedio che si forma bollendo l'acido di Schwanert con anidride acetica. — La pirocolla fonde a 268°, è volatile senza decomposizione, è poco solubile nei solventi ordinarî ed è uno dei composti più stabili della serie del pirrolo. Essa resiste all'azione degli acidi minerali, anche concentrati, e non viene decomposta che dagli alcali a caldo ([47]); bollendola con la potassa, si ottiene l'acido carbopirrolico di Schwanert e riscaldandola con l'ammoniaca alcoolica, essa si trasforma in carbopirrolamide ([47]). La pirocolla dà col bromo e coll'acido nitrico prodotti di sostituzione, che sono stati studiati da Ciamician e Danesi ([130]). Il bromo dà una monobromo-, bibromo- e tetrabromopirocolla e l'acido nitrico una dinitropirocolla. Da queste sostanze si ottengono per azione della potassa gli acidi mono- e bibromocarbopirrolico e l'acido nitrocarbopirrolico.

Merita speciale menzione il comportamento della pirocolla col pentacloruro di fosforo, studiato prima da Ciamician e Danesi ([130]) e poi da Ciamician e Silber ([17]). Questo reattivo agisce sulla imminanidride dell'acido carbopirrolico solamente a temperature elevate (200-220°) ed in queste condizioni si forma, oltre a piccole quantità di un composto ancora poco studiato, della formola $C_{10}Cl_{10}N_2O$, la *percloropirocolla* $[C_{10}Cl_6O_2N_2]$, che è una sostanza gialla, cristallina, quasi insolubile in tutti i solventi, che fonde sopra i 300° e che dà con la potassa l'acido triclorocarbopirrolico. Il pentacloruro di fosforo non è capace di sostituire tutto l'ossigeno della pirocolla, perchè facendo agire ulteriormente sulla percloropirocolla a 250° questo reattivo, si

ottiene, oltre a piccole quantità del composto già menzionato $C_{10}\,Cl_{10}\,N_2\,O$, principalmente il *tetracloruro di percloropirocolla* $C_{10}\,Cl_{14}\,N_2\,O_2$ o $C_5\,Cl_7\,NO$ (130) (17).



Questo composto è molto interessante, perchè è stato il primo prodotto di addizione che si è conosciuto nella serie del pirrolo. Esso cristallizza in grossi prismi cuboidi monoclini, non ha colore, è insolubile nell'acqua, ma solubile negli altri solventi ordinarî, fonde a temperatura relativamente bassa a 146-147°,5 ed ha un odore marcato, simile a quello della canfora. La sua costituzione è stata confermata dal suo modo di comportarsi con l'idrogeno nascente (17). Trattando la sua soluzione acetica con polvere di zinco, si forma, in seguito ad una viva reazione, il *tetracloropirrolo*, di cui si parlerà in uno dei seguenti capitoli.

$$C_5\,Cl_7\,NO + H_2 + H_2\,O = C_4\,Cl_4\,NH + CO_2 + 3\,H\,Cl\,.$$

Del pari interessanti sono le seguenti reazioni perchè fu per esse che Ciamician e Silber (17) riconobbero il nesso esistente fra il pirrolo e l'imide dell'acido maleico. Bollendo il percloruro ora descritto con acido acetico diluito, si ottiene, con svolgimento di anidride carbonica, l'imide bicloromaleica

$$C_5\,Cl_7\,NO + 3\,H_2\,O = C_4\,Cl_2\,O_2\,NH + CO_2 + 5\,H\,Cl\,,$$

e riscaldandolo con acqua in tubi chiusi a 130°, si forma l'acido bicloroacrilico, che non è altro, come venne dimostrato con una apposita esperienza (17), che il prodotto di un'ulteriore scissione dell'imide bicloromaleica:

$$C_4\,Cl_2\,O_2\,NH + 2\,H_2\,O = C_3\,Cl_2\,H_2\,O_2 + CO_2 + NH_3\,.$$

In queste reazioni il cloro addizionato del percloruro di percloropirocolla agisce in presenza dell'acqua come ossidante.

VIII.

Comportamento del pirrolo con i cloruri di radicali organici negativi e con le anidridi di acidi organici.

Il comportamento del pirrolo côi cloruri di radicali negativi organici è stato studiato da Ciamician e Dennstedt e da Ciamician e Magnaghi, e corrisponde in parte, come s'è già detto più sopra, a quello delle ammine aromatiche.

Facendo agire sul composto potassico del pirrolo, sospeso nell'etere anidro, una corrente di cloruro di cianogeno (CN Cl) (95) si forma, secondo l'eguaglianza

$$C_4\,H_4\,NK + CN\,Cl = C_4\,H_4\,N\,.\,CN + K\,Cl\,,$$

un prodotto oleoso, che dopo qualche tempo si trasforma in parte in una materia cristallina, la di cui composizione corrisponde a quella d'una *tetrolcianamide*. Le proprietà di questo composto fanno però supporre, che esso non abbia la semplice formola C_4H_4NCN, ma che sia invece il polimero $(C_4H_4N)_3(CN)_3$, la *tetrolmelammina*. Esso è insolubile nell'acqua, poco nell'alcool, fonde a 210° e si volatilizza con decomposizione sopra i 300°. La potassa alcoolica lo scinde in pirrolo e probabilmente in acido cianurico, oppure in pirrolo, anidride carbonica ed ammoniaca. Il comportamento del pirrolo col cloruro di cianogeno corrisponde perciò a quello della difenilammina, che dà in modo analogo un composto polimero della difenilcianamide $(C_6H_5)_2N.CN$.

L'etere clorocarbonico ([97]) agisce pure sul composto potassico del pirrolo sostituendo per doppia decomposizione il potassio col radicale organico. Se si tratta il composto potassico del pirrolo coll'etere clorocarbonico in soluzione eterea, si ottiene, distillando l'etere, dopo avere separato il cloruro potassico che si forma nella reazione:

$$C_4H_4NK + CO\left\langle\begin{matrix}Cl\\OC_2H_5\end{matrix}\right. = C_4H_4N.CO.OC_2H_5 + KCl,$$

un olio che bolle a 180°, e che è la *tetroluretana*. Questa sostanza dà, per riscaldamento coll'ammoniaca a 110°, alcool etilico e la *monotetrolurea* o *pirrolcarbamide* ([97]):

$$CO\left\langle\begin{matrix}NC_4H_4\\OC_2H_5\end{matrix}\right. + NH_3 = CO\left\langle\begin{matrix}NC_4H_4\\NH_2\end{matrix}\right. + C_2H_6O,$$

che è solida e fonde a 165-166°. Riscaldando con ammoniaca a 130°, si ottiene invece urea, pirrolo ed alcool etilico. La tetroluretana e la tetrolurea sono isomeri all'etere etilico dell'acido carbopirrolico ed alla carbopirrolamide.

I cloruri degli acidi organici agiscono del pari sul composto potassico del pirrolo, formando principalmente derivati pirrolici in cui l'idrogeno imminico è sostituito dal radicale acido, ma, contemporaneamente a questi, si producono in piccola quantità i composti chetonici, loro isomeri. Trattando, per esempio, il composto potassico del pirrolo, sospeso nell'etere anidro, con una soluzione benzenica di fosgene ([96]), si ottiene distillando con vapore acqueo il prodotto, liberato dai solventi a b. m., il *carbonilpirrolo* o la *ditetrolurea*:

$$2\,C_4H_4NK + CO{}^{Cl}_{Cl} = CO\left\langle\begin{matrix}NC_4H_4\\NC_4H_4\end{matrix}\right. + 2\,KCl,$$

che fonde a 62-63° e bolle verso i 238°. Il liquido che resta indietro nella distillazione, contiene però un'altra sostanza, isomera al carbonilpirrolo, che si ottiene per estrazione con etere e si purifica facendola cristallizzare dal benzolo bollente. Questo corpo, che fonde a 160°, è il *dipirrilchetone* o *pirrone*

$$CO\left\langle\begin{matrix}C_4H_3NH\\C_4H_3NH\end{matrix}\right.,$$

e si distingue dal suo isomero, perchè non viene scisso dalla potassa in pirrolo ed anidride carbonica, e perchè dà col nitrato d'argento ed ammoniaca un composto diargentico $CO[C_4H_3NAg]_2$, mentre il carbonilpirrolo viene decomposto dalla potassa e riduce la soluzione d'argento ammoniacale.

Il comportamento del cloruro d'acetile è del tutto analogo a quello del cloruro di carbonile, e dà col composto potassico del pirrolo, oltre all'*acetilpirrolo* $[C_4H_4NCOCH_3]$ decomponibile dalla potassa, piccole quantità di *pirrilmetilchetone* $[(C_4H_3NH).CO.CH_3]$ (98).

Questa doppia azione, che già si accenna nel comportamento dei cloruri degli acidi organici col composto potassico del pirrolo, si rende assai più manifesta nel comportamento del pirrolo con le anidridi organiche, ed è stato appunto studiando l'azione dell'anidride acetica sul pirrolo, che Ciamician e Dennstedt (98) hanno scoperto questa proprietà tanto caratteristica del nucleo pirrolico.

Si può dire in generale, che le anidridi degli acidi organici, a temperature non più elevate del loro punto di ebollizione, trasformano il pirrolo in un miscuglio formato da parti pressochè eguali del composto chetonico e del derivato in cui è sostituito l'idrogeno imminico (98) (80) (131):

$$\begin{array}{l} C_4H_3NH \\ \dot{C}O.R \end{array} \quad e \quad C_4H_4N.CO.R\ .$$

A temperature più elevate, 250-300°, il radicale acido rispetta l'idrogeno imminico e si ottiene invece un derivato dichetonico (80) (131) (132)

$$\begin{array}{l} CO.R \\ \dot{C}_4H_2NH \\ \dot{C}O.R \end{array} \ .$$

Sembra inoltre che in queste reazioni il carbossile possa fare in certo modo le veci del radicale chetonico, perchè p. es. l'etere dell'acido carbopirrolico non dà alla temperatura di 250-260°, con l'anidride acetica, che il composto monoacetilico (125)

$$\begin{array}{l} COOCH_3 \\ \dot{C}_4H_2NH \\ \dot{C}OCH_3 \end{array} \ .$$

Non è stato possibile finora di introdurre nel nucleo del pirrolo più di due radicali chetonici (*), riscaldando il pirrolo con le anidridi organiche sopra i 300°, avviene completa carbonizzazione del prodotto.

Il comportamento dell'idrogeno imminico del pirrolo, che prende parte alla reazione a bassa temperatura e non lo fa più a temperatura più elevata, può sembrare

(*) Nella letteratura dei derivati del pirrolo si trova accennato un n-tolilpirrolo ($C_4H_4NC_7H_7$) ed un n-tolil-tetraacetilpirrolo, di cui l'autore (Lichtenstein, Berl. Ber. XIV, 933) non descrive le proprietà, nè pubblica le analisi. Ciamician e Silber però non hanno potuto ottenere dal n-benzilpirrolo che un diacetilcomposto

strano a prima vista, ma lo si comprende facilmente se si tiene conto delle esperienze di Ciamician e Magnaghi ([133]). Questi chimici trovarono che i derivati del pirrolo, che contengono, invece dell'idrogeno imminico, un radicale acido, si trasformano nei loro isomeri chetonici alla temperatura di 250-300°. In questo modo l'acetilpirrolo diventa pirrilmetilchetone, ed il carbonilpirrolo dà origine a due composti isomeri, che segnano le due fasi in cui, in questo caso, si compie il processo di trasformazione. Le due sostanze sono il pirroil-pirrolo ed il dipirrilchetone già accennato.

$$\underset{\text{acetilpirrolo}}{C_4H_4N \,.\, CO \,.\, CH_3} \quad \text{diventa} \quad \underset{\text{pirrilmetilchetone}}{(C_4H_3NH)\,CO \,.\, CH_3}$$

$$\underset{\text{carbonilpirrolo}}{CO\left\langle\begin{array}{l} N \,.\, C_4H_4 \\ N \,.\, C_4H_4 \end{array}\right.} \quad \text{diviene} \quad \underset{\text{pirroilpirrolo}}{CO\left\langle\begin{array}{l} N \,.\, C_4H_4 \\ C_4H_3NH \end{array}\right.} \quad \text{e} \quad \underset{\text{dipirrilchetone o pirrone}}{CO\left\langle\begin{array}{l} C_4H_3NH \\ C_4H_3NH \,. \end{array}\right.}$$

Scaldando il carbonilpirrolo a 250° e distillando il prodotto con vapore acqueo, passa la parte del composto non modificato ed il liquido che resta indietro contiene il pirroilpirrolo ed il pirrone. Questi si estraggono con etere e si separano mediante l'etere petrolico, in cui il pirrone è quasi insolubile. Il pirroilpirrolo fonde a 62-63° come il carbonilpirrolo, ma si distingue da questo principalmente per il suo comportamento con gli alcali, perchè si scinde, se viene bollito con la potassa, in acido α-carbopirrolico ed in pirrolo:

$$CO\left\langle\begin{array}{l} C_4H_3NH \\ NC_4H_4 \end{array}\right. + H_2O = \begin{array}{l} C_4H_3NH \\ \dot{C}OOH \end{array} + C_4H_4NH \,.$$

Queste reazioni sono analoghe, come si vede, alla trasformazione del pirrolo negli acidi pirrolcarbonici per mezzo dell'anidride carbonica o dei bicarbonati alcalini. Esse servono mirabilmente a mettere in rilievo la mobilità degli idrogeni tetrolici del pirrolo, che è causa precipua della somiglianza di questo corpo con i fenoli aromatici.

Nel seguente specchietto sono riuniti tutti i composti in questione, e da questo si rileva, che i derivati del pirrolo, che contengono il radicale negativo al posto dell'idrogeno

imminico, hanno punti di fusione e di ebollizione inferiori a quelli dei loro isomeri. Ciò si è notato pure per i prodotti di sostituzione coi radicali alcoolici.

$C_4H_4N \,.\, CO \,.\, OC_2H_5$ Tetroluretana liquido, p. eb. 180°	C_4H_3NH $\dot{C}OOC_2H_5$ Etere etilico dell'acido α-carbopirrolico p. f. 39°, p. eb. 230-232°	
$C_4H_4N \,.\, CONH_2$ Tetrolurea p. f. 167-168°	C_4H_3NH $\dot{C}ONH_2$ Carbopirrolamide p. f. 176°,5	
$CO<^{NC_4H_4}_{NC_4H_4}$ Ditetrolurea p. f. 62-63°	$CO<^{NC_4H_4}_{C_4H_3NH}$ Pirroilpirrolo p. f. 62-63°	$CO<^{C_4H_3NH}_{C_4H_3NH}$ Dipirrilchetone p. f. 160°
$C_4H_4NCOCH_3$ n-Acetilpirrolo liquido, p. eb. 181-182°	C_4H_3NH $\dot{C}OCH_3$ Pirrilmetilchetone p. f. 90°, p. eb. 220°	$C_4H_2NH<^{COCH_3}_{COCH_3}$ Pirrilendimetildichetone p. f. 161-162°
$C_4H_4NCO\,C_2H_5$ n-Propionilpirrolo liquido, p. eb. 192-194°	C_4H_3NH $\dot{C}O\,C_2H_5$ Pirriletilchetone p. f. 52°, p. eb. 222°-225°	$C_4H_2NH<^{COC_2H_5}_{COC_2H_5}$ Pirrilendietildichetone p. f. 116-117°
$C_4H_4NCOC_6H_5$ n-Benzoilpirrolo liquido	C_4H_3NH $\dot{C}OC_6H_5$ Pirrilfenilchetone p. f. 77-78°	
$C_4H_3NCOCH_3$ (?) $\dot{C}OOH$ Acido n-acetil-α-carbopirrolico p. f. 75°	$C_4H_2NH<^{COCH_3}_{COOH}$ Acido α-acetil-α'-carbopirrolico p. f. 186°	

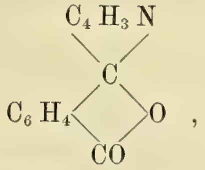
I due acetilpirroli (l' n-acetilpirrolo ed il c-acetilpirrolo) si preparano, secondo il metodo di Ciamician e Dennstedt ([98]), bollendo per 6 ore un miscuglio di 50 p. di pirrolo con 300 p. di anidride acetica e 60 p. di acetato sodico fuso (o cloruro

di zinco) ([134]). Per eliminare dal prodotto della reazione il pirrolo rimasto inalterato e l'eccesso di anidride acetica, si distilla a pressione ridotta a b. m.. Si separano poi le due sostanze distillando il residuo semisolido con vapore acqueo. Passa principalmente l' n-acetilpirrolo, ed il liquido che resta indietro, contiene, oltre ad una materia resinosa, che si toglie per filtrazione, il pirrilmetilchetone che si separa in aghi col raffreddamento. Si purifica quest'ultimo coll'aggiunta di nero animale, facendolo cristallizzare dall'acqua bollente. Dalle acque madri si estrae il composto con etere. Per ottenere puro l' n-acetilpirrolo, lo si distilla ripetutamente con vapore acqueo, perchè essendo esso quasi insolubile nell'acqua bollente, si riesce con questo mezzo a separarlo completamente dal pirrilmetilchetone che è notevolmente solubile ([135]).

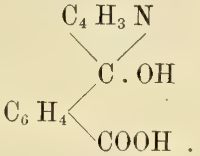
L'n-acetilpirrolo, come pure i suoi omologhi, è un liquido senza colore, che ha un odore di mandorle amare, è alterabile all'aria ed alla luce ed il suo vapore arrossa una scheggia d'abete bagnata di acido cloridrico. Esso riduce una soluzione di nitrato d'argento ammoniacale, e viene scisso dalla potassa acquosa bollente in pirrolo ed acetato sodico. Il pirrilmetilchetone invece è solido, come tutti i suoi omologhi, è molto stabile, non arrossa la scheggia d'abete, non viene decomposto dalla potassa bollente e dà col nitrato d'argento ammoniacale un precipitato bianco del composto argentico $(C_4H_3NAg)\,COCH_3$. — La natura chetonica del c-acetilpirrolo si svela nel suo comportamento coll'idrossilammina e colla fenilidrazina ([80]). Esso forma la *pirrilmetilacetoossima* $[(C_4H_3NH).C(NOH).CH_3]$, bollendolo in soluzione alcoolica con cloridrato di idrossilammina e carbonato sodico, e dà coll'acetato di fenilidrazina un precipitato molto alterabile della composizione $(C_4H_3NH).(CN_2H.C_6H_5).CH_3$. Il pirrilmetilchetone forma coll'aldeide benzoica, come l'acetofenone ed il metiltienilchetone, un prodotto di condensazione, che si ottiene bollendolo con la quantità necessaria di aldeide benzoica in presenza di potassa diluita. Questo composto è il *c-cinnamilpirrolo* $(C_4H_3NH)\,CO.CH{:}CH.C_6H_5$ ([80]). Il pirrilmetilchetone si trasforma inoltre, per azione dell'amalgama di sodio nel *pirrilmetilpinacone* $[(C_4H_3NH)-(C.OH.CH_3)-(C\,OH.C.H_3)-C_4H_3NH)]$, che cristallizza con due molecole d'acqua e fonde a 98° ([134]).

Il pirrolo ([132]) ed i due acetilpirroli isomeri ([80]) ([135]) danno, per ulteriore riscaldamento con anidride acetica sopra i 250°, il *c-diacetilpirrolo* o *pirrilen-dimetil-dichetone*. Per preparare questo corpo si riscalda il pirrolo con 10 p. di anidride acetica a 240-260°, e si esaurisce la massa semicarbonizzata, che ne risulta, con acqua bollente, aggiungendo carbonato sodico per saturare l'acido acetico ([132]) ([128]). Il composto, che si separa dalla soluzione per raffreddamento, viene purificato facendolo cristallizzare dall'acqua bollente. La materia che rimane nelle acque madri viene estratta con etere. Il pirrilendimetildichetone si scioglie a caldo nella potassa concentrata, formando un composto potassico ([80]), che si decompone con un eccesso di acqua; esso forma pure un composto argentico $[(C_4H_2NAg)(COCH_3)_2]$ col nitrato d'argento ammoniacale. Coll'aldeide benzoica dà il *c-dicinnamilpirrolo* $[(C_4H_2NH).(CO.CH{:}CH.C_6H_5)_2]$. Il pirrolo si comporta con la maggior parte delle altre anidridi organiche ([80]) ([131]) come coll'anidride acetica. Coll'anidride propionica ([131]) si ottiene un n-propionilpirrolo, un etilpirrilchetone ed un c-dipropionilpirrolo o pirrilendietildichetone; coll'anidride benzoica ([80]) un pirrilfenilchetone ed un n-benzoilpirrolo fin' ora poco studiato. —

Un poco diverso è il comportamento del pirrolo e dei suoi omologhi con l'anidride ftalica (80) (136), studiato da Ciamician e Dennstedt. Riscaldando il pirrolo con anidride ftalica, in soluzione di acido acetico glaciale a 180°-190°, esaurendo la massa semisolida, che ne risulta, con alcool bollente e facendo cristallizzare il prodotto dallo stesso solvente, si ottengono gli aghi gialli, fusibili a 240°-241° di un composto, che può essere considerato come una *pirrolenftalide*



perchè non si combina coll'idrossilammina, e non dà un composto argentico. Questa sostanza si scioglie nella potassa bollente e dalla soluzione acidificata si può estrarre con etere un composto senza colore, che fonde scomponendosi fra 174° e 184°, e che è l'acido corrispondente all'anidride fusibile a 240°:



L'*acido pirrolenfenilcarbinol-o-carbonico* così ottenuto, si ritrasforma nella sua anidride per riscaldamento sopra il suo punto di fusione ed anche per semplice svaporamento della soluzione acquosa, massime in presenza di un poco d'ammoniaca.

Il comportamento degli omologhi del pirrolo con le anidridi organiche corrisponde perfettamente a quello del pirrolo; in questo senso furono studiati gli omopirroli (119), il c-etilpirrolo (114), il c-isopropilpirrolo (117) e l'$\alpha\alpha'$-dimetilpirrolo (114). — Anche i pirroli terziarî danno prodotti corrispondenti a quelli che si ottengono dal pirrolo, così p. es. l'n-metilpirrolo, dà un n-metilpirrilmetilchetone (80) ed un n-metilpirrilendimetildichetone (116) a seconda della temperatura a cui si fa agire l'anidride acetica e del pari è stato ottenuto il c-diacetil-n-benzilpirrolo (116), riscaldando l'n-benzilpirrolo con anidride acetica a 240°.

S' è già detto che l'acido carbopirrolico dà per ebollizione con acido acetico solamente un composto acetilico, poco stabile, in cui l'acetile sostituisce l'idrogeno imminico. Questo composto non può essere trasformato nel composto chetonico corrispondente, riscaldandolo a temperature più elevate, perchè si scinde in acido acetico e pirocolla (125) (126). Per ottenere un acido c-acetilcarbopirrolico si deve perciò ricorrere agli eteri. Riscaldando l'etere metilico dell'acido carbopirrolico di Schwanert con un eccesso di anidride acetica a 250°-260°, Ciamician e Silber (125) hanno potuto ottenere l'etere metilico dell'*acido c-acetilcarbopirrolico* e da questo, per saponificazione con potassa acquosa, l'acido libero che fonde a 186°, e che è molto stabile. In questa occasione si può far notare, che in genere l'introduzione di radicali acidi nel residuo tetrolico del pirrolo rende le sostanze, che così si formano, molto stabili ed anche resistenti agli acidi minerali.

Il comportamento dell'acido $\alpha\alpha$-pirroldicarbonico con l'anidride acetica non è ancora studiato sufficientemente, ma sembra ch'esso non sia in grado di dare un composto acetonico.

I composti chetonici della serie del pirrolo corrispondono a quelli della serie tiofenica, non tanto per il loro modo di formazione, quanto per il loro comportamento chimico. Gli acetoni tiofenici si ottengono come quelli aromatici, cioè per azione del cloruro dell'acido corrispondente sul tiofene in presenza di cloruro d'alluminio ([41]). Il ditienilchetone [$C_4H_3S . CO . C_4H_3S$] ([137]) si forma anche per distillazione del sale calcico dell'acido tiofenico, mentre il sale di calcio dell'acido carbopirrolico non dà, nelle stesse condizioni, che pirrolo. La somiglianza dei composti chetonici del pirrolo con quelli tiofenici si manifesta principalmente nei loro prodotti di ossidazione, perchè tutte le due serie di composti danno assai facilmente gli acidi gliossilici, mentre i chetoni aromatici si trasformano, nelle stesse condizioni, di preferenza, direttamente negli acidi carbonici.

I composti acetonici del pirrolo, che sono stati studiati fin'ora da questo lato, sono il pirrilmetilchetone (Ciamician e Dennstedt) ([98]), il c-diacetilpirrolo e l'acido c-acetilcarbopirrolico (Ciamician e Silber) ([128]), che danno per ossidazione col permanganato potassico in soluzione alcalina gli acidi *pirrilgliossilico* e *carbopirrilgliossilico*:

$$\underset{\text{pirrilmetilchetone}}{\begin{matrix} C_4H_3NH \\ -COCH_3 \end{matrix}} \quad \text{dà} \quad \underset{\text{acido pirrilgliossilico}}{\begin{matrix} C_4H_3NH \\ CO . COOH \end{matrix}}$$

$$\underset{\text{c-diacetilpirrolo}}{(C_4H_2NH)\begin{cases} COCH_3 \\ COCH_3 \end{cases}} \quad \text{e} \quad \underset{\text{acido c-acetilcarbopirrolico}}{(C_4H_2NH)\begin{cases} COCH_3 \\ COOH \end{cases}} \quad \text{danno tutti e due}$$

$$\underset{\text{acido carbopirrilgliossilico}}{(C_4H_2NH)\begin{cases} COCOOH \\ COOH \end{cases}}$$

In modo analogo l'acetotienone dà l'acido tienilgliossilico e l'acido tiofenico

$$\underset{\alpha\text{-acetotienone}}{(C_4H_3S) . CO . CH_3} \quad \text{dà} \quad \underset{\text{acido tienilgliossilico}}{(C_4H_3S) . CO . COOH} \quad \text{e} \quad \underset{\text{acido } \alpha\text{-tiofenico}}{(C_4H_3S)\, COOH}$$

La trasformazione dell'c-acetil- ([18]) e c-diacetilpirrolo ([128]) negli acidi pirrolmonocarbonico e pirroldicarbonico non riesce che per fusione con la potassa solida.

I composti chetonici degli omologhi del pirrolo si prestano male ai processi di ossidazione ([117]) quasi quanto gli stessi omologhi del pirrolo, perciò differiscono molto dai corrispondenti derivati degli omologhi del tiofene, che danno facilmente gli acidi gliossilici e carbonici.

Per preparare l'acido pirrilgliossilico si trattano, secondo la prescrizione di Ciamician e Dennstedt ([98]), 5 gr. di pirrilmetilchetone sciolto in mezzo litro di acqua

calda, resa alcalina con un poco di potassa, con la quantità necessaria di camaleonte sciolto del pari in mezzo litro d'acqua bollente. L'ossidazione è pronta, ed il liquido filtrato dagli ossidi manganici e convenientemente concentrato, viene acidificato con acido solforico diluito ed estratto ripetutamente, rapidamente con etere. Il prodotto greggio viene seccato nel vuoto sull'acido solforico ed indi fatto cristallizzare dal benzolo bollente. L'acido pirrilgliossilico ([98]), cristallizza con una molecola d'acqua, come il corrispondente composto tiofenico ([138]), e fonde a 74°-76°, quando è deacquificato ha un colore giallo e si scompone a 113°-115°. Esso è poco solubile nell'acqua, e la sua soluzione dà col cloruro ferrico una colorazione rossa. Si scioglie a caldo nell'acido cloridrico formando una soluzione colorata in rosso carminio intenso, che prende un colore giallo-verdastro per aggiunta di un alcali e ridiventa rossa per acidificazione ([98]). L'acido pirrilgliossilico è più alterabile dell'acido carbopirrolico, col riscaldamento si scompone totalmente, ed anche il suo sale calcico non dà, per distillazione con la calce viva, che tracce di pirrolo. Dall'acido tienilgliossilico si ottiene invece col riscaldamento l'aldeide α-tiofenica ([43]). — L'acido pirrilgliossilico non dà per ulteriore ossidazione l'acido carbopirrolico corrispondente; per ottenere questo dal pirrilmetilchetone è necessario ricorrere alla fusione colla potassa ([18]). In questo modo si ottiene abbondantemente l'acido carbopirrolico di Schwanert.

Il c-diacetilpirrolo e l'acido c-acetilcarbopirrolico danno, come s'è detto, tutti e due, secondo le esperienze di Ciamician e Silber, per ossidazione col camaleonte in soluzione alcalina, l'acido carbopirrilgliossilico ([128]). L'esecuzione di questa operazione è identica a quella ora descritta per ottenere l'acido pirrilgliossilico, solamente è da notarsi, che la poca stabilità dell'acido carbopirrilgliossilico e la sua difficile purificazione ne hanno impedito lo studio ulteriore; più stabile invece è il suo etere dimetilico, che si ottiene dal sale argentico, che è giallo, con joduro di metile.

Ossidando il sale potassico dell'acido carbopirrilgliossilico con la potassa fondente, si ottiene un acido pirroldicarbonico, che è la sola sostanza di questa composizione conosciuta fin' ora nella serie del pirrolo. L'operazione venne eseguita da Ciamician e Silber in un crogiuolo d'argento, impiegando un eccesso di potassa e prolungandone l'azione finchè la massa, che è gialla in principio, diventa bianca, perchè il sale potassico dell'acido chetonico ha un colore giallo. L'acido dicarbonico viene estratto con etere dalla soluzione acquosa della massa fusa, acidificata con acido solforico diluito, e purificato facendolo cristallizzare dall'alcool diluito. Esso forma delle croste cristalline, poco solubili nell'acqua, e la sua soluzione acquosa precipita direttamente coll'acetato di piombo e col nitrato argentico. L'acido pirroldicarbonico si scompone senza fondere sopra i 260° in pirrolo ed anidride carbonica. Dal suo sale biargentico si ottiene per azione del joduro di metile, già a temperatura ordinaria, un miscuglio degli eteri monometilico ([81]) e dimetilico, che si separano mediante il carbonato sodico.

La costituzione dei composti chetonici e degli acidi, menzionati in questo capitolo, è stata determinata da Ciamician e Silber ([81]) ([128]) mediante una serie di reazioni, che sono state in parte già brevemente accennate nel terzo capitolo di questa Monografia.

Risulta, prima di tutto, da quanto è stato esposto fin' ora, che le sostanze in questione sono legate per la loro genesi, tra di loro in modo, che, non volendo ammettere trasposizioni molecolari nelle reazioni descritte, i diversi radicali in esse contenuti non possono occupare nel residuo tetrolico del pirrolo, che due posti soltanto. Questi sono distinti nella seguente serie, provvisoriamente con le lettere a e b:

$C_4H_3(\overset{a}{CO}OH)NH$ *Acido carbopirrolico di Schwanert.*

$C_4H_3(CO\overset{a}{CO}OH)NH$ *Acido pirrilgliossilico.*

$C_4H_3(\overset{a}{CO}CH_3)NH$ *Pirrilmetilchetone.*

$C_4H_2(\overset{a}{CO}OH)(\overset{b}{CO}CH_3)NH$ *Acido acetilcarbopirrolico.*

$C_4H_2(\overset{a}{CO}CH_3)(\overset{b}{CO}CH_3)NH$ *Pirrilendimetildichetone.*

$C_4H_2(\overset{a}{CO}OH)(\overset{b}{CO}COOH)NH$ *Acido carbopirrilgliossilico.*

$C_4H_2(\overset{a}{CO}OH)(\overset{b}{CO}OH)NH$ *Acido pirroldicarbonico.*

Ora la seguente semplice esperienza ([128]) dimostra, che le posizioni a e b sono tra loro equivalenti. Distillando il sale potassico dell'acido acetilcarbopirrolico, si ottiene nettamente l'unico pirrilmetilchetone fin' ora conosciuto, che fonde a 90°, e che dà per ossidazione l'acido carbopirrolico di Schwanert, dal quale si ottiene l'acido acetilcarbopirrolico. Per ciò, data la costituzione del pirrolo, già discussa nel terzo capitolo, resta soltanto a decidere se le posizioni

$$a = b$$

corrispondono ai posti

$$\alpha = \alpha',$$

oppure a quelli

$$\beta = \beta'.$$

Questo problema trova subito la soluzione nel fatto che l'acido carbopirrolico di Schwanert contiene, per la sua genesi dall'acido mucico, con grande probabilità, il carbossile nella posizione α ([18]), e così tutti i composti in questione devono appartenere alla serie dei derivati $\alpha\alpha'$ ([128]).

Questa dimostrazione è stata pienamente confermata per mezzo di un'altra serie di reazioni e di ragionamenti del tutto indipendenti da quelli ora esposti. Ciamician e Silber ([81]) hanno provato direttamente, che l'acido carbopirrolico di Schwanert, il pirrilmetilchetone, il pirrilendimetildichetone e l'acido pirroldicarbonico, contengono i loro radicali acetonici e carbossilici nelle posizioni $\alpha = \alpha'$, trasformando queste sostanze nei loro derivati bi-o tribromurati ed ossidando i composti ottenuti, a bassa temperatura, con l'acido nitrico fumante. Il tribromopirrilmetilchetone $C_4Br_3(COCH_3)NH$, l'acido tribromocarbopirrolico $C_4Br_3(COOH)NH$, il bibromopirrilendimetildichetone $C_4Br_2(COCH_3)_2NH$, e l'acido bibromopirrol-dicarbonico $C_4Br_2(COOH)_2NH$, danno tutti, in questo modo, l'imide bibromomaleica. Ora qualunque sia la costituzione dell'acido

maleico, è certo che nella bibromomaleinimide (*) i due atomi di bromo stanno nella posizione che nella presente Monografia s'è chiamata $\beta\beta'$, e se in queste reazioni, che avvengono facilmente ed a bassa temperatura, non si vogliono ammettere delle improbabili trasposizioni molecolari, in tutti i composti menzionati il bromo deve occupare le posizioni $\beta\beta'$ ed i radicali chetonici e carbossilici non possono perciò trovarsi che nei posti $\alpha\alpha'$.

Sciogliendo il tribromoacetilpirrolo e l'etere metilico dell'acido tribromocarbopirrolico nell'acido nitrico fumante, raffreddato a — 18°, e versando le soluzioni nell'acqua, si ottiene subito, o dopo qualche tempo, un precipitato cristallino di imide bibromomaleica. Per gli altri due composti: il bibromo-$\alpha\alpha$-diacetilpirrolo e l'acido bibromo-$\alpha\alpha'$-dicarbonico, la trasformazione in bibromomaleinimide mediante l'acido nitrico, non avviene direttamente che a caldo, se si trattano invece queste due sostanze con questo reattivo a freddo, il processo è più complicato, ma molto più interessante, perchè si possono ottenere i composti, che ne segnano le singole fasi. Sciogliendo il bibromo-diacetilpirrolo nell'acido nitrico fumante, a temperatura ordinaria, e versando nell'acqua la soluzione, si ottiene un precipitato formato dal *bibromomononitroacetilpirrolo* $C_4\overset{\beta\beta'}{Br_2}(\overset{\alpha}{NO_2})(\overset{\alpha'}{CO\,CH_3})NH$. Trattando poi questo nuovamente con acido nitrico fumante, raffreddato a — 18°, ed aggiungendo alla soluzione acido solforico concentrato, raffreddato alla stessa temperatura, si elimina anche il secondo gruppo acetilico, per cui versando la soluzione acida nell'acqua, si ottiene un precipitato che non è altro che il *bibromobinitropirrolo* $C_4\overset{\beta\beta'}{Br_2}(\overset{\alpha\alpha'}{NO_2})_2NH$. Questo composto si ottiene pure, e direttamente, dall'acido bibromo-$\alpha\alpha'$-pirroldicarbonico sciogliendolo a temperatura ordinaria nell'acido nitrico fumante. La reazione avviene con sviluppo di anidride carbonica, secondo l'eguaglianza:

$$C_4\,Br_2\,(COOH)_2\,NH + 2\,HNO_3 = C_4\,Br_2\,(NO_2)_2\,NH + 2\,CO_2 + 2\,OH_2\,.$$

Il bibromodinitropirrolo simmetrico, così ottenuto, si trasforma poi in bibromomaleinimide, per semplice riscaldamento a 165°; in questa reazione avviene una trasposizione degli atomi d'ossigeno, per la quale si ottiene l'imide bibromomaleica con sviluppo di biossido d'azoto:

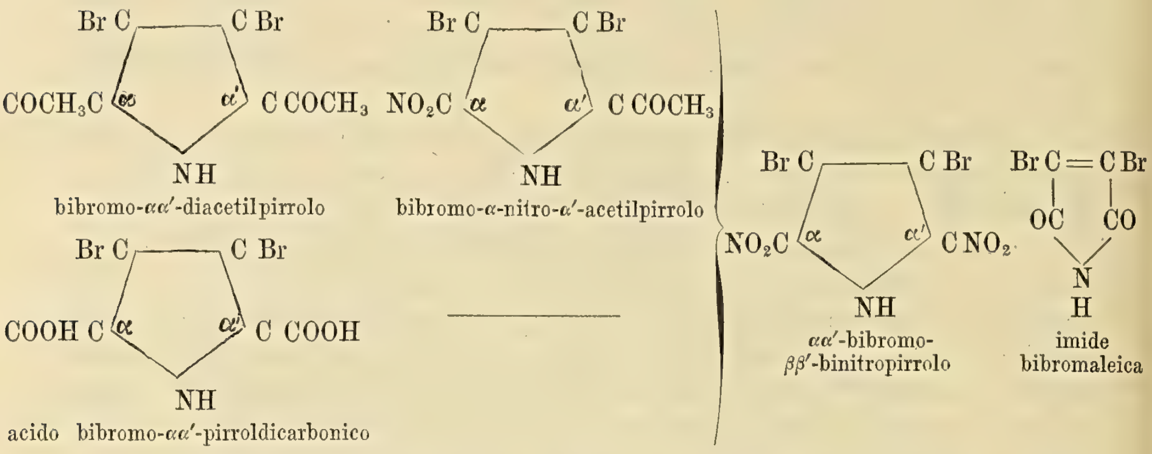
$$C_4\,Br_2\,(NO_2)_2\,NH = C_4\,Br_2\,O_2\,NH + 2\,NO\,.$$

Riscaldando l'$\alpha\alpha'$-bibromo-$\beta\beta'$-binitropirrolo con acido solforico, si ottiene invece l'acido bibromomaleico, con svolgimento di biossido d'azoto e formazione di ammoniaca, secondo l'equazione:

$$C_4\,Br_2\,(NO_2)_2\,NH + 2\,H_2\,O = C_2\,Br_2\,(COOH)_2 + NH_3 + 2\,NO\,.$$

(*) Vedi R. Anschütz, *Zur Geschichte der Isomerie der Fumarsäure und der Maleinsäure.* L. Ann. 239, 161 [1887] e J. Wislicenus, *Ueber die räumliche Anordnung der Atome in organischen Molekülen und ihre Bestimmung in geometrisch-isomeren Verbindungen.* Abhandlungen der k. sächsichen Gesellschaft d. Wissenschaften Bd. XIV, 1. — Berl. Ber. 20, R. 448.

Queste reazioni sono talmente eleganti e trasparenti, che meritano d'essere poste in rilievo mediante gli schemi seguenti:



bibromo-$\alpha\alpha'$-diacetilpirrolo — bibromo-α-nitro-α'-acetilpirrolo — acido bibromo-$\alpha\alpha'$-pirroldicarbonico — $\alpha\alpha'$-bibromo-$\beta\beta'$-binitropirrolo — imide bibromaleica

Per ultimo va notato ancora che, mediante queste trasformazioni, si è potuto determinare la costituzione anche del c-acetilomopirrolo (119) $(C_4 H_2 NH)\langle^{CO\,CH_3}_{CH_3}$, che fonde a 85-86°, e si è trovato che questa sostanza è anch'essa un derivato della serie $\alpha\alpha$: l' *α-acetil-α-metilpirrolo* (81).

Dalle presenti ricerche risulta dunque che i radicali acidi, fatta eccezione dei residui nitrici, quando entrano al posto degli atomi d'idrogeno del pirrolo, se non ne sostituiscono l'idrogeno imminico, rimpiazzano di preferenza quelli situati in posizione α. Lo scrivente ritiene perciò come assai probabile, che anche i composti chetonici, non ancora studiati da questo lato, appartengano tutti alla serie dei derivati $\alpha\alpha'$. Questi sarebbero il pirriletilchetone (131) $[C_4 H_3 (CO \overset{\alpha}{C_2} H_5) NH]$, il pirrilendietildichetone (131) $[C_4 H_2 (CO \overset{\alpha}{C_2} H_5)_2 NH]$, il pirrilfenilchetone (80) $[C_4 H_3 (CO \overset{\alpha}{C_6} H_5) NH]$, il c-etil-pirrilmetilchetone (114) $[C_4 H_2 (C_2 H_5) (CO \overset{\alpha}{C}H_3) NH]$, il c-isopropilpirrilmetilchetone (117) $[C_4 H_2 (C_3 H_7) (CO \overset{\alpha}{C}H_3) NH]$ e poi l'n-metilpirrilmetilchetone (80) $[C_4 H_3 (CO \overset{\alpha}{C}H_3) NCH_3]$, l'n-metilpirrilendimetildichetone (116) $[C_4 H_2 (CO \overset{\alpha}{C}H_3)_2 NCH_3]$ e l' n-benzilpirrilendi-metildichetone (116) $[C_4 H_2 (CO \overset{\alpha}{C}H_3)_2 NCH_2 C_6 H_5]$. A quanto sembra, la posizione β verrebbe prescelta dai radicali alcoolici, che si introducono nel pirrolo mediante la reazione delle aldeidi e degli acetoni, e non verrebbe presa dai radicali acidi, che nel caso che i posti $\alpha\alpha'$ fossero già occupati da radicali alcoolici. Il $\alpha\alpha'$-dimetilpirrolo dà probabilmente anch'esso un c-acetil-$\alpha\alpha'$-dimetilpirrolo, in cui necessariamente l'acetile deve trovarsi in posizione β; si è osservato però, a grande conforto della regola ora citata, che facendo agire l'anidride acetica su questo pirrolo, il composto chetonico non si forma che in assai piccola quantità; mentre, contro al solito, predomina invece l' n-acetildimetilpirrolo (74) (114).

Questi fatti sono assai interessanti perchè dimostrano forse più d'ogni altro la

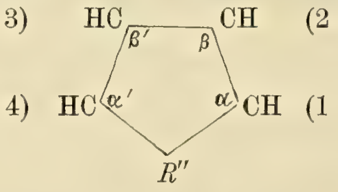
grande analogia di comportamento che esiste fra il pirrolo, il tiofene ed anche il furfurano, sebbene quest'ultimo sia ancora troppo poco studiato. Nel tiofene i radicali acidi non solo, ma tutti i radicali negativi in genere (eccettuando anche qui per ora il residuo dell'acido nitrico), sostituiscono di preferenza gli idrogeni in posizione $\alpha\alpha'$ e non vanno ordinariamente ad occupare le posizioni $\beta\beta'$, che nel caso che le prime sieno già prese da altri radicali. — L'acetotienone (43) $[C_4H_3(\overset{\alpha}{C}OCH_3)S]$, il propiotienone (25) $[C_4H_3S.\overset{\alpha}{CO}.C_2H_5]$, l'isobutirrotienone (25) $[C_4H_3S.\overset{\alpha}{CO}.C_3H_7]$, il tienilessilchetone (139) $[C_4H_3S.\overset{\alpha}{CO}.C_6H_{13}]$ sono tutti derivati « α », contengono del pari il radicale chetonico in questa posizione l' α- (140) ed il β- acetometiltienone (141) $[C_4H_2\overset{\alpha\text{ e }\beta}{(CH_3)}S.CO\overset{\alpha'}{CH_3}]$, l'aceto-$\alpha$-etiltienone (142) (139) $[C_4H_2(\overset{\alpha}{C_2}H_5).S.\overset{\alpha'}{CO}.CH_3]$ e probabilmente anche l'α-propiltienilmetilchetone (27) $[C_4H_2(C_3H_7)S.\overset{\alpha?}{CO}.CH_3]$ e l'etiltienilessilchetone (139) $[C_4H_2(C_2H_5)S\overset{\alpha?}{CO}.C_6H_{13}]$. Solamente quando le posizioni $\alpha\alpha'$ sono di già occupate da radicali alcoolici, l'acetile sostituisce anche gli idrogeni in posizione β, come nel β-acetil-$\alpha\alpha'$tiofene (143) $[C_4H\overset{\alpha\alpha'}{(CH_3)_2}S.\overset{\beta}{CO}.CH_3]$; mentre invece il cloro, il bromo ed il jodio vengono spostati dall'acetile (144) se occupano tutte le due posizioni $\alpha\alpha'$, o se occupandone una sola (145), l'altro posto è impegnato da un radicale alcoolico come nel monocloro-, monobromo- e monojodo-α-etiltiofene. Non solamente i radicali degli acidi organici, ma anche gli alogeni ed il residuo dell'acido solforico, sostituiscono preferibilmente gli atomi d'idrogeno in posizione α, il monobromotiofene (20) (137) (145) e monojodotiofene (146) (29) che si ottengono direttamente sono « α-derivati », del pari lo sono il bibromotiofene (147) (148) e bijodotiofene (146) e molto probabilmente anche il biclorotiofene. I solfoacidi, che si ottengono tanto facilmente per diretta azione dell'acido solforico sul tiofene, sono gli acidi α-tiofensolfonico (28) (*) ed $\alpha\alpha'$-tiofendisolfonico (149); i β-derivati si preparano trattando con acido solforico l' $\alpha\alpha$-bibromotiofene ed eliminando poi il bromo con l'amalgama di sodio (150). — I derivati « α-tiofenici » sono a quanto sembra i più stabili, perchè mentre per esempio si ottiene facilmente con i diversi metodi l'acido $\alpha\alpha'$-tiofendicarbonico dai varî « $\alpha\alpha$-derivati », è stato fino a poco tempo fa impossibile di preparare gli altri acidi tiofendicarbonici, e se ora si conosce l'acido $\alpha\beta'$-tiofendicarbonico, lo si ottenne solamente per ossidazione del corrispondente metatiofene $[C_4H_2\overset{\alpha}{(CH_3)}\overset{\beta'}{(CH_3)}S]$, che si forma sinteticamente dall'acido α-metillevulinico (151). Anche l'acido β-tiofenmonocarbonico non è stato preparato fin'ora che per ossidazione del tiotolene e dell' etiltiofene corrispondente, mentre l' acido α-tiofenico si produce con tutte le reazioni corrispondenti a quelle per cui si ottenne l'acido benzoico.

Sebbene la serie furfuranica sia ancora assai poco sviluppata e quasi nulla si

(*) Assieme all'acido α-tiofensolfonico si deve però formare anche l'acido β-tiofensolfonico se l'acido a-tiofenico è un miscuglio degli acidi α-tiofenico e β-tiofenico. Vedi V. Meyer, L. Ann. 236, 200.

sappia intorno al comportamento chimico del furfurano, pure fra i pochi fatti conosciuti se ne trovano alcuni i quali dimostrano, che probabilmente anche nel gruppo furfuranico, gli idrogeni in posizione « α » sono quelli che di preferenza vengono sostituiti dai radicali acidi. Trattando l'acido piromucico con bromo o con acido solforico si ottengono gli acidi α-bromopiromucico $C_4 H_2 \overset{\alpha'}{Br} . (C\overset{\alpha}{O}OH) O$ ([92]) e $\alpha\alpha'$-furfurancarbonsolfonico $C_4 H_2 (SO_3 \overset{\alpha'}{}H) (CO\overset{\alpha}{O}H) O$ ([152]). Per preparare l'acido β-solfonico è necessario di trattare con acido solforico l'acido α-bromopiromucico e di eliminare poi il bromo con l'idrogeno nascente ([152]).

Tutti questi fatti dimostrano, che nei composti tetrolici



i due atomi d'idrogeno in posizione $\alpha\alpha'$ hanno proprietà notevolmente diverse, da quelle degli idrogeni delle posizioni $\beta\beta'$. Questa differenza di comportamento è determinata evidentemente dalla vicinanza dei primi al radicale, che rimpiazza il terzo paio di metini aromatici. Vittorio Meyer dice, che i derivati bisostituiti del tiofene « $\alpha\alpha$ » (para) si formano di preferenza, per analogia coi corrispondenti, più stabili, « paraderivati aromatici » ([147]), e ciò sta bene; però questo ragionamento non basta a spiegare, perchè anche un solo radicale preferisca mettersi in posizione « α », quando va a sostituire un atomo d'idrogeno nei nuclei tetrolici.

IX.

Comportamento del pirrolo e dei suoi derivati con gli alogeni.

Gli alogeni agiscono sul pirrolo sostituendo con grande facilità tutti i quattro atomi di idrogeno legati al carbonio, senza formare composti d'addizione, ma nulla di meno la preparazione dei composti tetraalogenati richiede alcune cure speciali. Prima di tutto è necessario di operare in soluzioni sufficientemente diluite onde evitare una reazione troppo violenta ed inoltre fa mestieri di aggiungere assieme all'alogeno una sostanza, che elimini subito gli idracidi (acido cloridrico, bromidrico e jodidrico), che si formano nella reazione, acciocchè questi non agiscano sulla parte del pirrolo, che non s'è ancora trasformata in composto alogenato. Malgrado tutte le cure però i rendimenti sono per lo più assai inferiori a quelli richiesti dalla teoria. Per neutralizzare gli idracidi, che si formano nel processo di sostituzione, possono venire adoperate varie sostanze, come p. es. l'alcool, gli alcali, gli ossidi dei metalli pesanti ecc.; è da notarsi però, che facendo agire gli alogeni sopra una soluzione alcalina di pirrolo, oltre ai composti tetraalogenati, si ottengono, col cloro e col bromo, anco i prodotti di

ossidazione del tetracloro- e tetrabromopirrolo, che si formano in principio della reazione; soltanto il tetrajodopirrolo non subisce in queste condizioni nessun ulteriore mutamento ([153]).

L'azione degli alogeni sul pirrolo e suoi derivati è stata studiata da Ciamician e Silber ([153]) ed in seguito anche da Hepp ([154]).

Il miglior metodo per ottenere il tetracloro- e tetrabromopirrolo è di fare agire il cloro ed il bromo sopra una soluzione alcoolica, diluita di pirrolo, raffreddata a 0° ([154]). Dopo di avervi introdotta la quantità di alogeno necessaria alla reazione, si versa il liquido nell' acqua, si toglie con anidride solforosa il cloro ed il bromo rimasto in eccesso, e si scioglie nella potassa il composto che precipita. Dalla soluzione alcalina, filtrata, si precipita nuovamente il composto tetraalogenato, saturandola con anidride carbonica, e lo si purifica facendolo cristallizzare dall'alcool. Il tetracloropirrolo è stato ottenuto, per la prima volta da Ciamician e Silber, dal percloruro di percloropirocolla $C_4Cl_7\left\langle\begin{matrix}N\\ \vdots\\ CO\end{matrix}\right.$ ([17]) per riduzione con acido acetico e polvere di zinco e poi, come è già stato detto, anche dal percloruro di tetracloropirrolo C_4Cl_7N ([16]) mediante la stessa operazione. A reazione compiuta, si distilla il tetracloropirrolo col vapore acqueo, e lo si purifica facendolo cristallizzare dall'etere petrolico bollente. Il tetrajodopirrolo si ottiene facilmente trattando una soluzione diluita di pirrolo nella potassa con una soluzione di jodio nel joduro potassico ([153]). Il tetrajodopirrolo greggio viene purificato facendolo cristallizzare dall'alcool diluito bollente. Questa sostanza si forma pure facendo agire il jodio in soluzione eterea sul composto potassico del pirrolo. La reazione avviene secondo l'eguaglianza:

$$4\,C_4H_4NK + 4\,J_2 = C_4J_4NH + 4\,KI + C_4H_5N\,.$$

In modo analogo si possono pure ottenere i jodofenoli, facendo agire il jodio sul fenato sodico.

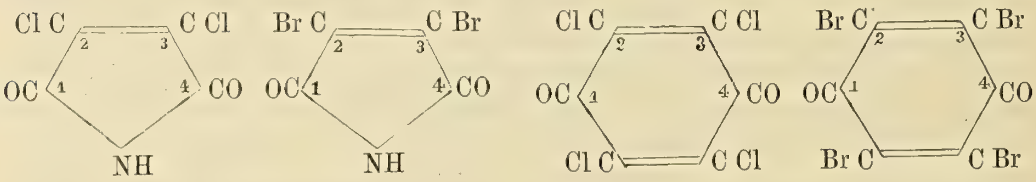
Per studiare l'azione del cloro in soluzione alcalina sul pirrolo, si tratta questo a freddo con una soluzione di ipoclorito sodico ed a seconda della concentrazione del liquido si ottengono prodotti diversi. Agitando 10 gr. di pirrolo con un litro di soluzione di ipoclorito sodico contenente dai 15 ai 25 gr. di cloro attivo, risulta un liquido che contiene, oltre al pirrolo rimasto inalterato, ammoniaca, tetracloropirrolo ed acido bicloromaleico. Per separare queste sostanze si distilla con vapore acqueo, eliminando così, assieme all'ammoniaca, il pirrolo e tracce di pirroli clorurati. Acidificando il liquido che resta indietro e distillando nuovamente con vapore acqueo, passa assieme a questo il tetracloropirrolo e dal residuo si estrae con etere l'acido bicloromaleico. Impiegando soluzioni più concentrate di ipoclorito sodico, per es. per 10 gr. di pirrolo, mezzo litro di una soluzione contenente 50 gr. di cloro attivo, non si ottiene, operando nel modo descritto, nè tetracloropirrolo, nè acido bicloromaleico, ma soltanto acido bicloroacetico ([153]).

Facendo agire sul pirrolo il bromo in soluzione alcalina non si formano che tracce di pirroli bromurati, il prodotto della reazione è, oltre a piccole quantità di acido bibromomaleico, l'imide bibromomaleica ([153]).

In tutte queste reazioni si forma prima il composto tetraalogenato e questo dà

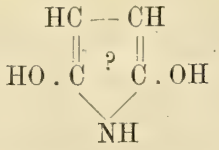
poi per ulteriore azione dell'ossidante i prodotti menzionati. Ciò si può provare mediante il tetrabromopirrolo, che si trasforma quantitativamente in bibromomaleinimide, per azione del bromo in soluzione alcalina ed anche per azione dell'acido nitrico fumante.

I prodotti di ossidazione alogenati del pirrolo non mancano di un certo interesse, se si comparano a quelli dei composti aromatici. *L'imide bicloromaleica* e *l'imide bibromomaleica*, corrispondono al *cloroanile* ed al *bromoanile* non solo per la perfetta analogia di formole, ma anche pel loro modo di formazione:

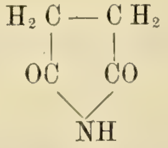


Si può dire in genere, che queste sostanze si ottengono per reazioni del tutto analoghe, le due prime per ossidazione dei derivati del pirrolo in presenza di cloro o di bromo e le seconde per corrispondenti trasformazioni di composti aromatici. Specialmente interessante, da questo lato, è il comportamento del pentaclorofenolo ([155]) e del tetraclorobenzolo simmetrico ([156]) con l'acido nitrico fumante, perchè così si forma il cloroanile, e del fenolo con bromo ed acqua (in presenza di jodio), perchè in questo modo si può preparare il bromoanile ([157]). Assai notevole è poi la scissione del dicloro-p-nitrofenolo ([158]) in diclorochinone e biossido d'azoto, perchè ricorda quella del bibromo-$\alpha\alpha'$-dinitropirrolo in bibromomaleinimide e biossido d'azoto. Si può ancora ricordare che il cloroanile dà col pentacloruro di fosforo il perclorobenzolo e che analogamente si può ottenere il tetracloropirrolo dell'imide bicloromaleica ([81]).

Proseguendo nella comparazione dei composti chinonici aromatici con i derivati ossigenati del pirrolo, si arriva alla conclusione, che l'imide maleica, che non si conosce ancora, verrebbe ad essere il chinone della serie pirrolica, e che l'imide succinica ([159]) può venire considerata come la forma secondaria dell'idrochinone del pirrolo.



idrochinone del pirrolo ?



imide succinica o diossipirrolidina

Il tetracloro- ed il tetrabromopirrolo sono sostanze solide, cristalline, senza colore, poco solubili nell'acqua, molto alterabili, che non si volatilizzano senza parziale decomposizione, ed il di cui vapore ha un odore che ricorda molto quello dei fenoli alogenati. Si comportano come acidi, massime il tetracloropirrolo, che si scioglie facilmente negli idrati e nei carbonati alcalini, ed ha in soluzione acquoso-alcoolica reazione acida alle carte. Il tetrajodopirrolo è del pari solido, ma ha un colore giallo chiaro, tendente al bruno e non ha odore nè sapore alcuno; si scioglie negli alcali meno facilmente degli altri due composti e non ha un carattere decisamente acido. È quasi

insolubile nell'acqua e solubile nell'alcool e nei solventi ordinarî. Se viene bruscamente riscaldato, si scompone violentemente emettendo vapori di jodio, ma anche per debole riscaldamento o per prolungata azione della luce avviene una lenta decomposizione con sviluppo di jodio. Per queste sue proprietà e per la grande quantità di jodio che contiene, il tetrajodopirrolo è stato impiegato con buon successo in terapia, in sostituzione del jodoformio, di cui non possiede l'odore disaggradevole, nè le proprietà tossiche ([160]). Il tetrajodopirrolo viene perciò fabbricato su larga scala e trovasi in commercio col nome di *Iodolo* (*).

Il tetracloropirrolo ed il jodolo danno, per lieve riscaldamento coll'acido solforico concentrato, delle reazioni caratteristiche. Quest'ultimo si scioglie in questo acido con colorazione verde intensa, il primo dà invece un liquido rosso-bruno che per aggiunta di alcune goccie d'acqua diviene violetto; un eccesso d'acqua produce poi un precipitato verde, che si scioglie nella potassa con colore giallo-ranciato.

Gli acidi pirrolcarbonici danno col cloro e col bromo i pirroli tetraalogenati con eliminazione di anidride carbonica ([154]). Gli eteri pirrolcarbonici ed i composti chetonici sono invece più resistenti ed il radicale non viene spostato dall'alogeno. Facendo agire il vapore di bromo sulle soluzioni acquose di queste sostanze, si ottengono i composti bi- o tribromurati; in questo modo si preparano gli eteri tribromocarbopirrolico ([125]), bibromopirroldicarbonico e bibromo-α-acetilcarbopirrolico ([81]), dai quali si ottengono per saponificazione gli acidi corrispondenti, ed il tribromo-α-acetilpirrolo ([153]) e bibromo-$\alpha\alpha'$-diacetilpirrolo ([81]); nello stesso modo Bell ([161]) ottenne il tetrabromo-n-etilpirrolo. Questi composti sono solidi, poco solubili nell'acqua, e precipitano perciò direttamente dal liquido acquoso in cui si preparano. Per azione del bromo in soluzione alcalina o dell'acido nitrico, tutte queste sostanze si trasformano in bibromomaleinimide.

È interessante di comparare quanto venne ora esposto col comportamento dei derivati furfuranici e tiofenici con gli alogeni. Il furfurano è anche da questo lato poco studiato e pare che dia col bromo prodotti di sostituzione. L'acido piromucico forma col bromo secco un tetrabromuro ([14]) ed il suo etere etilico dà oltre al tetrabromuro ([14]) anche un tetracloruro ([162]). Col bromo in presenza di acqua si ottengono invece subito i prodotti d'ossidazione, gli acidi piromucico ([91]) ([92]) e deidromucico danno l'acido fumarico ([91]) ([92]), ed il primo dà inoltre con un eccesso di bromo o di cloro gli acidi mucobromico ([90]) ([91]) e mucoclorico ([89]) ([90]). Da questi fatti risulta che i composti furfuranici vengono ossidati più facilmente dei corrispondenti derivati del pirrolo, e ciò potrebbe far supporre in questi ultimi un più alto grado di resistenza. Ora questa maggiore stabilità che i derivati del pirrolo mostrano di avere col bromo in presenza di acqua, deriva solamente dalla maggiore mobilità dei loro atomi d'idrogeno. La maggior parte dei derivati pirrolici forma col bromo subito i prodotti completamente alogenati, che sono più stabili e più resistenti dei composti primitivi, i derivati furfuranici invece, non dando sì facilmente i prodotti di sostituzione, vengono direttamente ossidati o l'ossidazione procede di pari passo con la sostituzione ed appariscono perciò meno resistenti.

(*) La fabbrica che ne possiede la privativa è quella della ditta Kalle e C°. a Biebrich sul Reno.

Il tiofene è il composto più stabile della serie tetrolica e sembra che non venga ossidato nemmeno dagli ipocloriti alcalini.

Gli atomi di idrogeno del pirrolo vengono sì facilmente rimpiazzati dagli alogeni, che è difficile di ottenere dei derivati che non sieno sostituiti completamente, e fin' ora non si conosce che il monobromo- e bibromopirrilmetilchetone ([98]) e la monobromopirocolla, bibromopirocolla ([130]) e tetrabromopirocolla ([17]), che pur essendo derivati alogenati del pirrolo contengono ancora degli atomi d'idrogeno disponibili.

Per preparare il *monobromo-α-acetilpirrolo* ([98]), si tratta a freddo una soluzione concentrata di pirrilmetilchetone nell'acido acetico glaciale, con la quantità necessaria di bromo, e si fa cristallizzare dall'acqua la parte del prodotto, che dopo qualche tempo si separa dalla soluzione acetica; la parte più solubile, che è la maggiore, contiene oltre all'acetilpirrolo inalterato, composti più bromurati. — Per ottenere il *bibromo-α-acetilpirrolo* ([98]), si adopera la quantità di bromo corrispondente a due molecole, operando a freddo in soluzione di acido acetico glaciale, si versa il prodotto nell'acqua e si fa cristallizzare il precipitato ottenuto dall'alcool diluito. Il bibromopirrilmetilchetone è contenuto in piccola quantità nelle soluzioni madri. — È probabile che in questi due composti, che si sciolgono nella potassa senza alterarsi, il bromo sia contenuto nel nucleo pirrolico e non nell'acetile: $C_4H_2Br(COCH_3)NH$ e $C_4HBr_2(COCH_3)NH$.

Se si tratta l'α-acetilpirrolo ([98]) o i suoi bromo-derivati ([153]) in soluzione acetica a b. m., con un eccesso di bromo, si ottiene un *pentabromo-α-acetilpirrolo*, che non può avere che la costituzione: $C_4Br_3(COCHBr_2)NH$.

Il comportamento della pirocolla col bromo è interessante, perchè essa è l'unico derivato del pirrolo che non si bromuri completamente, anche se venga riscaldato con un eccesso di bromo in tubi chiusi a b. m.. Operando in soluzione acetica si sono ottenuti i derivati mono- e bibromurati ([130]), trattando la pirocolla direttamente con bromo in eccesso in tubi chiusi a 100°, si ottenne principalmente la tetrabromopirocolla ([17]) ($C_{10}H_2Br_4N_2O_2$), che dà, per trattamento con la potassa, l'acido bibromocarbopirrolico. La tetrabromopirocolla è una sostanza quasi insolubile nei solventi ordinarî.

Per ultimo resta ancora a dire qualche parola sui composti di addizione del pirrolo con gli alogeni. M. Dittmar ([163]) ottenne una sostanza nera, insolubile, trattando il pirrolo con una soluzione cloridrica di cloruro di jodio. Questo composto che ha la formola $C_4H_5N.ClJ$, deve essere considerato come un prodotto d'addizione in cui il cloro ed il jodio sono attaccati all'azoto. Più interessanti di questo corpo sono i percloruri,

C_4Cl_7N	e	$C_4Cl_7N(CO)$
percloruro di percloropirrolo		percloruro di percloropirocolla,

che sono già stati menzionati nei capitoli precedenti. La prima di queste due sostanze si ottiene, come s'è detto, per azione dal pentacloruro di fosforo sulla bicloromaleinimide a 200° ([16]) e forma una massa molle, opalina, che ha un marcato odore canforico. È una sostanza molto stabile, che resiste all'azione della potassa e degli acidi e che si trasforma per riduzione in tetracloropirrolo. Del percloruro di percloropirocolla s'è già parlato trattando della pirocolla.

X.

I nitrocomposti della serie del pirrolo.

I nitrocomposti del pirrolo fin' ora conosciuti non sono stati ottenuti direttamente dal pirrolo, perchè questo corpo viene distrutto completamente dall'acido nitrico prima d'essersi potuto trasformare in un nitroderivato; con ciò però non è detto che sia assolutamente impossibile di introdurre direttamente nel pirrolo il residuo dell'acido nitrico, anzi è probabile che si trovino in seguito certe condizioni speciali, nelle quali questa sostituzione diretta sia effettuabile. Anche il tiofene non si lascia trasformare in nitrocomposti, che mediante certi artifizî speciali, come sarebbe quello di far passare una corrente d'aria satura di vapori di tiofene attraverso all'acido nitrico ([164]). Si può dire in genere, che gli idrogeni del pirrolo, come quelli del tiofene, vengono rimpiazzati dal residuo dell'acido nitrico altrettanto facilmente di quelli dei corpi aromatici, purchè la sostanza su cui si fa agire l'acido nitrico non venga distrutta prima d'essersi trasformata in nitrocomposti, che sono poi molto stabili. Questa è la ragione per la quale, anche non potendo ottenere nitroderivati direttamente dal pirrolo, questi si sono potuti ottenere dalla pirocolla ([130]), dall'acido α-carbopirrolico ([165]), dal pirrilmetilchetone ([166]) e del pirrilendimetildichetone ([165]), come risulta dalle esperienze di Ciamician e Danesi e da quelle di Ciamician e Silber.

Per studiare l'azione dell'acido nitrico sul pirrilmetilchetone ([166]) si introduce questo in un eccesso d'acido nitrico fumante, raffreddato con un miscuglio di neve e sale. La soluzione nitrica, che viene poi versata nell'acqua, contiene un miscuglio di sostanze formato da due mononitropirrilmetilchetoni isomeri, da un dinitropirrilmetilchetone e da un dinitropirrolo; fra questi predomina alle volte il mononitropirrilmetilchetone che fonde a 197°, ed alle volte il dinitropirrilmetilchetone. Per ottenere e separare questi corpi, si estrae il liquido con etere e si agita l'estratto etereo con una soluzione di carbonato sodico. Tutte le sostanze, ad eccezione del composto fusibile a 197°, si comportano come acidi e passano nel liquido alcalino. Il nitropirrilmetilchetone, che resta disciolto nella soluzione eterea, viene purificato bollendolo con una soluzione acetica diluita di acido cromico e poi facendolo cristallizzare dall'alcool bollente. Per ottenere le tre sostanze contenute nel liquido alcalino, si acidifica questo con acido solforico e si estrae nuovamente con etere. Il miscuglio, che è oleoso in principio, si solidifica dopo qualche tempo e da questo si separano i tre nitrocomposti per cristallizzazioni frazionate dall'acqua e poi dal benzolo bollente.

L'$\alpha\alpha$-diacetilpirrolo ([165]) dà con l'acido nitrico fumante, a temperatura ordinaria, un monitro-$\alpha\alpha$-diacetilpirrolo, che ha pure proprietà acide e che si scioglie nei carbonati alcalini.

L'acido α-carbopirrolico ([165]) invece, trattato con acido nitrico fumante raffreddato a —18°, non dà acidi nitrocarbopirrolici, ma si trasforma in un miscuglio di due dinitropirroli isomeri, fra i quali predomina quello fusibile a 152°, che si ottiene anche dal pirrilmetilchetone, e che si separa facilmente dal suo isomero, facendo cristallizzare il

miscuglio dall'acqua bollente. — L'unico acido nitro carbopirrolico fin'ora conosciuto è quello che si ottiene decomponendo con potassa la dinitropirocolla ([130]). Questa si forma trattando la pirocolla a b. m. con acido nitrico fumante e versando il prodotto nell'acqua.

Nel seguente specchietto sono riuniti tutti i nitrocomposti della serie del pirrolo finora conosciuti:

	p. f.	
a-Dinitropirrolo $C_4H_2(NO_2)_2NH$	152°	Ottenuto dall'acido-α-carbopirrolico e dal pirrilmetilchetone.
b-Dinitropirrolo $C_4H_2(NO_2)_2NH$	173°	Dall'acido-α-carbopirrolico.
Dinitropirocolla $C_{10}H_4(NO_2)_2N_2O_2$	—	Dalla pirocolla.
Acido nitro-α-carbopirrolico $C_4H_2(NO)_2(\overset{\alpha}{C}OOH)NH$	144-146°	Dalla dinitropirocolla.
β-Nitro-α-acetilpirrolo $C_4H_2(\overset{\beta}{N}O_2)(\overset{\alpha}{C}OCH_3)NH$	197°	Dall'α-acetilpirrolo.
α-Nitro-α'-acetilpirrolo $C_4H_2(\overset{\alpha}{N}O_2)(\overset{\alpha'}{C}OCH_3)NH$	156°	Dall'α-acetilpirrolo.
αβ-Dinitro-α'-acetilpirrolo $C_4H(\overset{\alpha'\beta}{N}O_2)_2(\overset{\alpha}{C}OCH_3)NH$	114°	Dall'α-acetilpirrolo.
β-Nitro-αα'-diacetilpirrolo $C_4H(\overset{\beta}{N}O_2)(\overset{\alpha\alpha'}{C}OCH_3)_2NH$	149°	Dall'αα'-diacetilpirrolo.
ββ-Bibromo-α-nitro-α'-acetilpirrolo $C_4\overset{\beta\beta'}{Br_2}(\overset{\alpha}{N}O_2)(\overset{\alpha'}{C}OCH_3)NH$	206°	Dal ββ'-bibromo-αα'-diacetilpirrolo con acido nitrico fumante.
αβ-Bibromo-β-nitro-α-acetilpirrolo $C_4\overset{\alpha\beta}{Br_2}(\overset{\beta}{N}O_2)(\overset{\alpha}{C}OCH_3)NH$	175°	Dal β-nitro-α-acetilpirrolo fusibile a 197° con bromo.
ββ'-Bibromo-αα'-dinitropirrolo $C_4\overset{\beta\beta'}{Br_2}(\overset{\alpha\alpha'}{N}O_2)_2NH$	—	Dal ββ'-bibromo-α-nitro-α'-acetilpirrolo e dall'acido ββ'-bibromopirrol-αα'-dicarbonico con acido nitrico fumante.

Comparando il comportamento coll'acido nitrico dei derivati del pirrolo con quello dei derivati del tiofene, si osserva anche in questo caso una analogia quasi completa

fra il pirrilmetilchetone e l'acetotienone ([41]) ([43]). Tutte e due queste sostanze danno, per lo stesso trattamento, due mononitro-derivati isomeri ed un binitro-derivato; il pirrilmetilchetone dà però inoltre anche un dinitropirrolo, per sostituzione del gruppo acetilico col residuo nitrico, ciò che non avviene col acetotienone. In modo simile l'acido α-carbopirrolico si distingue dall'acido α-tiofenico ([167]), perchè il primo dà un miscuglio di due dinitropirroli ([165]), mentre il secondo forma un acido mononitrotiofenico ([167]).

I nitro-derivati pirrolici hanno poi comune coi tiofenici il comportamento coi riducenti. In entrambi i gruppi di composti è molto difficile di ottenere gli amido-derivati e questi sono così poco stabili e si resinificano all'aria così facilmente, che non si possono studiare che allo stato di sali. Dal dinitropirrolo non si è potuto ottenere l'amido-composto corrispondente. L'unico amido-derivato del pirrolo ([166]), che si conosce, è il *β-amido-α-acetilpirrolo*, che si ottiene dal β-nitropirrilmetilchetone fusibile a 197°, per riduzione con acido cloridrico e stagno, e che venne analizzato allo stato di cloroplatinato $[(C_4H_2(NH_2)(COCH_3)NH.HCl)_2PtCl_4]$. Il cloridrato della base è poco stabile e trattandolo con un alcali si ottiene una materia bruna e resinosa, che non venne ulteriormente studiata.

I nitroderivati del pirrolo sono solidi e per lo più solubili nell'acqua; si sciolgono facilmente negli idrati e nei carbonati alcalini formando dei sali ad eccezione del nitropirrilmetilchetone che fonde a 197°, ed è il solo nitro-composto della serie del pirrolo, che si salifica solamente con gli alcali liberi e che non ha reazione acida alle carte. Le soluzioni alcaline di tutti i nitrocomposti pirrolici sono gialle e gialli del pari sono i sali, che deflagrano più o meno intensamente col riscaldamento. I nitrocomposti sono stabilissimi e resistono all'azione degli acidi senza alterarsi. — In quanto alla posizione dei residui nitrici in queste sostanze, si può ammettere che in tutti quei casi, nei quali per azione dell'acido nitrico viene eliminato il radicale esistente nel composto, il residuo nitrico vada a rimpiazzarlo; perciò nei due dinitropirroli isomeri, almeno uno dei due residui, « NO_2 » si troverà in posizione « α » e del pari contengono senza dubbio i residui nitrici in questa posizione, il $\beta\beta$-bibromonitro-α-acetilpirrolo ed il $\beta\beta$-bibromodinitropirrolo, che si ottengono dal $\beta\beta$-bibromo-$\alpha\alpha$-diacetilpirrolo e dall'acido $\beta\beta$-bibromo-$\alpha\alpha$-pirroldicarbonico ([81]). Dei due mononitropirrilmetilchetoni isomeri uno solo possiede proprietà acide, per cui è probabile che questo contenga il residuo nitrico in prossimità dell'azoto, mentre nell'altro isomero l'NO_2 occuperà una delle due posizioni $\beta\beta'$; le formole di queste due sostanze sarebbero perciò ([18]):

$$\underset{\text{fonde a } 156^\circ}{C_4H_2\underset{\alpha}{(NO_2)}\underset{\alpha}{(COCH_3)}NH} \qquad \text{e} \qquad \underset{\text{fonde a } 197^\circ\text{.}}{C_4H_2\underset{\beta \text{ o } \beta'}{(NO_2)}\underset{\alpha}{(COCH_3)}NH}$$

Questa supposizione trova conforto nel fatto, che bromurando il nitroacetilpirrolo, che ha reazione neutra (p. f. 197°), si ottiene un bibromonitroacetilpirrolo diverso da quello proveniente dal bibromo-$\alpha\alpha$-diacetilpirrolo, che contiene di certo il residuo nitrico in posizione α ([81]).

Se realmente il nitroacetilpirrolo che fonde a 197°, che è quello che si forma in maggiori quantità, è un β-nitro-α-acetilpirrolo, il residuo nitrico farebbe un'eccezione alla regola stabilita per gli altri radicali negativi, che preferiscono di prendere nelle sostituzioni il posto degli idrogeni situati in prossimità dell'azoto.

XI.

Comportamento del pirrolo con i diazocomposti aromatici.

I cloruri dei diazocomposti aromatici agiscono sul pirrolo sostituendovi uno o due degli idrogeni attaccati al carbonio e formando così gli azo- ed i dis-azocomposti, senza dare i diazo-amido-composti; anche queste reazioni dimostrano perciò la grande mobilità degli idrogeni del residuo tetrolico del pirrolo. Le ricerche in proposito sono state fatte da O. Fischer e Hepp ([168]). I cloruri dei diazocomposti aromatici agiscono sul pirrolo in modo diverso, a seconda che si opera in soluzione acida o in soluzione alcalina, nel primo caso si formano, come s' è già detto nel quarto capitolo, gli azocomposti, nel secondo i disazocomposti.

Trattando il pirrolo in soluzione alcoolica raffreddata a 0° con la quantità corrispondente ad una molecola, di cloruro di diazobenzolo e con acetato sodico, e versando il prodotto nell'acqua, si ottiene un precipitato di aghi gialli di *pirrolazobenzolo*, che si purifica facendolo cristallizzare dall'alcool diluito. La reazione avviene secondo l'eguaglianza:

$$C_4H_4NH + C_6H_5.N:N.Cl = \underset{\dot{N}:N.C_6H_5}{C_4H_3NH} + HCl\ .$$

Per ottenere il *pirrol-dis-azodibenzolo* si fa agire invece il cloruro di diazobenzolo nelle proporzioni di due molecole, per una di pirrolo, sopra una soluzione raffreddata di questo corpo, in 20 o 30 parti di soda diluita e di un po' d'alcool. Dopo qualche ora si separano, agitando il liquido, i cristalli rossi del disazocomposto:

$$C_4H_4NH + 2C_6H_5N:N.Cl + 2NaOH = C_6H_5.N:N.(C_4H_2NH).N:N.C_6H_5 + 2NaCl + 2H_2O\ .$$

Questo si può pure ottenere, trattando a freddo il pirrol-azobenzolo in soluzione alcoolica, con cloruro di diazobenzolo in presenza di soda. Che l'idrogeno imminico del pirrolo non prenda parte a queste reazioni si dimostra facilmente, perchè si può trasformare il pirroldisazodibenzolo in un n-metilpirroldisazodibenzolo, riscaldandolo con joduro metilico e potassa in soluzione alcoolica. Inoltre anche i pirroli terziarî, agiscono come il pirrolo con i cloruri dei diazocomposti.

Facendo agire sul pirrolo invece del cloruro di diazobenzolo, i cloruri di diazo-p-toluene, diazo-α-naftalina o diazo-β-naftalina, si ottengono gli azo- ed i disazocomposti corrispondenti.

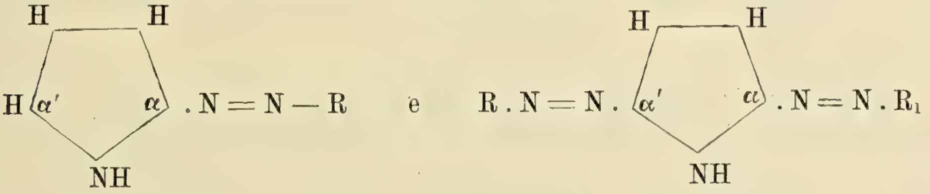
I pirrolazocomposti sono sostanze solide, cristalline, per lo più colorate in giallo o in rosso; hanno un debole carattere alcalino e formano dei cloroplatinati. I pirrol-dis-azocomposti sono del pari solidi e cristallini ed hanno un colore rosso carico con riflessi metallici, si distinguono dai primi principalmente per la colorazione azzurra intensa, con cui si sciolgono nell'acido solforico concentrato, mentre gli azocomposti del pirrolo danno una colorazione gialla.

I dis-azoderivati sono composti simmetrici, perchè trattando, in presenza di soda,

il pirrolazobenzolo col cloruro di diazo-β-naftalina o trattando la pirrolazo-β-naftalina con cloruro di diazobenzolo, la sostanza che si forma è sempre la stessa, cioè il disazocomposto: *pirroldisazobenzol-β-naftalina* o *pirroldisazo-β-naftalinbenzolo.*

$$\overset{a}{C_6 H_5} . N_2 . (C_4 H_2 NH) . N_2 . \underset{\beta}{\overset{b}{C_{10} H_7}} = \underset{\beta}{\overset{a}{C_{10} H_7}} . N_2 . (C_4 H_2 NH) . N_2 . \overset{b}{C_6 H_5} .$$

Inoltre è molto probabile che nei composti in questione i radicali diazoici si trovino nelle posizioni $\alpha\alpha'$, perchè l'acido-α-carbopirrolico dà col cloruro di diazobenzolo lo stesso prodotto, che si ottiene col pirrolo. Solamente nei casi in cui gl'idrogeni più vicini all'immino sono occupati da radicali alcoolici, come nel $\alpha\alpha'$-dimetilpirrolo, si ottengono anche i β-azo- e $\beta\beta'$-disazoderivati. La costituzione delle sostanze ora descritte sarebbe dunque da rappresentarsi con gli schemi:



I radicali diazoici « — N : N. R », si comportano perciò col pirrolo, come si comporta la maggior parte dei radicali negativi, sostituendo cioè più facilmente gli idrogeni delle posizioni $\alpha\alpha'$, di quelli delle posizioni $\beta\beta'$.

XII.

Comportamento del pirrolo con l'idrogeno nascente.

Il pirrolo può addizionare due o quattro atomi di idrogeno e trasformarsi nel diidro- e tetraidropirrolo. Queste due sostanze, che sono state scoperte e studiate da Ciamician e Dennstedt (83) e da Ciamician e Magnaghi (169), hanno proprietà tanto differenti da quelle del composto da cui derivano, che nessuno, ignorandone la provenienza, vorrebbe riconoscere in esse due derivati del pirrolo. Esse differiscono da questo, non solo per avere punti di ebollizione molto più bassi (90-91° e 82-83°), ma altresì per tutto il loro comportamento chimico. Sono alcaloidi energici, sebbene sieno basi secondarie come il pirrolo, che non si resinificano con gli acidi minerali, ma che formano con essi sali stabilissimi. Per queste ragioni si è cercato di dare a queste due sostanze dei nomi speciali, che, ricordando la loro genesi, accennassero nel tempo stesso alle loro proprietà alcaloidiche, non sufficientemente indicate dai nomi diidro- e tetraidropirrolo. La prima di queste sostanze venne perciò chiamata:

« *pirrolina* $C_4 H_6 NH$ » (83)

e la seconda

« *pirrolidina* $C_4 H_8 NH$ » (93).

Questa differenza di comportamento che si manifesta fra il pirrolo ed i suoi prodotti di idrogenazione, per quanto strana ed interessante, non è un fatto isolato in chimica organica, e si riscontra anche presso altri composti azotati. Per esempio qualche cosa di analogo si osserva comparando l'acido prussico alla metilammina; nella seguente serie di sostanze si nota una certa gradazione nelle differenze di comportamento dei diversi termini che la compongono:

$[CH]_5 N = C_5 H_5 N$,	$[CH]_4 NH = C_4 H_4 NH$,	$[CH]_3N$,	$[CH]_2NH$,	$[CH] N$
piridina	pirrolo	?	?	acido cianidrico
p. eb. 117°	p. eb. 131°			p. eb. 27°
$[CH_2]_5 NH{=}C_5H_{10} NH$,	$[CH_2]_4 NH = C_4 H_8 NH$	—	—	—
piperidina	pirrolidina			
p. eb. 106°	p. eb. 82-83°			
$C_5 H_{11} . NH_2$	$C_4 H_9 . NH_2$	—	—	$CH_3 . NH_2$
amilammina	butilammina			metilammina
p. eb. 103°	p. eb. 75°,5			gassosa

La piridina, la piperidina e l'amilammina, differiscono per le loro proprietà, tra di loro meno che il pirrolo, la pirrolidina e la butilammina e le differenze di comportamento fra queste tre sostanze sono poi minori di quelle che passano fra l'acido cianidrico e la metilammina ed in genere fra i cianuri e le corrispondenti ammine.

Riducendo il pirrolo con acido acetico e zinco ([83]) si ottiene la pirrolina e questa si trasforma poi in pirrolidina per azione dell'acido jodidrico e fosforo a 240-250° ([169]).

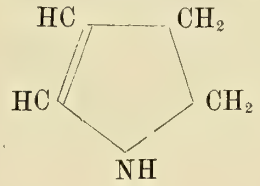
Per preparare la pirrolina ([83]) si fanno agire sul pirrolo sciolto in 20 p. di acido acetico (d = 1,06), a poco a poco 50 parti di polvere di zinco, mantenendo nel liquido, per circa 24 ore, un'abbondante sviluppo d'idrogeno, mediante un lieve riscaldamento. La soluzione, che è gialla a caldo, e che diventa verde a freddo, quando cessa lo svolgimento di idrogeno, viene distillata a b. m. a pressione ridotta, per eliminare assieme all'acido acetico, la parte del pirrolo rimasta inalterata. Il residuo solido si scioglie per gran parte nell'acqua con colorazione verde, e la soluzione viene trattata con idrogeno solforato, per eliminarvi lo zinco. Svaporando il filtrato con aggiunta di acido cloridrico, fino a secchezza, si ottiene il cloridrato di pirrolina assieme a molto sale ammonico. Per ottenere l'alcaloide si distilla il residuo con potassa, si svapora nuovamente fino a secchezza il distillato acidificato con acido cloridrico, e si estrae il residuo con alcool assoluto. In questo modo si riesce a separare gran parte del cloruro ammonico dal cloridrato di pirrolina, dal quale si ottiene la base libera per distillazione con la potassa. Il rendimento è poco soddisfacente, in causa della formazione di prodotti resinosi, colorati in verde, e di ammoniaca, ed ammonta soltanto a circa 15-20 °/₀ del pirrolo che entra in reazione.

La pirrolina è un liquido oleoso, leggero, senza colore, che bolle a 90-91°, solubilissimo nell'acqua, da cui viene spostato dalla potassa solida. È volatilissimo ed ha un odore ammoniacale poco aggradevole; attira l'umidità e l'acido carbonico dell'aria. La pirrolina è base secondaria, essa dà col nitrito sodico ed acido solforico la nitrosammina $C_4 H_6 N . NO$, che fonde a 37-38°, e si combina col joduro di metile formando direttamente il *joduro di dimetilpirrolilammonio* secondo l'eguaglianza:

$$2 C_4 H_6 NH + 2 CH_3 J = C_4 H_6 NCH_3 . CH_3 J + C_4 H_6 NH . HI \ .$$

Questa sostanza si forma anche per azione del joduro metilico sulla metilpirrolina, che si ottiene in modo analogo della pirrolina, dal n-metilpirrolo con acido acetico e polvere di zinco. La riduzione del metilpirrolo dà un rendimento migliore di quella del pirrolo, perchè si forma meno materia resinosa. Il joduro di dimetilpirrolilammonio è una bellissima sostanza, cristallizzata in squamette madreperlacee, senza colore, solubile nell'acqua, poco solubile nell'alcool ed insolubile nell'etere e nella potassa concentrata, che si può trasformare nel cloruro e nell'ossido corrispondente, mediante il cloruro e l'ossido d'argento. L'idrato di dimetilpirrolilammonio è una base energica, solubilissima nell'acqua, che si scinde col calore in modo analogo all'idrato di metilpiridilammonio, dando dei prodotti molto alterabili d'un odore acre simile a quello delle carbilammine.

La posizione degl'idrogeni addizionati, nella pirrolina, non è stata ancora determinata; se il pirrolo ha realmente la formola, che ordinariamente gli viene attribuita, la costituzione della pirrolina sarà da esprimersi con lo schema:



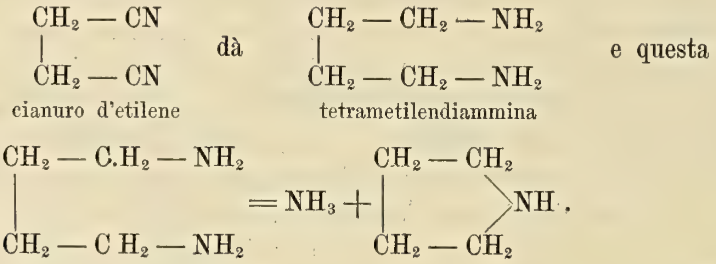
Essa contiene certo ancora due lacune, perchè il suo cloridrato dà con bromo un bibromuro di pirrolina [169], e perchè essa è in grado di addizionare altri due atomi d'idrogeno trasformandosi in pirrolidina.

Per preparare la pirrolidina, che è stata ottenuta per la prima volta da Ciamician e Magnaghi, si riscalda la pirrolina con acido jodidrico e fosforo rosso in tubi chiusi a 240-250° [169]. Il prodotto della reazione, che contiene oltre ai jodidrati delle basi, una materia resinosa, viene distillato con un eccesso di potassa. Assieme alla pirrolidina passano l'ammoniaca e piccole quantità di butilammina. Facendo agire l'acido jodidrico e fosforo sulla n-metilpirrolina si ottiene come prodotto principale l'*n-metilpirrolidina* ed inoltre ammoniaca, joduro di metile e piccole quantità di metilammina, pirrolidina, butilammina e metilbutilammina. Il comportamento del pirrolo e del metilpirrolo coi riducenti è riepilogato nel seguente specchietto:

	Punto di ebollizione		Punto di ebollizione
Pirrolo [C_4H_4NH]	130-131°	n-Metilpirrolo [$C_4H_4NCH_3$] .	114-115°
Pirrolina [C_4H_6NH]	90-91°	n-Metilpirrolina [$C_4H_6NCH_3$] .	79-80°
Pirrolidina [C_4H_8NH] . . .	82-83°	n-Metilpirrolidina [$C_4H_8NCH_3$]	82-83°
Butilammina normale	75°,5	Metilbutilammina normale . .	—

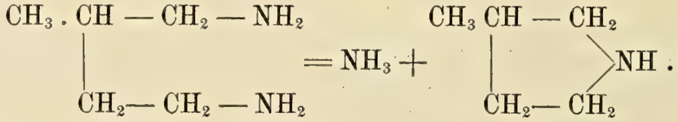
La pirrolidina è stata ottenuta poi in questi ultimi tempi da Ladenburg [170] [171] con lo stesso metodo con cui questo eminente chimico riescì ad ottenere per via sintetica la piperidina. La pirrolidina si forma dal cianuro di etilene nello stesso modo

pel quale si ottiene la piperidina dal cianuro di trimetilene. Riducendo il cianuro di etilene con sodio in soluzione alcoolica, si ottiene, oltre a piccole quantità di pirrolidina, la tetrametilendiammina ([171]), il cloridrato di questa base si scinde poi col riscaldamento in pirrolidina ed ammoniaca:



Ladenburg ottenne ultimamente piccole quantità di pirrolidina, anche riducendo l'imide succinica con sodio ed alcool ([159]).

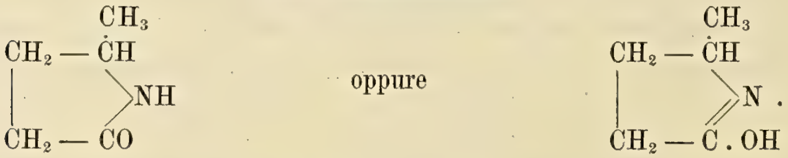
Similmente alla pirrolidina si può preparare la *β-metilpirrolidina* ([172]) dal cloridrato di β-metiltetrametilendiammina, che si ottiene dal cianuro di propilene $CH_3 . CH_2 (CN) . CH_2 (CN)$.



Assai interessante è la formazione, osservata da I. Tafel ([173]) ([174]), dell'*α-metilpirrolidina* dall'acido γ-amidovalerianico. Questa sostanza si scinde a 250-260° in acqua e in un'anidride, che deve essere considerata come un'*α-ossi-α'-metilpirrolidina* ([173]). Il legame anidrico può avvenire in forma lattamica o lattimica ed il composto ha perciò una delle due seguenti formole:

$$CH_3 . CH (NH_2) . CH_2 . CH_2 . COOH$$

acido γ-amidovalerianico



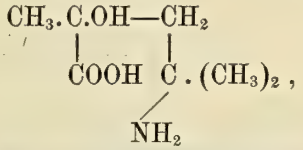
L'anidride γ-amidovalerianica si converte in α-metilpirrolidina riducendola con sodio in soluzione di alcool amilico bollente ([174]). Questa trasformazione è analoga a quella dell'imide succinica in pirrolidina ([159]), si può perciò considerare l'imide dell'acido succinico come un αα'-diossipirrolidina.

Una reazione, che ricorda molto quella scoperta da Tafel, è la trasformazione in derivati pirrolidinici dell'acido ottenuto dalla diacetonammina ([175]). Questa metamorfosi è stata studiata da H. Weil ([176]), l'interpretazione che ne dà l'autore è però un po' diversa da quella, che a chi scrive, sembra la più adeguata. Il composto che si

ottiene per azione degli acidi cianidrico e cloridrico su questa base è un acido della formola:

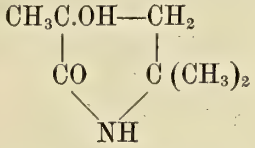
$CH_3 . CO . CH_2 . C(CH_3)_2 . NH_2$
diacetonammina

dà

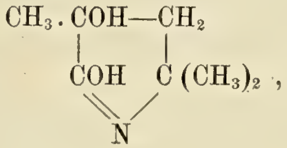


acido amidotrimetilossibutirrico
(amidotrimetilbutilattinico)

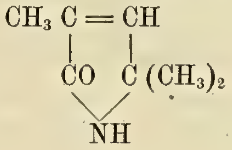
che si trasforma con grande facilità nell'anidride:

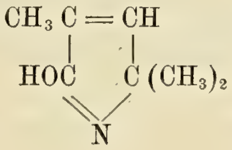


oppure

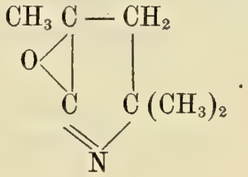


che può essere considerata come una *diossi-trimetilpirrolidina* (176). Questo corpo perde, per riscaldamento con acido solforico concentrato, una molecola d'acqua e si converte in una sostanza che può ritenersi essere una *ossitrimetilpirrolina.*

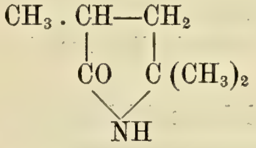




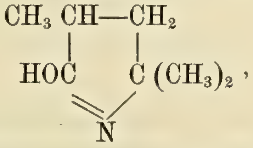
o un'*anidro-diossitrimetilpirrolidina.*



Questa ultima formola è la più probabile, perchè il composto non si combina nè col joduro di metile nè coll'acido nitroso. L'anidro-diossitrimetilpirrolidina dà poi, per azione dell'acido jodidrico e fosforo a 180° o del sodio in soluzione alcoolica, una base secondaria, che sarà molto probabilmente un'*ossitrimetilpirrolidina*:

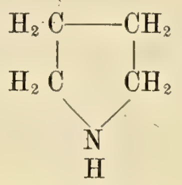


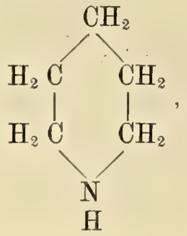
oppure



dalla quale per distillazione con la polvere di zinco sembra potersi ottenere una trimetilpirrolidina.

Dalle sintesi ora descritte apparisce evidente che la pirrolidina deve essere considerata come un composto perfettamente analogo alla piperidina:





quest'ultima è, come si vede, l'omologo nel nucleo superiore della pirrolidina (93).

L'analogia di costituzione di questi due alcaloidi si riflette fedelmente nelle loro proprietà e nel loro comportamento. La pirrolidina è un liquido senza colore, che bolle a 82-83° e che ha anche a temperatura ordinaria una notevole tensione di vapore. Essa ha un odore ammoniacale, pungente, simile a quello della piperidina ed è come questa una base secondaria energica, che forma in soluzione acida coi nitriti una nitrosammina. È da notarsi però che la qualità di nitroso-composto, che si ottiene in questa reazione è assai inferiore a quella richiesta dalla teoria (171), ed è inoltre rimarchevole, che si hanno del pari cattivi rendimenti nella preparazione della nitrosopirrolina (83). La pirrolidina forma un cloridrato deliquescente, un cloroplatinato cristallizzato in aghi, molto solubile nell'acqua ed un cloroaurato poco solubile.

Assai interessante è il comportamento della pirrolidina col joduro di metile, perchè in questa reazione specialmente, si è rivelata la sua grande somiglianza con la piperidina (169). Le ben note metamorfosi, per le quali Hofmann riescì a trasformare questa base in un idrocarburo non saturo della formola « C_5H_8 » (*piperilene*), corrispondono perfettamente a quelle per cui Ciamician e Magnaghi, seguendo passo per passo la via percorsa da Hofmann, ottennero dalla pirrolidina l'idrocarburo « C_4H_6 » (*pirrolilene*).

La pirrolidina non si combina direttamente che con una sola molecola di joduro di metile

$$C_4H_8NH + CH_3J = \underset{\text{jodidrato di metilpirrolidina}}{C_4H_8NCH_3 . HJ} ,$$

mentre la pirrolina forma subito il joduro di dimetilpirrolilammonio (83). La metilpirrolidina, che si ottiene dal jodidrato, è identica all'alcaloide che si prepara dall'n-metilpirrolo. *Il joduro di dimetilpirrolidil-ammonio*, si forma per ulteriore azione del joduro metilico sulla n-metilpirrolidina:

$$C_4H_8NCH_3 + CH_3J = \underset{\text{joduro di dimetilpirrolidilammonio}}{C_4H_8NCH_3 . CH_3J} ,$$

ed è una materia cristallina, deliquescente, molto solubile nell'alcool, insolubile invece nell'etere e nella potassa concentrata, che si trasforma per azione dell'ossido d'argento nell'idrato corrispondente. Questo ammonio si scinde col riscaldamento principalmente in metilpirrolidina ed alcool metilico, ma contemporaneamente a questa reazione ne

avviene un'altra, per cui si forma una base, che ha la composizione di una dimetilpirrolidina:

$$C_4H_8NCH_3 . CH_3OH = CH_3 . OH + C_4H_8NCH_3$$
$$C_4H_8NCH_3 . CH_3OH = H_2O + \underset{\text{dimetilpirrolidina}}{C_4H_7N(CH_3)_2} .$$

Distillando il joduro di dimetilpirrolidilammonio con la potassa solida, la decomposizione avviene invece in modo analogo a quella del joduro di dimetilpiperilammonio e si produce, oltre a joduro potassico ed acqua, solamente la cosidetta dimetilpirrolidina

$$C_4H_8N(CH_3)_2J + KOH = KJ + H_2O + C_4H_7N(CH_3)_2 .$$

Questa base non può essere considerata come un vero derivato dalla pirrolidina, come non è più da ritenersi un derivato piridico la dimetilpiperidina, in seguito alle esperienze di Ladenburg ([178]) ed a quelle più recenti di G. Merling ([177]). Del resto tenendo conto del comportamento dei derivati organici dell'ammonio in genere ed in modo speciale degli interessanti studî fatti da Körner e Menozzi ([179]) su questo argomento, sorge spontanea l'idea che la dimetilpiperidina e la dimetilpirrolidina non contengano più un nucleo chiuso di atomi. I due composti hanno invece probabilmente la costituzione:

$$\underbrace{CH_2 = CH - CH_2 - CH_2 - CH_2 - N(CH_3)_2}_{\text{dimetilpiperidina}} \text{ e } \underbrace{CH_2 = CH - CH_2 - CH_2 - N(CH_3)_2}_{\text{dimetilpirrolidina}} ,$$

e sono perciò da chiamarsi più propriamente *dimetilpentenilammina* e *dimetilquartenilammina.*

Il comportamento di questi due alcaloidi col joduro di metile prova la loro grande analogia e la loro costituzione. Essi formano col joduro di metile i joduri di trimetilpentenilammonio e di trimetilquartenilammonio, i quali, per distillazione con la potassa solida, si scindono in trimetilammina e negli idrocarburi C_5H_8 e C_4H_6.

Il *joduro di trimetilquartenilammonio* è una sostanza solida, solubilissima nell'acqua ed un po' deliquescente, che per distillazione con la potassa solida si scinde secondo l'equazione:

$$C_4H_7N(CH_3)_3J + KOH = KJ + H_2O + \underset{\text{pirrolilene}}{C_4H_6} + N(CH_3)_3 .$$

Il butino « *pirrolilene* », che si forma in questa reazione, non è stato ottenuto allo stato libero, ma Ciamician e Magnaghi ([169]) preferirono, in causa del suo punto di ebollizione poco elevato, di studiarlo allo stato di composto bromurato. I prodotti della distillazione sopra menzionata furono perciò fatti passare attraverso al bromo, dopo di avervi eliminato la trimetilammina mediante l'acido cloridrico. In questo modo si ottengono due tetrabromuri $C_4H_6Br_4$ diversi, che furono separati mediante l'etere petrolico; il composto meno solubile fonde a 118°-119°, l'altro solubilissimo, si solidifica difficilmente e fonde a 39°-40°.

Queste due sostanze si ottengono del pari dal butino, che si forma assieme ad altre sostanze, distillando l'eritrite con acido formico:

$$C_4 H_{10} O_4 + 2\, CH_2 O_2 = C_4 H_6 + 2\, CO_2 + 4\, H_2 O\,,$$

per cui è provato che il butino di Henninger è identico al pirrolilene ([180]). Esso ha perciò con somma probabilità la costituzione:

$$CH_2 = CH - CH = CH_2\,,$$

che corrisponde a quella che Ladenburg ([178]) ha proposto per il piperilene:

$$CH_2 = CH - CH_2 - CH = CH_2\,.$$

Anche questo idrocarburo forma col bromo due tetrabromuri isomeri $C_5 H_8 Br_4$, dei quali uno è solido e fonde a 114°,8, mentre l'altro si mantiene liquido anche alla temperatura di — 18° ([181]).

I composti che si ottengono dalla pirrolidina per le reazioni ora descritte corrispondono, come si vede, perfettamente a quelli che si ottengono dalla piperidina, ed il seguente specchietto serve a porre maggiormente in rilievo l'analogia delle due serie di derivati.

	Punti di fusione e di ebollizione		Punti di fusione e di ebollizione
Pirrolidina $C_4 H_8 NH$	p. eb. 82-83°	Piperidina $C_5 H_{10} NH$	p. eb. 106°
n-Metilpirrolidina $C_4 H_8 NCH_3$ . .	p. eb. 81-83°	n-Metilpiperidina $C_5 H_{10} NCH_3$ . .	p. eb. 107°
Joduro di dimetilpirrolidilammonio $C_4 H_8 N(CH_3)_2 J$	—	Joduro di dimetilpiperilammonio $C_5 H_{10} N(CH_3)_2 J$	—
Dimetilpirrolidina o dimetilquartenilammina $C_4 H_7 N(CH_3)_2$ . .	p. eb. 89-92°	Dimetilpiperidina o dimetilpentenilammina $C_5 H_9 N(CH_3)_2$ . . .	p. eb. 118°
Joduro di trimetilquartenilammonio $C_4 H_7 N(CH_3)_3 J$	—	Joduro di trimetilpentenilammonio $C_5 H_9 N(CH_3)_3 J$	—
Pirrolilene $C_4 H_6$	p. eb. 20-25°	Piperilene $C_5 H_8$	p. eb. 42°
Tetrabromuri di pirrolilene $C_4H_6Br_4$	p. f. 118-119° e 39-40°	Tetrabromuri di piperilene $C_5H_8Br_4$	p. f. 114°,8 e liquido

Il comportamento dei joduri di trimetilpentenilammonio e trimetilquartenilammonio, derivanti dalla piperidina e dalla pirrolidina, corrisponde perfettamente a quello degli altri derivati quaternarî organici dell'ammoniaca. Basti citare qui, a

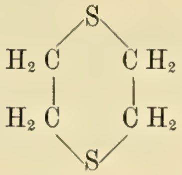
mo' d'esempio, la scissione dell'idrato di trimetilpropilammonio ([182]), che avviene secondo l'eguaglianza:

$$\underset{\text{idrato di trimetil-propilammonio}}{C_3H_7N(CH_3)_3OH} = \underset{\text{propilene}}{C_3H_6} + \underset{\text{trimetil-ammina}}{N(CH_3)_3} + H_2O\ .$$

Questi processi stanno poi in buona armonia con le trasformazioni degli acidi amidati per mezzo del joduro di metile e potassa, studiate da Körner e Menozzi ([179]). La tirosina dà in questo modo l'acido metilparacumarico e l'acido aspartico, il fumarico:

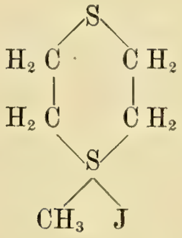
$$\begin{array}{l} COOH \\ | \\ CH_2 \\ | \\ CH\,.\,N(CH_3)_3J \\ | \\ COOH \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} COOH \\ | \\ CH \\ \| \\ CH \\ | \\ COOH\,. \end{array}$$

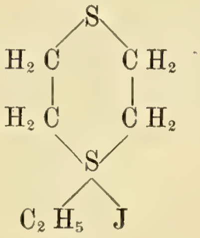
Degno di speciale menzione è poi l'interessantissimo fatto scoperto da Vittorio Meyer ([183]), che il disolfuro di dietilene



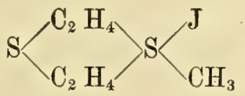
si comporta con i joduri alcoolici in modo molto analogo alla piperidina.

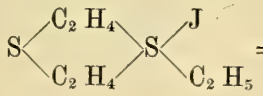
Esso si combina col joduro di metile e di etile formando i joduri solfinici ([184]) ([185]):



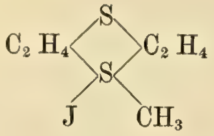


e questi composti si scindono coll'ossido d'argento ed anche con la soda eliminando acido jodidrico e formando due prodotti che V. Meyer chiama solfurani:

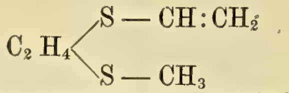
 $= HJ + \underset{\text{metilsolfurano}}{C_5H_{10}S_2}$

 $= HJ + \underset{\text{etilsolfurano}}{C_6H_{12}S_2}\,.$

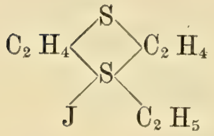
Ora questo illustre chimico ha dimostrato recentemente ([183]) ([186]), che queste sostanze non contengono più una catena chiusa di atomi, e che non sono altro che gli *eteri metilvinilico ed etilvinilico dell'etilenmercaptano o tioglicole:*



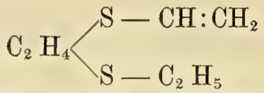
dà



etere metilvinilico del tioglicole

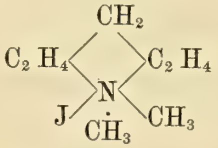


dà

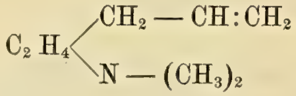


etere etilvinilico del tioglicole

Queste reazioni corrispondono perfettamente, come si vede, alla trasformazione del dimetilpiperilammonio in dimetilpentenilammina:



dà



Le proprietà del disolfuro di dietilene fanno prevedere che il comportamento del tetraidrotiofene, che non si conosce ancora, sarà simile a quello della pirrolidina. Se questa previsione verrà confermata dall'esperienza, l'analogia fra pirrolo e tiofene sarà completa.

ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI CITATE NELLA PRESENTE MONOGRAFIA

Abbreviazioni:

Acc. L. M. = Memorie della r. Accademia dei Lincei.
Acc. L. T. = Transunti della r. Accademia dei Lincei.
Acc. L. R. = Rendiconti della r. Accademia dei Lincei.
Gazz. chim. = Gazzetta chimica italiana.
Berl. Ber. = Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft zu Berlin.
L. Ann. = J. Liebig's Annalen der Chemie.

(1) Ramsay, Berl. Ber. 10, 736.
(2) Ladenburg, Berl. Ber. 16, 1410; 18, 1588, 2961.
(3) Ladenburg, Berl. Ber. 16, 2059.
(4) Skraup, Monatshefte für Chemie I, 800.
(5) Skraup, Monatshefte für Chemie VII, 210.
(6) Ladenburg, Berl. Ber. 17, 156.
(7) Weidel, Berl. Ber. 12, 2001.
(8) V. Meyer, Berl. Ber. 18, 1770; Paal, 18, 2255.
(9) V. Meyer, Berl. Ber. 16, 1465, 2968; Ciamician e Silber, Berl. Ber. 17, 142.
(10) V. Meyer e Stadler, Berl. Ber. 17, 1034.
(11) Paal, Berl. Ber. 18, 2255.
(12) Biedermann, Berl. Ber. 19, 1617.
(13) Ciamician, *Sul comportamento del metilchetolo.* Acc. L. R. 1886. — Gazz. chim. XVI, 532. — Berl. Ber. 19, 3029.
(14) Tönnies, Berl. Ber. 11, 1086; 12, 1203.
(15) Willgerodt, Journal für practische Chemie 33, 150.
(16) Ciamician e Silber, *Sopra alcuni derivati dell'imide succinica.* Acc. L. M. [3], 18 (1883-1884). — Gazz. XIV, 31. — Berl. Ber. 17, 553.
(17) Ciamician e Silber, *Studî sui composti della serie del pirrolo V. I derivati della pirocolla.* Acc. L. M. [3], XV (1882-83). — Gazz. chim. XIII, 403. — Berl. Ber. 16, 2388.
(18) Ciamician, *Sulla costituzione del pirrolo.* Acc. L. R. 1885. — Gazz. chim. XVI, 46. — Berl. Ber. 19, 523 R.
(19) V. Meyer e Stadler, Berl. Ber. 18, 1488.
(20) V. Meyer, Berl. Ber. 16, 1465.
(21) V. Meyer e Stadler, Berl. Ber. 17, 2778.
(22) Biedermann, Berl. Ber. 19, 1615.
(23) L. E. Levi, Berl. Ber. 19, 1623.
(24) Muhlert, Berl. Ber. 19, 633.
(25) Krekeler, Berl. Ber. 19, 674; Schleicher, Berl. Ber. 19, 672.
(26) Egli, Berl. Ber. 18, 547.
(27) Ruffi, Berl. Ber. 20, 1740.
(28) V. Meyer e Kreis, Berl. Ber. 16, 2174.
(29) Nahnsen, Berl. Ber. 17, 2192.
(30) Gattermann, Berl. Ber. 20, 858; V. Meyer, Zelinsky, Berl. Ber. 20, 2024.
(31) Biedermann, Berl. Ber. 19, 639.
(32) Limpricht, L. Ann. 165, 253.

(33) Biedermann, Berl. Ber. 19, 1853.
(34) Baeyer, Berl. Ber. 10, 355.
(35) Levi, Berl. Ber. 20, 513.
(36) O. Fischer, L. Ann. 206, 141.
(37) Fownes, L. Ann. 54, 52.
(38) E. Fischer, Berl. Ber. 13, 1334.
(39) H. Schiff, L. Ann. 201, 355.
(40) A. Biedermann, Berl. Ber. 19, 1617.
(41) Peter, Berl. Ber. 17, 2643.
(42) Buchka & Irisch, Berl. Ber. 20, 386, 1762, 2213. — Claus, Berl. Ber. 20, 2052.
(43) Peter, Berl. Ber. 18, 537.
(44) Ernst, Berl. Ber. 19, 3274.
(45) Runge, Poggendorff's Annalen 31, 65.
(46) Anderson, L. Ann. 105, 349.
(47) Weidel e Ciamician, Monatshefte für Chemie I, 279.
(48) Schützenberger, Bulletin Société chimique 25, 289.
(49) Williams, Chemical News 51, 15.
(50) Bell, Berl. Ber. 10, 1861.
(51) Königs, Berl. Ber. 12, 2341.
(52) V. Meyer e Sandmeyer, Berl. Ber. 16, 2176.
(53) V. Meyer, Berl. Ber. 18, 217.
(54) Schwanert, L. Ann. 116, 257.
(55) Limpricht, L. Ann. 165. 253.
(56) Klinkhardt, Journal für practische Chemie (2), 25, 41.
(57) Paal e Tafel, Berl. Ber. 18, 456.
(58) Goldschmidt, Zeitschrift für Chemie 1867, 280.
(59) Bell, Berl. Ber, 10, 1861.
(60) Köttnitz, Journal für practische Chemie (2), 6, 136.
(61) Bell e Lapper, Berl. Ber. 10, 1961.
(62) Haitinger, Monatshefte für Chemie 3, 228.
(63) Bell, Berl. Ber. 13, 877.
(64) Bernthsen, Berl. Ber. 13, 1047.
(65) Ciamician e Silber, *Sintesi del pirrolo*. Acc. L. R. 1886. — Gazz. chim. XVI, 534. — Berl. Ber. 19, 3027.
(66) Volhard e Erdmann, Berl. Ber. 18, 454.
(67) Knorr, L. Ann. 236, 290.
(68) Paal, Berl. Ber. 18, 367.
(69) Paal, Berl. Ber. 17, 913, 2756.
(70) Paal, Berl. Ber. 18, 2251.
(71) Lederer e Paal, Berl. Ber. 18, 2591.
(72) Knorr, Berl. Ber. 18, 299 e 1558.
(73) Knorr, Berl. Ber. 19, 46.
(74) Weidel e Ciamician, Berl. Ber. 13, 65.
(75) Ciamician e Dennstedt, *Sopra un metodo d'estrazione del pirrolo dall'olio animale*. Acc. L. R. II, 1886. — Gazz. chim. XVI, 336. — Berl. Ber. 19, 173.
(76) Limpricht, Berl. Ber. 3, 90.
(77) Baeyer, Berl. Ber. 3, 517; 10, 1358.
(78) V. Meyer, L. Ann. 236, 200.
(79) Dennstedt, Berl. Ber. 19, 2187.
(80) Ciamician e Dennstedt, *Studî sui composti della serie del pirrolo. VIII. Sull'azione di alcune anidridi organiche sul pirrolo*. Acc. L. M. [3], XIX (1883-1884). — Gazz. chim. XV, 9. — Berl. Ber. 17, 2944.

(81) Ciamician e Silber, *Studî sulla costituzione di alcuni derivati del pirrolo*. Acc. L. R. III, 1887. — Gazz. chim. 17, 262, 269. — Berl. Ber. 20, 2594.

(82) Hill, L. Ann. 232, 42.

(83) Ciamician e Dennstedt, *Studî sui composti della serie del pirrolo. IV. Azione dell'idrogeno nascente*. Acc. L. M. [3], XV (1882-1883). — Gazz. chim. XIII, 395. — Berl. Ber. 16, 1536.

(84) Liubawin, Beilstein's Handbuch der organischen Chemie 1883, 1984.

(85) Ciamician e Silber (e Magnaghi), *Sull'azione dell'allossana sul pirrolo*. Acc. L. R. 1886. — Gazz. chim. XVI, 198, 357. — Berl. Ber. 19, 106, 1708.

(86) Ciamician e Dennstedt, *Sull'azione dell'idrossilammina sul pirrolo*. Acc. L. T. VIII, 1884. — Gazz. chim. XIV, 156. — Berl. Ber. 17, 533.

(87) Goldschmidt, Zeitschrift für Chemie 1867, 280.

(88) Ciamician e Silber, *Sull'azione degli ipocloriti ed ipobromiti alcalini sul pirrolo*. R. Acc. L. T. VIII (1883-1884). — Gazz. chim. XIV, 356. — Berl. Ber. 17, 1743.

(89) Bennett e Hill, Berl. Ber. 12, 655.

(90) Beilstein e Schmelz, L. Ann. Supplem. III, 275.

(91) Limpricht, L. Ann. 165, 253.

(92) Hill, Berl. Ber. 16, 1130.

(93) Ciamician e Magnaghi, *Sugli alcaloidi derivanti dal pirrolo*. Acc. L. R. 1885. — Gazz. chim. XV, 250. — Berl. Ber. 18, 2079.

(94) Liubawin, Berl. Ber. 2, 99; Bell, Berl. Ber. 11, 1810.

(95) Ciamician e Dennstedt, *Sull'azione del cloruro di cianogeno sul composto potassico del pirrolo*. Acc. L. T. VII (1882-1883). — Gazz. chim. XIII, 102. — Berl. Ber. 16, 64.

(96) Ciamician e Magnaghi, *Sull' azione del cloruro di carbonile sul composto potassico del pirrolo*. Acc. L. R. I (1885). — Gazz. chim. XV, 282. — Berl. Ber. 18, 414.

(97) Ciamician e Dennstedt, *Studî sui composti della serie del pirrolo. III.* Acc. L. M. [3], XII, (1881-1882). — Gazz. chim. XIII, 14. — Berl. Ber. 15, 2579.

(98) Ciamician e Dennstedt, *Studî sui composti della serie del pirrolo. VI. L'acetilpirrolo ed il pseudoacetilpirrolo*. Acc. L. M. [3], XV [1882-1883]. — Gazz. chim. XIII, 455. — Berl. Ber. 16, 2348.

(99) E. Fischer, Berl. Ber. 19, 2988.

(100) Ciamician e Silber, *Sulla monobromopiridina*. Acc. L. R. I, 1885. — Gazz. chim. XV, 186. — Berl. Ber. 18, 721.

(101) O. Fischer e Hepp, Berl. Ber. 19, 2251.

(102) Stadler, Berl. Ber. 18, 2316.

(103) Ciamician e Dennstedt, *Sull'azione del cloroformio sul composto potassico del pirrolo*. Acc. L. M. [3], IX (1880-1881). — Gazz. chim. XI, 300. — Berl. Ber. 14, 1153.

(104) Dennstedt e Zimmermann, Berl. Ber. 18, 3316.

(105) Ciamician e Silber, *Sulla trasformazione del pirrolo in derivati della piridina*. Acc. L. R. 1887. — Gazz. chim. XVII, 11. — Berl. Ber. 20, 191.

(106) Ciamician e Dennstedt, *Studî sui composti della serie del pirrolo. II. Trasformazione del pirrolo in piridina*. Acc. L. M. [3], XII (1881-1882). — Gazz. chim. XII, 211. — Berl. Ber. 15, 1172.

(107) Weidel, Monatshefte für Chemie, 6, 664.

(108) Pfeiffer, Berl. Ber. 20, 1349.

(109) Magnanini, *Sulla trasformazione degli omologhi dell'indolo in derivati della chinolina*. Acc. L. R. III, 1887. — Gazz. chim. XVII, 246. — Berl. Ber. 20, 2608.

(110) E. Fischer e Steche, Berl. Ber. 20, 818.

(111) E. Fischer e Steche, Berl. Ber. 20, 2199.

(112) E. Fischer e Wagner, Berl. Ber. 20, 815.

(113) Ciamician e Dennstedt, *Sopra un nuovo omologo del pirrolo contenuto nell'olio di Dippel*. Acc. L. T. V (1881). — Gazz. chim. XI, 336. — Berl. Ber. 14, 1338.

(114) Dennstedt e Zimmermann, Berl. Ber. 19, 2189.

(115) Bell, Berl. Ber. 9, 935.

(116) Ciamician e Silber, *Sull'azione dell'anidride acetica sul n-metil ed n-benzilpirrolo.* Acc. L. R. III, 1887. — Gazz. chim. XVII, 134. — Berl. Ber. 20, 1368.

(117) Dennstedt e Zimmermann, Berl. Ber. 20, 850.

(118) Dennstedt e Zimmermann, Berl. Ber. 20, 2449.

(119) Ciamician e Silber, *Sull'azione dell'anidride acetica sull'omopirrolo.* Acc. L. R. 1886. — Gazz. chim. XVI, 352. — Berl. Ber. 19, 1408.

(120) Ciamician, *Sopra alcuni composti della serie del pirrolo.* Acc. L. T. V (1881). — Gazz. chim. XI, 226. — Berl. Ber. 14, 1053.

(121) Baeyer, Berl. Ber. 19, 2184.

(122) V. Meyer, Berl. Ber. 16, 2968.

(123) Peter, Berl. Ber. 17, 1341.

(124) Ciamician e Silber, *Sopra una nuova sintesi dell'acido α–carbopirrolico dal pirrolo.* Acc. L. T. VIII (1883-1884). — Gazz. chim. XIV, 264. — Berl Ber. 17, 1437.

(125) Ciamician e Silber, *Studî sui composti della serie del pirrolo. VII. I derivati dell'acido α–carbopirrolico.* Acc. L. M. [3], XVIII (1883-1884). — Gazz. chim. XIV, 162. — Berl. Ber. 17, 1150.

(126) Ciamician e Silber, *Sintesi della pirocolla.* Acc. L. T. VIII (1883-1884). — Gazz. chim. XIII, 563. — Berl. Ber. 17, 103.

(127) Baeyer, Berl. Ber. 10, 1358.

(128) Ciamician e Silber, *Sopra alcuni derivati bisostituiti del pirrolo e sulla loro costituzione.* Acc. L. R. 1886. — Gazz. chim. XVI, 373. — Berl. Ber. 19, 1956.

(129) Paal e Schneider, Berl. Ber. 19, 3158.

(130) Ciamician e Danesi, *Studî sui composti della serie del pirrolo. I. I derivati della pirocolla.* Acc. L. M. [3], XII [1881-1882]. — Gazz. chim. XII, 28. — Berl. Ber. 15, 1082.

(131) Dennstedt e Zimmermann, Berl. Ber. 20, 1760.

(132) Ciamician e Silber, *Sul dipseudoacetilpirrolo.* Acc. L. R. I, 1885. — Gazz. chim. XV, 248. — Berl. Ber. 18, 1466.

(133) Ciamician e Magnaghi, *Azione del calore sull' acetilpirrolo e sul carbonilpirrolo.* Acc. L. R. 1885. — Gazz. chim. XV, 256. — Berl. Ber. 18, 1828.

(134) Dennstedt e Zimmermann, Berl. Ber. 19, 2204.

(135) Ciamician e Silber, *Sull'acetilpirrolo.* Acc. L. R. 1885. — Gazz. chim. XV, 193. — Berl. Ber. 18, 881.

(136) Dennstedt e Zimmermann, Berl. Ber. 19, 2200.

(137) V. Meyer, Berl. Ber. 18, 1770.

(138) Bradley, Berl. Ber. 19, 2115.

(139) Schleicher, Berl. Ber. 19, 660.

(140) Demuth, Berl. Ber. 18, 3024.

(141) Demuth, Berl. Ber. 19, 679. — Levi, Berl. Ber. 19, 656. — Zelinsky, Berl. Ber. 20, 2017.

(142) Schleicher, Berl. Ber. 18, 3015.

(143) Messinger, Berl. Ber. 18, 2300.

(144) Gattermann e Römer, Berl. Ber. 19, 688.

(145) Demuth, Berl. Ber. 19, 683.

(146) V. Meyer e Kreis, Berl. Ber. 17, 1558.

(147) V. Meyer, Berl. Ber. 17, 1563.

(148) Bonz, Berl. Ber. 18, 2305.

(149) Jaekel, Berl. Ber. 19, 184.

(150) Langer, Berl. Ber. 18, 553.

(151) Zelinsky, Berl. Ber- 20, 2017.

(152) Hill e Palmer, Berl. Ber. 18, 2095.

(153) Ciamician e Silber, *Sull'azione degli alogeni sul pirrolo in presenza di idrati alcalini.* Acc. L. R. 1885. — Gazz. chim. XVI, 39. — Berl. Ber. 18, 1763.

(154) Kalle & C°., Berl. Ber. 20, 123 (Patente).

(155) Merz e Weith, Berl. Ber. 5, 460.

(156) Beilstein e Kurbatow, L. Ann. 192, 236.

(157) Stenhouse, L. Ann. Suppl. VIII, 19.

(158) Armstrong e Brocon, Berl. Ber. 7, 926.

(159) Ladenburg, Berl. Ber. 20, 2215.

(160) Ciamician, *Sul tetrajodopirrolo e sulle sue proprietà terapeutiche.* Acc. L. R. 1886. — Gazz. chim. XVI, 543. — Berl. Ber. 20, 220 R.

(161) Bell, Berl. Ber. 11, 1810.

(162) Malagutti, L. Ann. 32, 41.

(163) Dittmar, Berl. Ber. 18, 1622.

(164) V. Meyer e Stadler, Berl. Ber. 17, 2648.

(165) Ciamician e Silber, *Sopra alcuni nitrocomposti della serie del pirrolo.* Acc. L. R. II, 1886. — Gazz. chim. XVI, 347. — Berl. Ber. 19, 1078.

(166) Ciamician e Silber, *Studî sui composti della serie del pirrolo. IX. Azione dell'acido nitrico sul pirrilmetilchetone.* Acc. L. M. [4], I (1884-1885). — Gazz. chim. XV, 315. — Berl. Ber. 18, 1456.

(167) Römer, Berl. Ber. 20, 116.

(168) O. Fischer e E. Hepp, Berl. Ber. 19, 2251.

(169) Ciamician e Magnaghi, *Studî sui composti della serie del pirrolo. X. Sugli alcaloidi derivanti dal pirrolo.* Acc. L. M. [4], I (1884-1885). — Gazz. chim. XV, 481.

(170) Ladenburg, Berl. Ber. 19, 780.

(171) Ladenburg, Berl. Ber. 20, 442.

(172) Oldach, Berl. Ber. 20, 1654.

(173) Tafel, Berl. Ber. 19, 2414.

(174) Tafel, Berl. Ber. 20, 249.

(175) Heintz, L. Ann. 192, 329, 339.

(176) Weil, L. Ann. 232, 206.

(177) Merling, Berl. Ber. 19, 2628.

(178) Ladenburg, Berl. Ber. 16, 2057.

(179) Körner e Menozzi, Rendiconti del r. Istituto lombardo [2] vol. XIII, XIV e XVI.

(180) Ciamician e Magnaghi, *Sul pirrolilene.* Acc. L. R. 1886. — Gazz. chim. XVI, 212. — Berl. Ber. 19, 569.

(181) Magnanini, *Sul piperilene.* Acc. L. R. II, 1886. — Gazz. chim. XVI, 390. — Berl. Ber. 20, 103 R.

(182) Langeli, *Sul joduro di trimetilpropilammonio e sui prodotti di scomposizione dell'idrato corrispondente.* Acc. L. R. 1886. — Gazz. chim. 16, 385. — Berl. Ber. 20, 103 R.

(183) V. Meyer e R. Demuth, Berl. Ber. 20, 1830.

(184) Mansfeld, Berl. Ber. 19, 2658.

(185) V. Meyer, Berl. Ber. 19, 3259.

(186) V. Meyer e Demuth, L. Ann. 240, 305.

SPIEGAZIONE DELLE TABELLE

Nelle seguenti tabelle sono riuniti tutti i derivati del pirrolo fin qui descritti, divisi in nove gruppi. La classificazione in derivati monosostituiti, bisostituiti ecc. seguìta nelle pregevoli monografie di Reverdin e Nölting sui composti della naftalina e di Metzger sui derivati della piridina e chinolina, è sembrata a chi scrive meno opportuna di quella adottata in queste tabelle, nelle quali i derivati del pirrolo sono aggruppati nel seguente modo:

Tab. I. *Composti alogenati.*
Tab. II. *Nitro-derivati.*
Tab. III. *Azocomposti.*
Tab. IV. *Prodotti di sostituzione con radicali acidi.*
Tab. V. *Acidi carbossilici.*
Tab. VI. *Prodotti di sostituzione con radicali organici negativi.*
Tab. VII. *Composti idrogenati.*
Tab. VIII. *Composti di addizione con gli alogeni.*
Tab. IX. *Appendice,* contenente i composti di costituzione ignota o non altrimenti classificabili.

Naturalmente ogni classificazione ha i suoi vantaggi ed i suoi difetti, ma quella ora indicata è forse la più adatta a dare rapidamente un conto esatto di ciò che è stato fatto sopra un dato gruppo di derivati. Certo in questo modo la classificazione di alcuni composti riesce un po' arbitraria, così ad es. nelle seguenti tabelle i derivati nitrici alogenati sono stati messi fra i composti alogenati, piuttosto chè fra i composti nitrici, ma essendo relativamente piccolo il numero dei derivati del pirrolo fin'ora conosciuti, riescirà facile a chi avrà a servirsi di queste tabelle il trovare quello che cerca.

In ogni tabella sono segnati, in una colonna verticale a sinistra, i radicali sostituenti, contenuti nel composto che occupa una divisione orizzontale. Di ogni sostanza è poi indicato in questa, tutti i modi in cui è stata ottenuta, le sue proprietà caratteristiche ed inoltre l'autore che la ha descritta. In fine d'ogni tabella sono citate tutte le pubblicazioni relative ai composti in essa contenuti.

La posizione dei radicali è segnata, conformemente alla nomenclatura adottata nel testo, con le lettere greche α, α', β, β', nel senso indicato dalla formola schematica, che si trova in testa ad ogni tabella. La lettera c indica indistintamente la sostituzione di un idrogeno del residuo tetrolico, la lettera n quella dell'idrogeno imminico. La posizione dei singoli gruppi, contenuti nel radicale sostituente un'atomo d'idrogeno pirrolico, è segnata con gli indici generalmente usati. Questi indici sono posti sotto alla formola per distinguerli dagli altri che stanno sopra ai singoli radicali. Così p. e. l'*n-paratolil-αα'-dimetilpirrolo,* è scritto nel modo seguente:

$$C_4\,H_2\,(\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2\,\underset{1}{N}\,\overset{n}{\overbrace{C_6\,H_4\,\underset{4}{C}H_3}}$$

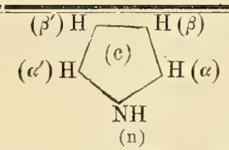
Nei prodotti di addizione i simboli dell'idrogeno o dei radicali addizionati, indicati nella prima rubrica verticale, sono posti tra parentesi.

Per ultimo è da notarsi che l'unico amido-composto fin'ora conosciuto nella serie del pirrolo, il *β-amido-pirrilmetilchetone,* è messo fra i composti nitrici, e l'*unico solfoacido,* quello dell'*α-acetilpirrolo,* è messo fra i prodotti di sostituzione con radicali organici negativi.

In queste tabelle, salvo omissioni involontarie, sono contenuti tutti i derivati del pirrolo pubblicati fino al 24 ottobre 1887.

Le abbreviazioni adoperate per indicare i periodici citati, sono identiche a quelle usate nel testo.

TABELLA I.

	COMPOSTI ALOGENATI
Cl , Cl , Cl , Cl	**Tetracloropirrolo** $\overset{(c)}{C_4 Cl_4}$ NH 1. Dal pirrolo con cloro in soluzione alcoolica (Hepp [1]). 2. Dal pirrolo con ipoclorito sodico (Ciamician e Silber [2]). 3. Riducendo il percloruro $C_4 Cl_7 N$ con acido acetico e polvere di zinco (Ciamician e Silber [3]). 4. Riducendo il percloruro $C_4 Cl_7 N . CO$ con acido acetico e zinco (Ciamician e Silber [4]). — Pagliette o laminette p. f. 110°.
Br , Br , Br , Br	**Tetrabromopirrolo** $\overset{(c)}{C_4 Br_4}$ NH 1. Dal pirrolo con bromo in soluzione alcoolica (Hepp [1]). 2. Dagli acidi pirrolcarbonici (Hepp [1]). — Aghi bianchi, si scompone a 120°.
J , J , J , J	**Tetrajodopirrolo** (Jodolo) $\overset{(c)}{C_4 J_4}$ NH 1. Dal pirrolo con jodio in soluzione alcalina (Ciamician e Silber [2]). 2. Dal composto potassico del pirrolo e jodio (Ciamician e Dennstedt [5]). 3. Dal tetracloropirrolo o tetrabromopirrolo con joduro potassico (Hepp [1]). — Pagliette giallo-chiare o prismi appiattiti giallo-bruni. Si scompone senza fondere verso 140°-150°. [Proprietà fisiologiche: Ciamician Ac. L. R. 1886 II. 252].
Br , $COCH_3$	**Monobromopirrilmetilchetone** $C_4 H_2 Br (\overset{\alpha}{CO}CH_3)$ NH (?) 1. Dal pirrilmetilchetone con bromo in soluzione d'acido acetico glaciale (Ciamician e Dennstedt [6]). — Aghi appiattiti senza colore p. f. 107-108°.
Br , Br , $COCH_3$	**Bibromopirrilmetilchetone** $C_4 HBr_2 (\overset{\alpha}{CO}CH_3)$ NH (?) 1. Dal pirrilmetilchetone con bromo come sopra (Ciamician e Dennstedt [6]). — Aghi piccoli bianchi p. f. 143-144°.
Br , Br , Br , $COCH_3$	**Tribromopirrilmetilchetone** $C_4 Br_3 (\overset{\alpha}{CO}CH_3)$ NH 1. Dal pirrilmetilchetone con bromo in soluzione acquosa (Ciamician e Silber [2]). — Aghi lunghi senza colore p. f. 179°.
Br , Br , Br , $COCH Br_2$	**Pentabromopirrilmetilchetone** $C_4 Br_3 (\overset{\alpha}{CO} . CHBr_2)$ NH 1. [illegible]

… in soluzione acquosa con bromo (Ciamician e Silber [7]). — Aghi bianchi p. f. 171-172°.

Br , Br , $COCH_3$, CH_3	**Bibromo-α-metil-α′-acetilpirrolo** $C_4 Br_2 \overset{\alpha}{(CH_3)} (\overset{\alpha'}{CO}CH_3) NH$ Dall'α-metil-α′-acetilpirrolo con bromo in soluzione di solfuro di carbonio (Ciamician e Silber [7]). — Aghi lunghi, bianchi di splendore serico, p. f. 161-162°.
Cl , Cl , Cl , COOH	**Acido triclorocarbopirrolico** $C_4 Cl_3 NH . \overset{\alpha}{CO}OH$ 1. Dalla sua anidride con potassa (Ciamician e Danesi [8]). — Aghi finissimi di splendore serico, contengono una mol. di H_2O. Si scompone a 150°. **Anidride** (Percloropirocolla) $C_{10} Cl_6 N_2 O_2$ 1. Dalla pirocolla con pentacloruro di fosforo a 210-220° (Ciamician e Danesi [8]). — Pagliette gialle tricline, fonde scomponendosi sopra 320°.
Br , Br , COOH	**Acido bibromocarbopirrolico** $(C_4 Br_2 HNH) \overset{\alpha}{CO}OH$ 1. Dalla sua anidride con potassa (Ciamician e Silber [4]). — Tavolette che si scompongono a 105°. **Anidride** (Tetrabromopirocolla) $C_{10} Br_4 H_2 N_2 O_2$ 1. Dalla pirocolla con bromo a 100° (Ciamician e Silber [4]). — Aghetti gialli, si scompone verso 250°.
Br , Br , Br , COOH	**Acido tribromocarbopirrolico** $(C_4 Br_3 NH) \overset{\alpha}{CO}OH$ 1. Dal suo etere metilico (Ciamician e Silber [9]). — Aghi lunghi, si scompone a 140-150°. **Etere metilico** $(C_4 Br_3 NH) COOCH_3$ 1. Dall'etere metilico dell'acido carbopirrolico in soluzione acquosa con bromo (Ciamician e Silber [9]). — Aghi lunghi e sottili, p. f. 209-210°.
Br , $CO — C_4 H_3 N — CO$	**Monobromopirocolla** $C_{10} H_5 Br N_2 O_2$ 1. Dalla pirocolla con bromo in soluzione acetica a 120° (Ciamician e Danesi [8]). — Squamette senza colore, p. f. 190-192°.
Br , $CO . C_4 H_2 Br N . CO$	**Bibromopirocolla** $C_{10} H_4 Br_2 N_2 O_2$ 1. Dalla pirocolla come sopra (Ciamician e Danesi [8]). — Pagliette gialle, p. f. 288-290°.
Br , Br , COOH , $COCH_3$	**Acido bibromo-α-acetil-carbopirrolico** $C_4 \overset{\beta\beta_1}{Br_2} (\overset{\alpha_1}{CO}OH) (\overset{\alpha}{CO}CH_3) NH$ L'etere metilico si ottiene dall'etere α-acetilcarbopirrolico in soluzione acquosa con bromo (Ciamician e Silber [7]).

TABELLA I.

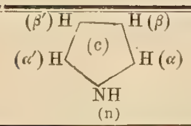
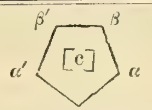
	COMPOSTI ALOGENATI
Cl, Cl, Cl, Cl	**Tetracloropirrolo** $C_4 \overset{(c)}{Cl_4}$ NH 1. Dal pirrolo con cloro in soluzione alcoolica (Hepp [1]). 2. Dal pirrolo con ipoclorito sodico (Ciamician e Silber [2]). 3. Riducendo il percloruro $C_4 Cl_7 N$ con acido acetico e polvere di zinco (Ciamician e Silber [3]). 4. Riducendo il percloruro $C_4 Cl_7 N . CO$ con acido acetico e zinco (Ciamician e Silber [4]). — Pagliette o laminette p. f. 110°.
Br, Br, Br, Br	**Tetrabromopirrolo** $C_4 \overset{(c)}{Br_4}$ NH 1. Dal pirrolo con bromo in soluzione alcoolica (Hepp [1]). 2. Dagli acidi pirrolcarbonici (Hepp [1]). — Aghi bianchi, si scompone a 120°.
J, J, J, J	**Tetrajodopirrolo** (Jodolo) $C_4 \overset{(c)}{J_4}$ NH 1. Dal pirrolo con jodio in soluzione alcalina (Ciamician e Silber [2]). 2. Dal composto potassico del pirrolo e jodio (Ciamician e Dennstedt [5]). 3. Dal tetracloropirrolo o tetrabromopirrolo con joduro potassico (Hepp [1]). — Pagliette giallo-chiare o prismi appiattiti giallo-bruni. Si scompone senza fondere verso 140°-150°. [Proprietà fisiologiche: Ciamician Ac. L. R. 1886 II. 252].
Br, COCH$_3$	**Monobromopirrilmetilchetone** $C_4 H_2 Br (\overset{\alpha}{CO}CH_3)$ NH (?) 1. Dal pirrilmetilchetone con bromo in soluzione d'acido acetico glaciale (Ciamician e Dennstedt [6]). — Aghi appiattiti senza colore p. f. 107-108°.
Br, Br, COCH$_3$	**Bibromopirrilmetilchetone** $C_4 HBr_2 (\overset{\alpha}{CO}CH_3)$ NH (?) 1. Dal pirrilmetilchetone con bromo come sopra (Ciamician e Dennstedt [6]). — Aghi piccoli bianchi p. f. 143-144°.
Br, Br, Br, COCH$_3$	**Tribromopirrilmetilchetone** $C_4 Br_3 (\overset{\alpha}{CO}CH_3)$ NH 1. Dal pirrilmetilchetone con bromo in soluzione acquosa (Ciamician e Silber [2]). — Aghi lunghi senza colore p. f. 179°.
Br, Br, Br, COCH Br$_2$	**Pentabromopirrilmetilchetone** $C_4 Br_3 (CO . \overset{\alpha}{C}HBr_2)$ NH 1. Dal pirrilmetilchetone con bromo in soluzione d'acido acetico glaciale (Ciamician e Dennstedt [6]). 2. Dal tribromopirrilmetilchetone con bromo in soluzione d'acido acetico glaciale (Ciamician e Silber [2]). — Aghi senza colore p. f. 200°.
Br, Br COCH$_3$, COCH$_3$	**Bibromopirrilen-dimetil-dichetone** $C_4 \overset{\beta\beta'}{Br_2} (\overset{\alpha\alpha'}{CO}CH_3)_2$ NH 1. Dal pirrilendimetildichetone in soluzione acquosa con bromo (Ciamician e Silber [7]). — Aghi bianchi p. f. 171-172°.
Br, Br, COCH$_3$, CH$_3$	**Bibromo-α-metil-α′-acetilpirrolo** $C_4 Br_2 (\overset{\alpha}{C}H_3) (\overset{\alpha'}{CO}CH_3)$ NH Dall'α-metil-α′-acetilpirrolo con bromo in soluzione di solfuro di carbonio (Ciamician e Silber [7]). — Aghi lunghi, bianchi di splendore serico, p. f. 161-162°.
Cl, Cl, Cl, COOH	**Acido triclorocarbopirrolico** $C_4 Cl_3$ NH . $\overset{\alpha}{CO}OH$ 1. Dalla sua anidride con potassa (Ciamician e Danesi [8]). — Aghi finissimi di splendore serico, contengono una mol. di H_2O. Si scompone a 150°. **Anidride** (Percloropirocolla) $C_{10} Cl_6 N_2 O_2$ 1. Dalla pirocolla con pentacloruro di fosforo a 210-220° (Ciamician e Danesi [8]). — Pagliette gialle tricline, fonde scomponendosi sopra 320°.
Br, Br, COOH	**Acido bibromocarbopirrolico** $(C_4 Br_2 HNH) \overset{\alpha}{CO}OH$ 1. Dalla sua anidride con potassa (Ciamician e Silber [4]). — Tavolette che si scompongono a 105°. **Anidride** (Tetrabromopirocolla) $C_{10} Br_4 H_2 N_2 O_2$ 1. Dalla pirocolla con bromo a 100° (Ciamician e Silber [4]). — Aghetti gialli, si scompone verso 250°.
Br, Br, Br, COOH	**Acido tribromocarbopirrolico** $(C_4 Br_3 NH) \overset{\alpha}{CO}OH$ 1. Dal suo etere metilico (Ciamician e Silber [9]). — Aghi lunghi, si scompone a 140-150°. **Etere metilico** $(C_4 Br_3 NH) COOCH_3$ 1. Dall'etere metilico dell'acido carbopirrolico in soluzione acquosa con bromo (Ciamician e Silber [9]). — Aghi lunghi e sottili, p. f. 209-210°.
Br, CO — $C_4 H_3 N$ — CO	**Monobromopirocolla** $C_{10} H_5 Br N_2 O_2$ 1. Dalla pirocolla con bromo in soluzione acetica a 120° (Ciamician e Danesi [8]). — Squamette senza colore, p. f. 190-192°.
Br, CO . $C_4 H_2$ Br N . CO	**Bibromopirocolla** $C_{10} H_4 Br_2 N_2 O_2$ 1. Dalla pirocolla come sopra (Ciamician e Danesi [8]). — Pagliette gialle, p. f. 288-290°.
Br, Br, COOH, COCH$_3$	**Acido bibromo-α-acetil-carbopirrolico** $C_4 \overset{\beta\beta_1}{Br_2} (\overset{\alpha_1}{CO}OH) (\overset{\alpha}{CO}CH_3)$ NH L'etere metilico si ottiene dall'etere α-acetilcarbopirrolico in soluzione acquosa con bromo (Ciamician e Silber [7]).

TABELLA I (continuazione).

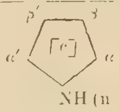
 NH (n	COMPOSTI ALOGENATI
Br, Br, COOH, COOH	**Acido bibromo-$\alpha\alpha'$-pirroldicarbonico** $C_4 \overset{\beta\beta'}{Br_2} \overset{\alpha\alpha'}{(COOH)_2} NH$ 1. Dal suo etere dimetilico (Ciamician e Silber [7]). — Aghi bianchi. **Etere dimetilico** $C_4 Br_2 (COOCH_3)_2 NH$ 1. Dall'etere dimetilico dell'acido $\alpha\alpha'$-pirroldicarbonico in soluzione acquosa con bromo (Ciamician e Silber [7]). — Aghi lunghi, bianchi, p. f. 222°.
Br, Br, Br, Br, $C_2 H_5$	**Tetrabromo-n-etilpirrolo** $C_4 Br_4 \overset{n}{N} C_2 H_5$ 1. Dall'n-etilpirrolo con acqua di bromo (Bell [10]). — Aghi senza colore, p. f. 90°.
Br, Br, Br, $CONHC_2 H_5$, $C_2 H_5$	**Tribromodietilcarbopirrolamide** $C_4 Br_3 \overset{\alpha}{(CONHC_2 H_5)} NC_2 H_5$ 1. Dalla dietilcarbopirrolamide con acqua di bromo (Bell [10]). — Aghi lunghi p. f. 120-121°.
Br, Br, NO_2, NO_2	**Dibromodinitropirrolo** $C_4 \overset{\beta\beta'}{Br_2} \overset{\alpha\alpha'}{(NO_2)_2} NH$ 1. Dall'acido bibromopirrol-$\alpha\alpha$-dicarbonico con acido nitrico fumante (Ciamician e Silber [7]). 2. Dal mononitrobibromoacetilpirrolo con acido nitrico fumante ed acido solforico (Ciamician e Silber [7]). — Lamine gialle, si scompongono intorno a 169°, cristallizzano con una mol. di OH_2.
Br, Br, NO_2, $COCH_3$	**Bibromo-α-nitro-α-acetilpirrolo** $C_4 \overset{\beta\beta'}{Br_2} \overset{\alpha'}{(NO_2)} \overset{\alpha}{(COCH_3)} NH$ 1. Dal bibromodiacetilpirrolo con acido nitrico fumante (Ciamician e Silber [7]). — Aghi lunghi bianchi p. f. 206°. **Bibromo-β-nitro-α-acetilpirrolo** $C_4 \overset{\beta_1}{Br} \overset{\alpha_1}{Br} \overset{\beta}{NO_2} \overset{\alpha}{(COCH_3)} NH$ o $C_4 \overset{\beta}{Br} \overset{\alpha_1}{Br} \overset{\beta_1}{NO_2} \overset{\alpha}{(COCH_3)} NH$ 1. Dall'α-acetil-β-nitropirrolo con bromo in soluzione d'acido acetico glaciale (Ciamician e Silber [7]). — Aghetti larghi p. f. 175°.

1) Kalle & C.° Berl. Ber. 20, 123 P.
2) Acc. L. R. 1885. — Gazz. 16, 39. — Berl. Ber. 18, 1763.
3) Acc. L. M. [3] XVIII (1883-84). — Gazz. [illegible]
4) Acc. L. M. [3] XV (1882-83). — Gazz. 13, 403. — Berl. Ber. 16, 2388.
6) Acc. L. M. [3] XV (1882-83). — Gazz. 13, 455. — Berl. Ber. 16, 2348.
7) Acc. L. R. III (1887). — Gazz. 17, 262, 269. — Berl. Ber. 20, 2594.
8) Acc. L. M. [3] XVIII (1883-1884). — Gazz. 14, 162. — Berl. Ber. 17, 1150.

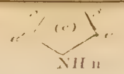
NO_2, NO_2	**Dinitropirrolo** $C_4H_2(NO_2)_2NH$ 1. Dal pirrilmetilchetone con acido nitrico fumante (Ciamician e Silber [1]). 2. Dall'acido α-carbopirrolico con acido nitrico fumante (Ciamician e Silber [2]). — Lamine senza colore o prismi trimetrici, p. f. 152°.	**Dinitropirrolo** $C_4H_2(NO_2)_2NH$ (?) Dall'acido α-carbopirrolico con acido nitrico fumante (Ciamician e Silber [2]). — Aghi, p. f. 173°.
NO_2, $COCH_3$	β-**Nitropirrilmetilchetone** $C_4H_2\overset{\beta}{(NO_2)}\overset{\alpha}{(COCH_3)}NH$ o $C_4H_2\overset{\beta'}{(NO_2)}\overset{\alpha}{(COCH_3)}NH$ Dal pirrilmetilchetone con acido nitrico fumante (Ciamician e Silber [1]). — Aghetti senza colore o tavolette tricline, p. f. 197°. Ha reazione neutra.	α-**Nitropirrilmetilchetone** $C_4H_2\overset{\alpha'}{(NO_2)}\overset{\alpha}{(COCH_3)}NH$ (?) Dal pirrilmetilchetone con acido nitrico fumante (Ciamician e Silber [1]). — Aghi lunghi p. f. 156°. Ha reazione acida. β-**Amidopirrilmetilchetone** $C_4H_2\overset{\beta\text{ o }\beta'}{(NH_2)}\overset{\alpha}{(COCH_3)}NH$ Dal β-nitropirrilmetilchetone con HCl e Sn (Ciamician e Silber [1]).— Il cloroplatinato $[(C_6H_6NONH_2 \cdot HCl)_2PtCl_4]$ forma aghi gialli.
NO_2, NO_2, $COCH_3$	**Dinitropirrilmetilchetone** $C_4H\overset{\beta}{(NO_2)}\overset{\alpha'}{(NO_2)}\overset{\alpha}{(COCH_3)}NH$ o $C_4H\overset{\beta_1}{(NO_2)}\overset{\alpha_1}{(NO_2)}\overset{\alpha}{(COCH_3)}NH$ Dal pirrilmetilchetone con acido nitrico fumante (Ciamician e Silber [1]). — Aghi leggermente gialli, contengono una mol. di H_2O, p. f. 106-107°; deacquificati fondono a 114°.	
NO_2, $COCH_3$, $COCH_3$	**Nitro-αα'-diacetilpirrolo** $C_4H\overset{\beta}{N}O_2\overset{\alpha\alpha'}{(COCH_3)_2}NH$ Dal pirrilendimetildichetone con acido nitrico fumante (Ciamician e Silber [2]). — Aghi lunghi senza colore p. f. 149°.	
NO_2, $COOH$	**Acido nitrocarbopirrolico** $C_4H_2(NO_2)\overset{\alpha}{(COOH)}NH$ Dalla sua anidride con potassa (Ciamician e Danesi [3]). — Piccoli aghetti leggermente colorati in giallo che contengono una mol. di OH_2, deacquificati fondono a 144-146°. **Anidride** (Dinitropirocolla) $C_{10}H_4(NO_2)_2N_2O_2$ Dalla pirocolla con acido nitrico fumante (Ciamician e Danesi [3]). — Piccoli prismi o pagliette gialle.	

[1]) Acc. L. M. [4], I, (1884-1885). — Gazz. 15, 315. — Berl. Ber. 18, 1456.
[2]) Acc. L. R. II, (1886). — Gazz. 16, 347. — Berl. Ber. 19, 1078.
[3]) Acc. L. M. [3], XII, (1881-1882). — Gazz. 12, 28. — Berl. Ber. 15, 1082.

Tabella I (continuazione).

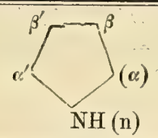
	COMPOSTI ALOGENATI
Br, Br, COOH, COOH	**Acido bibromo-$\alpha\alpha'$-pirroldicarbonico** $C_4 \overset{\beta\beta'}{Br_2} (\overset{\alpha\alpha'}{COOH})_2 NH$ 1. Dal suo etere dimetilico (Ciamician e Silber [7]). — Aghi bianchi. **Etere dimetilico** $C_4 Br_2 (COOCH_3)_2 NH$ 1. Dall'etere dimetilico dell'acido $\alpha\alpha'$-pirroldicarbonico in soluzione acquosa con bromo (Ciamician e Silber [7]). — Aghi lunghi, bianchi, p. f. 222°.
Br, Br, Br, Br, $C_2 H_5$	**Tetrabromo-n-etilpirrolo** $C_4 Br_4 NC_2 H_5$ 1. Dall'n-etilpirrolo con acqua di bromo (Bell [10]). — Aghi senza colore, p. f. 90°.
Br, Br, Br, $CONHC_2 H_5$, $C_2 H_5$	**Tribromodietilcarbopirrolamide** $C_4 Br_3 (\overset{\alpha}{CONHC_2 H_5}) NC_2 H_5$ 1. Dalla dietilcarbopirrolamide con acqua di bromo (Bell [10]). — Aghi lunghi p. f. 120-121°.
Br, Br, NO_2, NO_2	**Dibromodinitropirrolo** $C_4 \overset{\beta\beta'}{Br_2} (\overset{\alpha\alpha'}{NO_2})_2 NH$ 1. Dall'acido bibromopirrol-$\alpha\alpha$-dicarbonico con acido nitrico fumante (Ciamician e Silber [7]). 2. Dal mononitrobibromoacetilpirrolo con acido nitrico fumante ed acido solforico (Ciamician e Silber [7]). — Lamine gialle, si scompongono intorno a 169°, cristallizzano con una mol. di OH_2.
Br, Br, NO_2, $COCH_3$	**Bibromo-α-nitro-α-acetilpirrolo** $C_4 \overset{\beta\beta'}{Br_2} (\overset{\alpha'}{NO_2})(\overset{\alpha}{COCH_3}) NH$ 1. Dal bibromodiacetilpirrolo con acido nitrico fumante (Ciamician e Silber [7]). — Aghi lunghi bianchi p. f. 206°. **Bibromo-β-nitro-α-acetilpirrolo** $C_4 \overset{\beta_1}{Br} \overset{\alpha_1}{Br} \overset{\beta}{NO_2} (\overset{\alpha}{COCH_3}) NH$ o $C_4 \overset{\beta}{Br} \overset{\alpha_1}{Br} \overset{\beta_1}{NO_2} (\overset{\alpha}{COCH_3}) NH$ 1. Dall'α-acetil-β-nitropirrolo con bromo in soluzione d'acido acetico glaciale (Ciamician e Silber [7]). — Aghetti larghi p. f. 175°.

1) Kalle & C.° Berl. Ber. 20, 123 P.
2) Acc. L. R. 1885. Gazz. 16, 39. — Berl. Ber. 18, 1763.
3) Acc. L. M. [3] XVIII (1883-84). — Gazz. 11, 31. Berl. Ber. 17, 553.
4) Acc. L. M. [3] XV (1882-83). Gazz. 13, 403. — Berl. Ber. 16, 2388.
5) Acc. L. M. [3] XII (1881-82). Gazz. [illegible]
6) Acc. L. M. [3] XV (1882-83). Gazz. 13, 455. — Berl. Ber. 16, 2348.
7) Acc. L. R. III (1887). — Gazz. 17, 262, 269. — Berl. Ber. 20, 2594.
8) Acc. L. M. [3] XII (1881-1882) Gazz. 12, 28. — Berl. Ber. 15, 1082.
9) Acc. L. M. [3] XVIII (1883-1884) Gazz. 14, 162. — Berl. Ber. 17, 1150.
10) Bell Ber. [illegible] pag. 1810.

	NITRODERIVATI
NO_2, NO_2	**Dinitropirrolo** $C_4 H_2 (NO_2)_2 NH$ 1. Dal pirrilmetilchetone con acido nitrico fumante (Ciamician e Silber [1]). 2. Dall'acido α-carbopirrolico con acido nitrico fumante (Ciamician e Silber [2]). — Lamine senza colore o prismi trimetrici, p. f. 152°. **Dinitropirrolo** $C_4 H_2 (NO_2)_2 NH$ (?) Dall'acido α-carbopirrolico con acido nitrico fumante (Ciamician e Silber [2]). — Aghi, p. f. 173°.
NO_2, $COCH_3$	**β-Nitropirrilmetilchetone** $C_4 H_2 (\overset{\beta}{NO_2}) (\overset{\alpha}{COCH_3}) NH$ o $C_4 H_2 (\overset{\beta'}{NO_2}) (\overset{\alpha}{COCH_3}) NH$ Dal pirrilmetilchetone con acido nitrico fumante (Ciamician e Silber [1]). — Aghetti senza colore o tavolette tricline, p. f. 197°. Ha reazione neutra. **α-Nitropirrilmetilchetone** $C_4 H_2 (\overset{\alpha'}{NO_2}) (\overset{\alpha}{COCH_3}) NH$ (?) Dal pirrilmetilchetone con acido nitrico fumante (Ciamician e Silber [1]). — Aghi lunghi p. f. 156°. Ha reazione acida. **β-Amidopirrilmetilchetone** $C_4 H_2 (\overset{\beta \text{ o } \beta'}{NH_2}) (\overset{\alpha}{COCH_3}) NH$ Dal β-nitropirrilmetilchetone con HCl e Sn (Ciamician e Silber [1]).— Il cloroplatinato $[(C_6 H_6 NONH_2 . H Cl)_2 Pt Cl_4]$ forma aghi gialli.
NO_2, NO_2, $COCH_3$	**Dinitropirrilmetilchetone** $C_4 H (\overset{\beta}{NO_2}) (\overset{\alpha'}{NO_2}) (\overset{\alpha}{COCH_3}) NH$ o $C_4 H (\overset{\beta_1}{NO_2}) (\overset{\alpha_1}{NO_2}) (\overset{\alpha}{COCH_3}) NH$ Dal pirrilmetilchetone con acido nitrico fumante (Ciamician e Silber [1]). — Aghi leggermente gialli, contengono una mol. di $H_2 O$, p. f. 106-107°; deacquificati fondono a 114°.
NO_2, $COCH_3$, $COCH_3$	**Nitro-$\alpha\alpha'$-diacetilpirrolo** $C_4 H\overset{\beta}{NO_2} (\overset{\alpha\alpha'}{COCH_3})_2 NH$ Dal pirrilendimetildichetone con acido nitrico fumante (Ciamician e Silber [2]). — Aghi lunghi senza colore p. f. 149°.
NO_2, COOH	**Acido nitrocarbopirrolico** $C_4 H_2 (NO_2) (\overset{\alpha}{COOH}) NH$ Dalla sua anidride con potassa (Ciamician e Danesi [3]). — Piccoli aghetti leggermente colorati in giallo che contengono una mol. di OH_2, deacquificati fondono a 144-146°. **Anidride** (Dinitropirocolla) $C_{10} H_4 (NO_2)_2 N_2 O_2$ Dalla pirocolla con acido nitrico fumante (Ciamician e Danesi [3]). — Piccoli prismi o paglieite gialle.

1) Acc. L. M. [4], I, (1884-1885). — Gazz. 15, 315. — Berl. Ber. 18, 1456.
2) Acc. L. R. II, (1886). — Gazz. 16, 347. — Berl. Ber. 19, 1078.
3) Acc. L. M. [3], XII, (1881-1882). — Gazz. 12, 28. — Berl. Ber. 15, 1082.

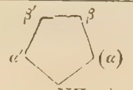
TABELLA III.

	AZOCOMPOSTI (¹)
$N = N - C_6 H_5$	**Pirrolazobenzolo** $(C_4 H_3 NH) . \overbrace{N = \overset{\alpha}{N} . C_6 H_5}$ Dal pirrolo con $C_6 H_5 N_2 Cl$ in soluzione acida. — Aghi gialli p. f. 62°. Forma un cloroplatinato.
$N = \underset{1}{N} - C_6 H_4 \underset{4}{CH_3}$	**Pirrolazoparatoluene** $(C_4 H_3 NH) . \overbrace{N = \underset{1}{\overset{\alpha}{N}} . C_6 H_4 \underset{4}{CH_3}}$ Dal pirrolo con $C_6 H_4 \overset{4}{CH_3} . \overset{1}{N_2} . Cl$. — Aghi gialli p. f. 82°.
$N = N - \underset{\alpha}{C_{10} H_7}$	**Pirrol-α-azo-α-naftalina** $(C_4 H_3 NH) . \overbrace{N = \overset{\alpha}{N} . \underset{\alpha}{C_{10}} H_7}$ Dal pirrolo con cloruro di diazo-α-naftalina. — Pagliette ranciate con riflessi violetti, p. f. 103°.
$N = N - \underset{\beta}{C_{10} H_7}$	**Pirrol-α-azo-β-naftalina** $(C_4 H_3 NH) . \overbrace{N = \overset{\alpha}{N} . \underset{\beta}{C_{10}} H_7}$ Dal pirrolo in soluzione alcoolica con cloruro di diazo-β-naftalina in soluzione cloridrica. — Pagliette giallo verdastre, p. f. 101°.
$N = \underset{1}{N} - C_6 H_4 . \underset{4}{N} (CH_3)_2$	**Pirrolazo-p-dimetilamidobenzolo** $(C_4 H_3 NH) . \overbrace{N = \underset{1}{\overset{\alpha}{N}} . C_6 H_4 \underset{4}{N} (CH_3)_2}$ Dal pirrolo con diazo-p-dimetilamidobenzolo in soluzione alcalina. — Pagliette verdi, p. f. 159°. Forma con gli acidi due serie di sali colorati in verde, e dà un cloroplatinato.
$N = N . C_6 H_5 , C_6 H_5$	**n-Fenilpirrolazobenzolo** $[C_4 H_3 N \cdot \overset{n}{C_6} H_5] . \overbrace{N = \overset{\alpha}{N} . C_6 H_5}$ Dall'n-fenilpirrolo con $C_6 H_5 N_2 Cl$. — Prismi bruni con riflessi azzurri o aghi ranciati, p. f. 117°. Si scioglie nell'acido solforico concentrato con colorazione rosso-violetta.
$N = \underset{1}{N} . C_6 H_4 \underset{4}{CH_3} , C_2 H_5$	**n-Etilpirrolazo-p-toluene** $[C_4 H_3 N\overset{n}{C_2} H_5] . \overbrace{N = \underset{1}{\overset{\alpha}{N}} . C_6 H_4 . \underset{4}{CH_3}}$ Dall'n-etilpirrolo con cloruro di p-diazotoluene. — Prismi rossi, p. f. 62°.
$N = N - C_{10} H_7 , C_2 H_5$	**n-Etilpirrol-α-azo-β-naftalina** $[C_4 H_3 NC_2 H_5] . N = N . C_{10} H_7$

	1. Dal pirrolo con cloruro di diazobenzolo in soluzione alcalina. 2. Dal pirrolazobenzolo con cloruro di diazobenzolo. 3. Dall'acido α-carbopirrolico con cloruro di diazobenzolo in soluzione alcalina. — [illegible] lini, p. f. 131°. Si scioglie nell'acido solforico concentrato con colorazione azzurra intensa.
$\underset{1}{N_2} C_6 H_4 \underset{4}{CH_3}$, $\underset{1}{N_2} C_6 H_4 \underset{4}{CH_3}$	**Pirroldisazodi-p-toluene** $\overbrace{C_6 H_4 \underset{4}{CH_3} \underset{1}{N} = N}^{\alpha 1} . [C_4 H_2 NH] . \overbrace{N = \underset{1}{N} . C_6 H_4 . \underset{4}{CH_3}}^{\alpha}$ 1. Dal pirrolo con cloruro di diazo-p-toluene in soluzione alcalina. 2. Dall'acido α-carbopirrolico con cloruro di diazo-p-toluene in soluzione alcalina. — Prismi rossi con riflessi azzurri, p. f. 179°, si scioglie nell'acido solforico concentrato con colorazione azzurra intensa.
$N_2 . \underset{\beta}{C_{10}} H_7$, $N_2 . \underset{\beta}{C_{10}} H_7$	**Pirrol-αα-disazodi-β-naftalina** $\overbrace{C_{10} H_7 \underset{\beta}{.} N = N}^{\alpha} . [C_4 H_2 NH] . \overbrace{N = \underset{\beta}{N} . C_{10} H_7}^{\alpha'}$ Dal pirrolo con cloruro di diazo-β-naftalina in soluzione alcalina. — Pagliette color rame, p. f. 228°.
$N_2 . \underset{\alpha}{C_{10}} H_7$, $N_2 . \underset{\alpha}{C_{10}} H_7$	**Pirrol-αα-disazodi-α-naftalina** $\overbrace{C_{10} H_7 \underset{\alpha}{.} N = N}^{\alpha} . [C_4 H_2 NH] . \overbrace{N = \underset{\alpha}{N} . C_{10} H_7}^{\alpha'}$ Dal pirrolo con cloruro di diazo-α-naftalina in presenza di un alcali. — Aghetti colorati in verde metallico.
$N_2 . C_6 H_5$, $N_2 . \underset{\beta}{C_{10}} H_7$	**Pirrol-αα-disazobenzol-β-naftalina** $\overbrace{C_6 H_5 - N = N}^{\alpha} . [C_4 H_2 NH] . \overbrace{N = \underset{\beta}{N} . C_{10} H_7}^{\alpha'}$ 1. Dal pirrolazobenzolo con cloruro di diazo-β-naftalina in presenza di $Na_2 CO_3$. 2. Dalla pirrolazo-β-naftalina con cloruro di diazobenzolo in presenza di soda. — Pagliette rosso mattone con riflessi azzurri, p. f. 151°.
$N_2 . C_6 H_5$, $N_2 . C_6 H_5$, CH_3	**n-Metilpirroldisazodibenzolo** $\overbrace{C_6 H_5 . N = N}^{\alpha} . [C_4 H_2 N\overset{n}{C}H_3] . \overbrace{N = N . C_6 H_5}^{\alpha'}$ Dal pirroldisazobenzolo con joduro metilico e soda in soluzione alcoolica. — Pagliette rosse, p. f. 196°.
$\underset{1}{N_2} . C_6 H_4 . \underset{4}{CH_3}$, $\underset{1}{N_2} . C_6 H_4 . \underset{4}{CH_3}$, $C_2 H_5$	**n-Etilpirroldisazodiparatoluene** $\overbrace{C_6 H_4 \underset{4}{CH_3} . \underset{1}{N} = N}^{\alpha} . [C_4 H_2 NC_2 \overset{n}{H_5}] . \overbrace{N = \underset{1}{N} . C_6 H_4 \underset{4}{CH_3}}^{\alpha'}$ 1. Dal pirroldisazodi-p-toluene con joduro etilico e soda in soluzione alcalina. 2. Dall'n-etilpirrolo con cloruro di diazo-p-toluene. — Aghi azzurri, p. f. 180°.

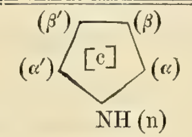
(1) O. Fischer e E. Hepp, Berl. Ber. 1886, pag. 2251.

Tabella III.

 NH (n)	AZOCOMPOSTI (1)
$N=N-C_6H_5$	**Pirrolazobenzolo** $(C_4H_3NH).\overbrace{N=N.C_6H_5}^{\alpha}$ Dal pirrolo con $C_6H_5N_2Cl$ in soluzione acida. — Aghi gialli p. f. 62°. Forma un cloroplatinato.
$N=\underset{1}{N}-C_6H_4\underset{4}{CH_3}$	**Pirrolazoparatoluene** $(C_4H_3NH).\overbrace{N=\underset{1}{N}.C_6H_4\underset{4}{CH_3}}^{\alpha}$ Dal pirrolo con $C_6H_4\overset{4}{CH_3}.\overset{1}{N_2}.Cl$. — Aghi gialli p. f. 82°.
$N=N-\underset{\alpha}{C_{10}H_7}$	**Pirrol-α-azo-α-naftalina** $(C_4H_3NH).\overbrace{N=N.\underset{\alpha}{C_{10}H_7}}^{\alpha}$ Dal pirrolo con cloruro di diazo-α-naftalina. — Pagliette ranciate con riflessi violetti, p. f. 103°.
$N=N-\underset{\beta}{C_{10}H_7}$	**Pirrol-α-azo-β-naftalina** $(C_4H_3NH).\overbrace{N=N.\underset{\beta}{C_{10}H_7}}^{\alpha}$ Dal pirrolo in soluzione alcoolica con cloruro di diazo-β-naftalina in soluzione cloridrica. — Pagliette giallo verdastre, p. f. 101°.
$N=\underset{1}{N}-C_6H_4.\underset{4}{N(CH_3)_2}$	**Pirrolazo-p-dimetilamidobenzolo** $(C_4H_3NH).\overbrace{N=\underset{1}{N}.C_6H_4\underset{4}{N(CH_3)_2}}^{\alpha}$ Dal pirrolo con diazo-p-dimetilamidobenzolo in soluzione alcalina. — Pagliette verdi, p. f. 159°. Forma con gli acidi due serie di sali colorati in verde, e dà un cloroplatinato.
$N=N.C_6H_5,\ C_6H_5$	**n-Fenilpirrolazobenzolo** $[C_4H_3N\cdot\overset{n}{C_6}H_5].\overbrace{N=N.C_6H_5}^{\alpha}$ Dall'n-fenilpirrolo con $C_6H_5N_2Cl$. — Prismi bruni con riflessi azzurri o aghi ranciati, p. f. 117°. Si scioglie nell'acido solforico concentrato con colorazione rosso-violetta.
$N=\underset{1}{N}.C_6H_4\underset{4}{CH_3},\ C_2H_5$	**n-Etilpirrolazo-p-toluene** $[C_4H_3N\overset{n}{C_2}H_5].\overbrace{N=\underset{1}{N}.C_6H_4.\underset{4}{CH_3}}^{\alpha}$ Dall'n-etilpirrolo con cloruro di p-diazotoluene. — Prismi rossi, p. f. 62°.
$N=N-C_{10}H_7,\ C_2H_5$	**n-Etilpirrol-α-azo-β-naftalina** $[C_4H_3N\overset{n}{C_2}H_5].\overbrace{N=N.C_{10}H_7}^{\alpha}$ Dall'n-etilpirrolo con cloruro di diazo-β-naftalina. — Tavole rosse, p. f. 74°.
$N_2.C_6H_5,\ N_2.C_6H_5$	**Pirroldisazodibenzolo** $C_6H_5.N=N.[C_4H_2NH].N=N.C_6H_5$ 1. Dal pirrolo con cloruro di diazobenzolo in soluzione alcalina. 2. Dal pirrolazobenzolo con cloruro di diazobenzolo. 3. Dall'acido α-carbopirrolico con cloruro di diazobenzolo in soluzione alcalina. — Fiocchi rossi, cristallini, p. f. 131°. Si scioglie nell'acido solforico concentrato con colorazione azzurra intensa.
$\underset{1}{N_2}C_6H_4\underset{4}{CH_3},\ \underset{1}{N_2}C_6H_4\underset{4}{CH_3}$	**Pirroldisazodi-p-toluene** $\overbrace{C_6H_4\underset{4}{CH_3}\underset{1}{N}=N}^{\alpha 1}.[C_4H_2NH].\overbrace{N=\underset{1}{N}.C_6H_4.\underset{4}{CH_3}}^{\alpha}$ 1. Dal pirrolo con cloruro di diazo-p-toluene in soluzione alcalina. 2. Dall'acido α-carbopirrolico con cloruro di diazo-p-toluene in soluzione alcalina. — Prismi rossi con riflessi azzurri, p. f. 179°, si scioglie nell'acido solforico concentrato con colorazione azzurra intensa.
$N_2.\underset{\beta}{C_{10}H_7},\ N_2.\underset{\beta}{C_{10}H_7}$	**Pirrol-αα-disazodi-β-naftalina** $\overbrace{\underset{\beta}{C_{10}H_7}.N=N}^{\alpha}.[C_4H_2NH].\overbrace{N=N.\underset{\beta}{C_{10}H_7}}^{\alpha'}$ Dal pirrolo con cloruro di diazo-β-naftalina in soluzione alcalina. — Pagliette color rame, p. f. 228°.
$N_2.\underset{\alpha}{C_{10}H_7},\ N_2.\underset{\alpha}{C_{10}H_7}$	**Pirrol-αα-disazodi-α-naftalina** $\overbrace{\underset{\alpha}{C_{10}H_7}.N=N}^{\alpha}.[C_4H_2NH].\overbrace{N=N.\underset{\alpha}{C_{10}H_7}}^{\alpha'}$ Dal pirrolo con cloruro di diazo-α-naftalina in presenza di un alcali. — Aghetti colorati in verde metallico.
$N_2.C_6H_5,\ N_2.\underset{\beta}{C_{10}H_7}$	**Pirrol-αα-disazobenzol-β-naftalina** $\overbrace{C_6H_5-N=N}^{\alpha}.[C_4H_2NH].\overbrace{N=N.\underset{\beta}{C_{10}H_7}}^{\alpha'}$ 1. Dal pirrolazobenzolo con cloruro di diazo-β-naftalina in presenza di Na_2CO_3. 2. Dalla pirrolazo-β-naftalina con cloruro di diazobenzolo in presenza di soda. — Pagliette rosso mattone con riflessi azzurri, p. f. 151°.
$N_2.C_6H_5,\ N_2.C_6H_5,\ CH_3$	**n-Metilpirroldisazodibenzolo** $\overbrace{C_6H_5.N=N}^{\alpha}.[C_4H_2N\overset{n}{C}H_3].\overbrace{N=N.C_6H_5}^{\alpha'}$ Dal pirroldisazobenzolo con joduro metilico e soda in soluzione alcoolica. — Pagliette rosse, p. f. 196°.
$\underset{1}{N_2}.C_6H_4.\underset{4}{CH_3},\ \underset{1}{N_2}.C_6H_4.\underset{4}{CH_3},\ C_2H_5$	**n-Etilpirroldisazodiparatoluene** $\overbrace{C_6H_4\underset{4}{CH_3}.\underset{1}{N}=N}^{\alpha}.[C_4H_2N\overset{n}{C_2}H_5].\overbrace{N=\underset{1}{N}.C_6H_4\underset{4}{CH_3}}^{\alpha'}$ 1. Dal pirroldisazodi-p-toluene con joduro etilico e soda in soluzione alcalina. 2. Dall'n-etilpirrolo con cloruro di diazo-p-toluene. — Aghi azzurri, p. f. 180°.

(1) O. Fischer e E. Hepp, Berl. Ber. 1886, pag. 2251.

TABELLA IV.

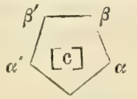
	PRODOTTI DI SOSTITUZIONE CON RADICALI ALCOOLICI		
CH_3	**n-Metilpirrolo** $C_4 H_4 N . \overset{n}{C}H_3$ 1. Dal $C_4 H_4 NK$ con joduro di metile (Ciamician e Dennstedt[1]). 2. Dal mucato di metilammina (Bell[3]). — Liquido senza colore, p. eb. 114-115° (cor.) a 747,5 mm.	**c-Metilpirroli** (Omopirroli) $C_5 H_7 N$ **α-Metilpirrolo** (?) $C_4 H_3 \overset{\alpha ?}{C}H_3 NH$ 1. Dalla frazione 140-150° dell'olio animale col potassio (Weidel e Ciamician[2]). 2. Dalla stessa frazione colla potassa (Dennstedt e Zimmermann[4]). 3. Dall'acido α-metilcarbopirrolico (Ciamician[5]). — Olio, p. eb. 142-143°.	**β-Metilpirrolo** (?) $C_4 H_3 \overset{\beta ?}{C}H_3 NH$ 1. Dalla frazione 140-150° dell'olio animale col potassio (Weidel e Ciamician[2]). 2. Dalla stessa frazione con la potassa (Dennstedt e Zimmermann[4]). 3. Dall'acido β-metilcarbopirrolico (Ciamician[5]). — Olio, p. eb. 147-148°.
$C_2 H_5$	**n-Etilpirrolo** $(C_4 H_4 N . \overset{n}{C_2} H_5)$ 1. Dal $C_4 H_4 NK$ col joduro di etile (Liubawin[6], Bell[7]). 2. Dal mucato di etilammina (Bell[8]). — Liquido senza colore, p. eb. 131°.	**β-Etilpirrolo** $C_4 H_3 (\overset{\beta ?}{C_2} H_5) NH$ Dal pirrolo con paraldeide e $Zn Cl_2$ (Dennstedt e Zimmermann[4]). — Liquido senza colore, p. eb. 163-165°.	
$C_3 H_7$ (iso)	**β-Isopropilpirrolo** $C_4 H_3 (\overset{\beta ?}{C_3} H_7) NH$ 1. Dal pirrolo con acetone e $Zn Cl_2$ (Dennstedt e Zimmermann[9]). — Liquido oleoso, p. eb. 173-175°.		
$C_3 H_5$	**n-Allilpirrolo** $C_4 H_4 N\overset{n}{C_3} H_5$ 1. Dal composto potassico del pirrolo con bromuro d'allile (Ciamician e Dennstedt[10]). — Liquido oleoso che non distilla a pressione ordinaria senza decomposizione, p. eb. 105° a 48 mm.		
$C_5 H_{11}$ (iso)	**n-Isoamilpirrolo** $C_4 H_4 N\overset{n}{C_5} H_{11}$ 1. Dal mucato di isoamilammina (Bell[3]). — Liquido senza colore, p. eb. 180-184°.		
$C_6 H_5$	**n-Fenilpirrolo** $C_4 H_4 N . \overset{n}{C_6} H_5$ 1. Dal mucato di anilina (Köttnitz[11]). 2. Dal saccarato d'anilina (Altmann[12]). 3. Dal composto potassico del pirrolo (O. Fischer e Hepp[13]). — Squamette senza colore, madreperlacee, p. f. 62°.		

	ammoniaca alcoolica (Paal [16]). — Liquido, bolle a 165° a 741 mm.	p. eb. 171°, dà un picrato in forma di pagliette rosse.
CH_3 , C_6H_5	**$\alpha\alpha'$-Metilfenilpirrolo** $C_4H_2(\overset{\alpha}{CH_3})(C_6\overset{\alpha'}{H_5})NH$ Dall'acetofenonacetone con ammoniaca alcoolica (Paal [18]). — Pagliette, p. f. 101°.	
CH_3 , CH_3 , CH_3	**n-Metil-$\alpha\alpha'$-dimetilpirrolo** $C_4H_2(\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2\overset{n}{NCH_3}$ Riscaldando l'acido dicarbonico corrispondente (Knorr [17]). — Liquido, p. eb. 173° (cor.) a 746 mm.	**c-Trimetilpirroli** $C_4H(\overset{c}{CH_3})_3NH$ Dalla frazione dell'olio animale che bolle a 170-200° col potassio (Ciamician e Dennstedt [19]). — Liquido che bolle fra 180-195°.
CH_3 , CH_3 , C_6H_5	**n-Fenil-$\alpha\alpha_1$-dimetilpirrolo** $C_4H_2(\overset{\alpha\alpha_1}{CH_3})_2\overset{n}{NC_6H_5}$ Dall'acido dicarbonico corrispondente (Knorr [17]). — Solido, p. f. 51-52°, p. eb. 252° (cor.) a 756 mm.	
CH_3 , CH_3 , C_7H_7	**n-Paratolil-$\alpha\alpha_1$-dimetilpirrolo** $C_4H_2(\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2 . \underset{1}{N} . \overbrace{C_6H_4\underset{4}{CH_3}}^{n}$ Dall'acido dicarbonico corrispondente (Knorr [20]). — Solido, p. f. 45-46°; p. eb. 255° a 774 mm.	
CH_3 , CH_3 , $\underset{\alpha}{C_{10}}H_7$	**n-α-Naftil-$\alpha\alpha_1$-dimetilpirrolo** $C_4H_2(\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2N . \overset{n}{\underset{\alpha}{C_{10}}}H_7$ Dall'acido dicarbonico corrispondente a 250° (Knorr [17]). — Solido; p. f. 123°; p. eb. 310-315°.	
CH_3 , CH_3 , $\underset{\beta}{C_{10}}H_7$	**n-β-Naftil-$\alpha\alpha_1$-dimetilpirrolo** $C_4H_2(\overset{\alpha\alpha_1}{CH_3})_2 . N . \overset{n}{\underset{\beta}{C_{10}}}H_7$ Dall'acido dicarbonico corrispondente a 260° (Knorr [17]). — Solido, p. f. 71°, p. eb. 341° a 756 mm.	
CH_3 , CH_3 , $NCH_3C_6H_5$	**n-Metilfenilamido-$\alpha\alpha_1$-dimetilpirrolo** $C_4H_2(\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2N — \overbrace{NCH_3C_6H_5}^{n}$ Dall'acido dicarbonico corrispondente (Knorr [17]). — Solido, p. f. 41°, p. eb. 310° a 753 mm.	
CH_3 , CH_3 , $C_6H_3\underset{1}{CH_3}\underset{3}{NH_2}$	**n-Metaamidotolil-$\alpha\alpha_1$-dimetilpirrolo** $C_4H_2(\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2N . \overbrace{C_6H_3 . \underset{1}{CH_3} . \underset{3}{NH_2}}^{n}$ Dall'acido dicarbonico corrispondente (Knorr [17]). — Solido, p. f. 73°, p. eb. 322° a 751 mm.	

Tabella IV.

(β') (β) (α') [c] (α) NH (n)	PRODOTTI DI SOSTITUZIONE CON RADICALI ALCOOLICI	
CH_3	**n-Metilpirrolo** $C_4H_4N.\overset{n}{CH_3}$ 1. Dal C_4H_4NK con joduro di metile (Ciamician e Dennstedt[1]). 2. Dal mucato di metilammina (Bell[3]). — Liquido senza colore, p. eb. 114-115° (cor.) a 747,5 mm.	**c-Metilpirroli** (Omopirroli) C_5H_7N *α*-**Metilpirrolo** (?) $C_4H_3\overset{\alpha ?}{CH_3}NH$ 1. Dalla frazione 140-150° dell'olio animale col potassio (Weidel e Ciamician[2]). 2. Dalla stessa frazione colla potassa (Dennstedt e Zimmermann[4]). 3. Dall'acido *α*-metilcarbopirrolico (Ciamician[5]). — Olio, p. eb. 142-143°. *β*-**Metilpirrolo** (?) $C_4H_3\overset{\beta ?}{CH_3}NH$ 1. Dalla frazione 140-150° dell'olio animale col potassio (Weidel e Ciamician[2]). 2. Dalla stessa frazione con la potassa (Dennstedt e Zimmermann[4]). 3. Dall'acido *β*-metilcarbopirrolico (Ciamician[5]). — Olio, p. eb. 147-148°.
C_2H_5	**n-Etilpirrolo** $(C_4H_4N.C_2\overset{n}{H_5})$ 1. Dal C_4H_4NK col joduro di etile (Liubawin[6], Bell[7]). 2. Dal mucato di etilammina (Bell[8]). — Liquido senza colore, p. eb. 131°.	*β*-**Etilpirrolo** $C_4H_3(\overset{\beta ?}{C_2}H_5)NH$ Dal pirrolo con paraldeide e $ZnCl_2$ (Dennstedt e Zimmermann[4]). — Liquido senza colore, p. eb. 163-165°.
C_3H_7 (iso)	*β*-**Isopropilpirrolo** $C_4H_3(\overset{\beta ?}{C_3}H_7)NH$ 1. Dal pirrolo con acetone e $ZnCl_2$ (Dennstedt e Zimmermann[9]). — Liquido oleoso, p. eb. 173-175°.	
C_3H_5	**n-Allilpirrolo** $C_4H_4N\overset{n}{C_3}H_5$ 1. Dal composto potassico del pirrolo con bromuro d'allile (Ciamician e Dennstedt[10]). — Liquido oleoso che non distilla a pressione ordinaria senza decomposizione, p. eb. 105° a 48 mm.	
C_5H_{11} (iso)	**n-Isoamilpirrolo** $C_4H_4N\overset{n}{C_5}H_{11}$ 1. Dal mucato di isoamilammina (Bell[3]). — Liquido senza colore, p. eb. 180-184°.	
C_6H_5	**n-Fenilpirrolo** $C_4H_4N.\overset{n}{C_6}H_5$ 1. Dal mucato di anilina (Köttnitz[11]). 2. Dal saccarato d'anilina (Altmann[12]). 3. *Dal composto potassico del pirrolo* (O. Fischer e Hepp[13]). — Squamette senza colore, madreperlacee, p. f. 62°.	
[illegible]	[illegible] 1. Dall'olio animale (Weidel e Ciamician [illegible]). 2. Dai suoi acidi mono- e dicarbonico (Knorr[15]). 3. Dall'acetonilacetone con ammoniaca alcoolica (Paal[16]). — Liquido, bolle a 165° a 741 mm.	[illegible] 1. Dall'etere di etilico del suo acido dicarbonico con potassa alcoolica o con acido solforico (Knorr[17]). — Liquido, p. eb. 171°, dà un picrato in forma di pagliette rosse.
CH_3, C_6H_5	*αα'*-**Metilfenilpirrolo** $C_4H_2(\overset{\alpha}{CH_3})(C_6\overset{\alpha'}{H_5})NH$ Dall'acetofenonacetone con ammoniaca alcoolica (Paal[18]). — Pagliette, p. f. 101°.	
CH_3, CH_3, CH_3	**n-Metil-*αα'*-dimetilpirrolo** $C_4H_2(\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2N\overset{n}{CH_3}$ Riscaldando l'acido dicarbonico corrispondente (Knorr[17]). — Liquido, p. eb. 173° (cor.) a 746 mm.	**c-Trimetilpirroli** $C_4H(\overset{c}{CH_3})_3NH$ Dalla frazione dell'olio animale che bolle a 170-200° col potassio (Ciamician e Dennstedt[19]). — Liquido che bolle fra 180-195°.
CH_3, CH_3, C_6H_5	**n-Fenil-*αα₁*-dimetilpirrolo** $C_4H_2(\overset{\alpha\alpha_1}{CH_3})_2N\overset{n}{C_6}H_5$ Dall'acido dicarbonico corrispondente (Knorr[17]). — Solido, p. f. 51-52°, p. eb. 252° (cor.) a 756 mm.	
CH_3, CH_3, C_7H_7	**n-Paratolil-*αα₁*-dimetilpirrolo** $C_4H_2(\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2.N.\overset{n}{\underset{1}{C_6}H_4\underset{4}{CH_3}}$ Dall'acido dicarbonico corrispondente (Knorr[20]). — Solido, p. f. 45-46°; p. eb. 255° a 774 mm.	
CH_3, CH_3, $\underset{\alpha}{C_{10}H_7}$	**n-*α*-Naftil-*αα₁*-dimetilpirrolo** $C_4H_2(\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2N.\overset{n}{\underset{\alpha}{C_{10}H_7}}$ Dall'acido dicarbonico corrispondente a 250° (Knorr[17]). — Solido; p. f. 123°; p. eb. 310-315°.	
CH_3, CH_3, $\underset{\beta}{C_{10}H_7}$	**n-*β*-Naftil-*αα₁*-dimetilpirrolo** $C_4H_2(\overset{\alpha\alpha_1}{CH_3})_2.N.\overset{n}{\underset{\beta}{C_{10}H_7}}$ Dall'acido dicarbonico corrispondente a 260° (Knorr[17]). — Solido, p. f. 71°, p. eb. 341° a 756 mm.	
CH_3, CH_3, $NCH_3C_6H_5$	**n-Metilfenilamido-*αα₁*-dimetilpirrolo** $C_4H_2(\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2N-\overset{n}{NCH_3C_6H_5}$ Dall'acido dicarbonico corrispondente (Knorr[17]). — Solido, p. f. 41°, p. eb. 310° a 753 mm.	
CH_3, CH_3, $C_6H_3\underset{1}{CH_3}\underset{3}{NH_2}$	**n-Metaamidotolil-*αα₁*-dimetilpirrolo** $C_4H_2(\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2N.\overset{n}{C_6H_3.\underset{1}{CH_3}.\underset{3}{NH_2}}$ Dall'acido dicarbonico corrispondente (Knorr[17]). — Solido, p. f. 73°, p. eb. 322° a 751 mm.	

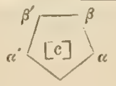
Tabella IV (continuazione).

 NH n	PRODOTTI DI SOSTITUZIONE CON RADICALI ALCOOLICI
CH_3, CH_3, OH	**n-Ossi-αα'-dimetilpirrolo** $C_4H_2\overset{\alpha\alpha'}{(CH_3)_2}\overset{n}{N}OH$ Scaldando l'acido dicarbonico corrispondente a 140° (Knorr [17]). — Olio denso che non distilla senza decomporsi.
CH_3, CH_3, C_6H_4OH	**n-Ortoossifenil-αα'-dimetilpirrolo** (Orto-αα'-dimetilpirrilfenolo) $C_4H_2\overset{\alpha\alpha'}{(CH_3)_2}\overset{n}{\overbrace{N\underset{1}{C_6}H_4\underset{2}{OH}}}$ Dall'acetonilacetone con ortoamidofenolo (Paal e Schneider [21]). — Laminette, p. f. 95°. Forma colla soda concentrata il composto sodico.
CH_3, C_6H_5, C_3H_5	**n-Allil-αα'-metilfenilpirrolo** $C_4H_2\overset{\alpha}{(CH_3)}\overset{\alpha'}{(C_6H_5)}\overset{n}{N}C_3H_5$ Riscaldando l'acido monocarbonico corrispondente (Lederer e Paal [22]). — Laminette, p. f. 52°, p. eb. 277-278°.
CH_3, C_6H_5, C_6H_5	**n-Fenil-αα'-metilfenilpirrolo** $C_4H_2\overset{\alpha}{(CH_3)}\overset{\alpha'}{(C_6H_5)}\overset{n}{N}C_6H_5$ Dall'acido monocarbonico corrispondente (Lederer e Paal [22]). — Tavolette, p. f. 84°.
CH_3, C_6H_5, $C_6H_4CH_3$	**n-Ortotolil-αα'-metilfenilpirrolo** $C_4H_2\overset{\alpha}{(CH_3)}\overset{\alpha'}{(C_6H_5)}\overset{n}{\overbrace{N\underset{1}{C_6}H_4\underset{2}{CH_3}}}$ Dall'acido monocarbonico corrispondente (Lederer e Paal [22]). — Cristalli, p. f. 44°, p. eb. 325-328°.
CH_3, C_6H_5, $C_6H_4CH_3$	**n-Paratolil-αα'-metilfenilpirrolo** $C_4H_2\overset{\alpha}{(CH_3)}\overset{\alpha'}{(C_6H_5)}\overset{n}{\overbrace{N\underset{1}{C_6}H_4\underset{4}{CH_3}}}$ Dall'acido monocarbonico corrispondente (Lederer e Paal [22]). — Aghi o tavolette, p. f. 91°, bolle sopra 350°.
CH_3, C_6H_5, $\underset{\alpha}{C_{10}}H_7$	**n-α-Naftil-αα'-metilfenilpirrolo** $C_4H_2\overset{\alpha}{(CH_3)}\overset{\alpha'}{(C_6H_5)}\overset{n}{N}\underset{\alpha}{C_{10}}H_7$ Dall'acido monocarbonico corrispondente (Lederer e Paal [22]). — Pagliette, p. f. 74°, bolle sopra 360°.
CH_3, C_6H_5, $C_{10}H_7$	n-β-Naftil-αα'-metilfenilpirrolo $C_4H_2(CH_3)(C_6H_5)NC_{10}H_7$

	di H_2O, p. f. 125-126°. Forma un cloroplatinato.
CH_3, CH_3, $C_3H_6N \cdot C_4H_2\overset{\alpha\alpha'}{(CH_3)_2}$	**n-Trimetilen-$\alpha\alpha'$-tetrametildipirrolo** $C_4H_2\overset{\alpha\alpha'}{(CH_3)_2}N \cdot C_3\overset{n}{H_6} \cdot N \cdot C_4H_2\overset{\alpha\alpha_1}{(CH_3)_2}$ Dall'acetonilacetone con trimetilendiammina (Paal e Schneider [23]). — P. f. 76-77°. Forma in soluzione cloridrica un cloroplatinato.
CH_3, CH_3, $(C_6\underset{p}{H_4})_2NC_4H_2\overset{\alpha\alpha'}{(CH_3)_2}$	**n-Paradifenilen-$\alpha\alpha'$-tetrametildipirrolo** $(C_4H_2\overset{\alpha\alpha'}{(CH_3)_2}N)_2(C_6\overset{n}{\underset{p}{H_4}})_2$ Dall'acetonilacetone con benzidina (Paal e Schneider [23]). — Tavolette senza colore.

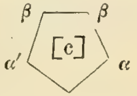
1) Acc. L. M. [3], XIX (1883-1884). — Gaz. 15, 9. — Berl. Ber. 17, 2944.
2) Berl. Ber. 1880, pag. 65.
3) Berl. Ber. 1877, pag. 1861.
4) Berl. Ber. 1886, pag. 2189.
5) Acc. L. T. [3] V (1881). — Gazz. 11, pag. 226. — Berl. Ber. 14, 1053.
6) Berl. Ber. 1869, pag. 99.
7) Berl. Ber. 1878, pag. 1810.
8) Berl. Ber. 1876, pag. 935.
9) Berl. Ber. 1887, pag. 850.
10) Acc. L. M. [3] XII (1881-1882). — Gazz. 13, pag. 14. — Berl. Ber. 15, pag. 2579.
11) Journal für practische Chemie [2] 6, pag. 136.
12) Berl. Ber. 1881, pag. 933.
13) Berl. Ber. 1886, pag. 2256.
14) Acc. L. R. III (1887). — Gazz. 17, pag. 134. — Berl. Ber. 20, pag. 1368.
15) Berl. Ber. 1885, pag. 1558.
16) Berl. Ber. 1885, pag. 2251.
17) L. Ann. 236, pag. 326.
18) Berl. Ber. 1885, pag. 367.
19) R. Acc. L. T. [3] V (1881). — Gazz. 11, 336. — Berl. Ber. 14, pag. 1338.
20) Berl. Ber. 1885, pag. 299.
21) Berl. Ber. 1886, pag. 558.
22) Berl. Ber. 1885, pag. 2591.
23) Berl. Ber. 1886, pag. 3156.

TABELLA IV (continuazione).

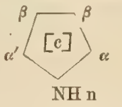
	PRODOTTI DI SOSTITUZIONE CON RADICALI ALCOOLICI
CH_3, CH_3, OH	**n-Ossi-αα'-dimetilpirrolo** $C_4H_2\overset{\alpha\alpha'}{(CH_3)_2}\overset{n}{N}OH$ Scaldando l'acido dicarbonico corrispondente a 140° (Knorr [17]). — Olio denso che non distilla senza decomporsi.
CH_3, CH_3, C_6H_4OH	**n-Ortoossifenil-αα'-dimetilpirrolo** (Orto-αα'-dimetilpirrilfenolo) $C_4H_2\overset{\alpha\alpha'}{(CH_3)_2}\overset{n}{N}\underset{1}{C_6H_4}\underset{2}{OH}$ Dall'acetonilacetone con ortoamidofenolo (Paal e Schneider [21]). — Laminette, p. f. 95°. Forma colla soda concentrata il composto sodico.
CH_3, C_6H_5, C_3H_5	**n-Allil-αα'-metilfenilpirrolo** $C_4H_2\overset{\alpha}{(CH_3)}\overset{\alpha'}{(C_6H_5)}\overset{n}{N}C_3H_5$ Riscaldando l'acido monocarbonico corrispondente (Lederer e Paal [22]). — Laminette, p. f. 52°, p. eb. 277-278°.
CH_3, C_6H_5, C_6H_5	**n-Fenil-αα'-metilfenilpirrolo** $C_4H_2\overset{\alpha}{(CH_3)}\overset{\alpha'}{(C_6H_5)}\overset{n}{N}C_6H_5$ Dall'acido monocarbonico corrispondente (Lederer e Paal [22]). — Tavolette, p. f. 84°.
CH_3, C_6H_5, $C_6H_4CH_3$	**n-Ortotolil-αα'-metilfenilpirrolo** $C_4H_2\overset{\alpha}{(CH_3)}\overset{\alpha'}{(C_6H_5)}\overset{n}{N}\underset{1}{C_6H_4}\underset{2}{CH_3}$ Dall'acido monocarbonico corrispondente (Lederer e Paal [22]). — Cristalli, p. f. 44°, p. eb. 325-328°.
CH_3, C_6H_5, $C_6H_4CH_3$	**n-Paratolil-αα'-metilfenilpirrolo** $C_4H_2\overset{\alpha}{(CH_3)}\overset{\alpha'}{(C_6H_5)}\overset{n}{N}\underset{1}{C_6H_4}\underset{4}{CH_3}$ Dall'acido monocarbonico corrispondente (Lederer e Paal [22]). — Aghi o tavolette, p. f. 91°, bolle sopra 350°.
CH_3, C_6H_5, $\underset{\alpha}{C_{10}}H_7$	**n-α-Naftil-αα'-metilfenilpirrolo** $C_4H_2\overset{\alpha}{(CH_3)}\overset{\alpha'}{(C_6H_5)}\overset{n}{N}\underset{\alpha}{C_{10}}H_7$ Dall'acido monocarbonico corrispondente (Lederer e Paal [23]). — Pagliette, p. f. 74°, bolle sopra 360°.
CH_3, C_6H_5, $\underset{\beta}{C_{10}}H_7$	**n-β-Naftil-αα'-metilfenilpirrolo** $C_4H_2\overset{\alpha}{(CH_3)}\overset{\alpha'}{(C_6H_5)}\overset{n}{N}\underset{\beta}{C_{10}}H_7$ Dall'acido monocarbonico corrispondente (Lederer e Paal [23]). — Aghetti sottili, p. f. 52°.
CH_3, CH_3, $C_2H_4NC_4H_2\overset{\alpha\alpha'}{(CH_3)_2}$	**n-Etilen-αα'-tetrametildipirrolo** $C_4H_2\overset{\alpha\alpha'}{(CH_3)_2}N\,.\,\overset{n}{CH_2\,.\,CH_2}\,.\,N\,.\,C_4H_2\overset{\alpha\alpha'}{(CH_3)_2}$ Dall'acetonilacetone con etilendiammina (Paal e Schneider [23]). — Pagliette madreperlacee che cristallizzano con 4 mol. di H_2O, p. f. 125-126°. Forma un cloroplatinato.
CH_3, CH_3, $C_3H_6N\,.\,C_4H_2\overset{\alpha\alpha'}{(CH_3)_2}$	**n-Trimetilen-αα'-tetrametildipirrolo** $C_4H_2\overset{\alpha\alpha'}{(CH_3)_2}N\,.\,\overset{n}{C_3H_6}\,.\,N\,.\,C_4H_2\overset{\alpha\alpha_1}{(CH_3)_2}$ Dall'acetonilacetone con trimetilendiammina (Paal e Schneider [23]). — P. f. 76-77°. Forma in soluzione cloridrica un cloroplatinato.
CH_3, CH_3, $\underset{p}{(C_6H_4)_2}NC_4H_2\overset{\alpha\alpha'}{(CH_3)_2}$	**n-Paradifenilen-αα'-tetrametildipirrolo** $(C_4H_2\overset{\alpha\alpha'}{(CH_3)_2}N)_2\underset{p}{\overset{n}{(C_6H_4)_2}}$ Dall'acetonilacetone con benzidina (Paal e Schneider [23]). — Tavolette senza colore.

1) Acc. L. M. [3], XIX (1883-1884). — Gaz. 15, 9. — Berl. Ber. 17, 2944.
2) Berl. Ber. 1880, pag. 65.
3) Berl. Ber. 1877, pag. 1861.
4) Berl. Ber. 1886, pag. 2189.
5) Acc. L. T. [3] V (1881). — Gazz. 11, pag. 226. — Berl. Ber. 14, 1053.
6) Berl. Ber. 1869, pag. 99.
7) Berl. Ber. 1878, pag. 1810.
8) Berl. Ber. 1876, pag. 935.
9) Berl. Ber. 1887, pag. 850.
10) Acc. L. M. [3] XII (1881-1882). — Gazz. 13, pag. 14. — Berl. Ber. 15, pag. 2579.
11) Journal für practische Chemie [2] 6, pag. 136.
12) Berl. Ber. 1881, pag. 933.
13) Berl. Ber. 1886, pag. 2256.
14) Acc. L. R. III (1887). — Gazz. 17, pag. 134. — Berl. Ber. 20, pag. 1368.
15) Berl. Ber. 1885, pag. 1558.
16) Berl. Ber. 1885, pag. 2251.
17) L. Ann. 236, pag. 326.
18) Berl. Ber. 1885, pag. 367.
19) R. Acc. L. T. [3] V (1881). — Gazz. 11, 336. — Berl. Ber. 14, pag. 1338.
20) Berl. Ber. 1885, pag. 299.
21) Berl. Ber. 1886, pag. 558.
22) Berl. Ber. 1885, pag. 2591.
23) Berl. Ber. 1886, pag. 3156.

TABELLA V.

 β, β, α', [c], α, NH n	ACIDI CARBOSSILICI	
COOH	**Acido α-carbopirrolico** $C_4 H_3 (C\overset{\alpha}{O}OH) NH$ 1. Dal mucato ammonico in forma dell'amide (Schwanert [1]). 2. Dal C_4H_4NK con anidride carbonica (Ciamician e Silber [2]). 3. Dal pirrolo con carbonato ammonico o bicarbonato sodico (Ciamician e Silber [3]). 4. Dal pirrolo con tetracloruro di carbonio e potassa (Ciamician e Silber [2]). 5. Dal pirroilpirrolo con potassa (Ciamician e Magnaghi [4]). 6. Dall'α-metilpirrolo con potassa fondente (Ciamician [5]). 7. Dall'α-acetilpirrolo con potassa fondente (Ciamician [6]). — Pagliette o prismi monoclini senza colore che all'aria diventano grigi, p. f. 192°. **Etere metilico** $C_4 H_3 (CO\overset{\alpha}{O}CH_3) NH$ Dal sale argentico dell'acido con joduro metilico (Ciamician e Silber [3]). — Aghi o prismi appiattiti, p. f. 73°. **Etere etilico** $C_4 H_3 (CO\overset{\alpha}{O}C_2 H_5) NH$ Dal sale argentico dell'acido con joduro etilico (Ciamician e Silber [3]). — P. f. 39°, p. eb. 230-232°. **Amide** $C_4 H_3 (CO\overset{\alpha}{N}H_2) NH$ 1. Dal mucato ammonico (Schwanert [1]). 2. Dalla pirocolla con ammoniaca alcoolica (Ciamician e Weidel [8]). — Pagliette monocline p. f. 176°,5 (cor.). **Imminanidride** (pirocolla) $C_{10} H_6 N_2 O_2 = C_4 H_3 N — CO$ / $CO — NH_3 C_4$ 1. Distillando la gelatina pura (Ciamician e Weidel [8]). 2. Riscaldando l'acido con anidride acetica (Ciamician e Silber [9]). — Pagliette o tavole monocline senza colore, p. f. 268-269°.	**Acido β-carbopirrolico** $C_4 H_3 (C\overset{\beta}{O}OH) NH$ 1. Dal β-metilpirrolo con potassa fondente (Ciamician [5]). 2. Dal β-isopropilpirroló con la potassa fondente (Dennstedt e Zimmermann [7]). — Solido p. f. 166°. **Etere metilico** $C_4 H_3 (CO\overset{\alpha}{O}CH_3) NH$ Dal sale argentico con joduro di metile (Dennstedt e Zimmermann [7]). — Aghi o laminette senza colore, p. f. 129.
CO . COOH	**Acido pirrigliossilico** (pirroilformico, pirrolchetoncarbonico) $C_4 H_3 (COC\overset{\alpha}{O}OH) NH$ Ossidando il pirrilmetilchetone con permanganato potassico (Ciamician e Dennstedt [10]). — Aghetti che contengono una mol. di $H_2 O$, p. f. 74-76°; la sostanza anidra forma aghi finissimi gialli p. f. 113-115°. Dà con acido cloridrico una colorazione rosso carminio.	

	Dimetilcarbopirrolamide $C_4H_3(CO\overset{\alpha}{N}HCH_3)\overset{n}{N}CH_3$ Dal mucato di metilammina (Bell [12]). — Squamette o prismi, p. f. 89-90°.	**Acido (a) omocarbopirrolico** Dal sale di piombo solubile (Ciamician [5]). — Pagliette, p. f. 169°,5.	**Acido (b) omocarbopirrolico** Dal sale piombico insolubile (Ciamician [5]). — Croste cristalline, p. f. 142°,4.
COOH , C_2H_5	**Acido n-etil-α-carbopirrolico** $C_4H_3(C\overset{\alpha}{O}OH)\overset{n}{N}C_2H_5$ Dalla dietilcarbopirrolamide con potassa alcoolica (Bell [12]). — Aghi p. f. 78°. **Dietilcarbopirrolamide** $C_4H_3(CON\overset{\alpha}{H}C_2H_5)\overset{n}{N}C_2H_5$ Dal mucato di etilammina (Bell [12]). — Prismi, p. f. 43-44°, p. eb. 269-270°.		
$CONHC_5H_{11}$, C_5H_{11}	**Diisoamilcarbopirrolamide** $C_4H_3(CON\overset{\alpha}{H}C_5H_{11})\overset{n}{N}C_5H_{11}$ Dal mucato di isoamilammina (Bell [12]). — Prismi, p. f. 77°.		
COOH , $COCH_3$	**Acido n-acetil-α-carbopirrolico** (?) $C_4H_3(C\overset{\alpha}{O}OH)NC\overset{n}{O}CH_3$ o $C_4H_3(CO.\overset{\alpha}{O}.COCH_3)NH$ 1. Dall'acido α-carbopirrolico con anidride acetica (?) (Ciamician e Silber [9]). 2. Dal sale argentico dell'acido carbopirrolico con cloruro d'acetile (Ciamician e Silber [3]). — Squamette che col riscaldamento si scindono in acido acetico e pirocolla, p. f. 75°.	**Acido α-acetil-α'-carbopirrolico** $C_4H_2(C\overset{\alpha}{O}OH)(C\overset{\alpha'}{O}CH_3)NH$ Dal suo etere metilico con potassa (Ciamician e Silber [3]). — Pagliette, p. f. 186°. **Etere metilico** $C_4H_2(C\overset{\alpha}{O}OCH_3)(C\overset{\alpha'}{O}CH_3)NH$ Dall'etere metilico dell'acido α-carbopirrolico con anidride acetica (Ciamician e Silber [3]). — Aghi lunghi, p. f. 113°.	
COOH , COOH	**Acido αα'-pirroldicarbonico** $C_4H_2(C\overset{\alpha\alpha'}{O}OH)_2NH$ 1. Dal composto potassico del pirrolo con anidride carbonica (Ciamician e Silber). 2. Dall'acido αα'-carbopirrilgliossilico con la potassa fondente (Ciamician e Silber [13]). — Croste cristalline bianche, si scompone verso 260°. **Etere monometilico** $C_4H_2(C\overset{\alpha}{O}OCH_3)(C\overset{\alpha'}{O}OH)NH$ Dal sale biargentico con joduro di metile (Ciamician e Silber [14]). — Solido, p. f. 243°. **Etere dimetilico** $C_4H_2(C\overset{\alpha\alpha'}{O}OCH_3)_2NH$ Dal sale biargentico con joduro metilico (Ciamician e Silber [13]). — Aghi lunghi, p. f. 132°. **Etere dietilico** $C_4H_2(C\overset{\alpha\alpha'}{O}OC_2H_5)_2NH$ Dal sale biargentico con joduro etilico (Ciamician e Silber [13]). — Aghi lunghi, p. f. 82°.		



ACIDI CARBOSSILICI

COOH

Acido α-carbopirrolico $C_4 H_3 (\overset{\alpha}{COOH}) NH$

1. Dal mucato ammonico in forma dell'amide (Schwanert [1]). 2. Dal C_4H_4NK con anidride carbonica (Ciamician e Silber [2]). 3. Dal pirrolo con carbonato ammonico o bicarbonato sodico (Ciamician e Silber [3]). 4. Dal pirrolo con tetracloruro di carbonio e potassa (Ciamician e Silber [2]). 5. Dal pirroilpirrolo con potassa (Ciamician e Magnaghi [4]). 6. Dall'α-metilpirrolo con potassa fondente (Ciamician [5]). 7. Dall'α-acetilpirrolo con potassa fondente (Ciamician [6]). — Pagliette o prismi monoclini senza colore che all'aria diventano grigi, p. f. 192°.

Etere metilico $C_4 H_3 (\overset{\alpha}{COOCH_3}) NH$

Dal sale argentico dell'acido con joduro metilico (Ciamician e Silber [3]). — Aghi o prismi appiattiti, p. f. 73°.

Etere etilico $C_4 H_3 (\overset{\alpha}{COOC_2 H_5}) NH$

Dal sale argentico dell'acido con joduro etilico (Ciamician e Silber [3]). — P. f. 39°, p. eb. 230-232°.

Amide $C_4 H_3 (\overset{\alpha}{CONH_2}) NH$

1. Dal mucato ammonico (Schwanert [1]). 2. Dalla pirocolla con ammoniaca alcoolica (Ciamician e Weidel [8]). — Pagliette monocline p. f. 176°,5 (cor.).

Imminanidride (pirocolla) $C_{10} H_6 N_2 O_2 = C_4 H_3 N - CO$ / $CO - NH_3 C_4$ (le due metà unite da legami verticali)

1. Distillando la gelatina pura (Ciamician e Weidel [8]). 2. Riscaldando l'acido con anidride acetica (Ciamician e Silber [9]). — Pagliette o tavole monocline senza colore, p. f. 268-269°.

Acido β-carbopirrolico $C_4 H_3 (\overset{\beta}{COOH}) NH$

1. Dal β-metilpirrolo con potassa fondente (Ciamician [5]). 2. Dal β-isopropilpirrolo con la potassa fondente (Dennstedt e Zimmermann [7]). — Solido p. f. 166°.

Etere metilico $C_4 H_3 (\overset{\alpha}{COOCH_3}) NH$

Dal sale argentico con joduro di metile (Dennstedt e Zimmermann [7]). — Aghi o laminette senza colore, p. f. 129.

CO . COOH

Acido pirrigliossilico (pirroilformico, pirrolchetoncarbonico) $C_4 H_3 (CO\overset{\alpha}{CO}OH) NH$

Ossidando il pirrilmetilchetone con permanganato potassico (Ciamician e Dennstedt [10]). — *Aghetti che contengono una mol. di $H_2 O$, p. f. 74-76°; la sostanza anidra forma aghi finissimi gialli p. f. 113-115°. Dà con acido cloridrico una colorazione rosso carminio.*

Etere metilico *$C_4 H_3 (CO . \overset{\alpha}{CO}OCH_3) NH$*

Dal sale argentico dell'acido con joduro di metile (Ciamician e Dennstedt [11]). — *Tavole monocline, p. f. 70-72°, p. eb. circa 285°.*

COOH . CH

Acido n-metil-α-carbopirrolico $C_4 H_3 (COOH) NCH_3$

Dalla dimetilcarbopirrolamide con potassa alcoolica (Bell [12]). — Solido, p. f. 135°.

Dimetilcarbopirrolamide $C_4 H_3 (CON\overset{\alpha}{H}CH_3) N\overset{n}{C}H_3$

Dal mucato di metilammina (Bell [12]). — Squamette o prismi, p. f. 89-90°.

Acidi c-metil-α-carbopirrolici (?) $C_4H_2(CH_3)(COOH)NH$

Dal miscuglio dei composti potassici dei due c-metilpirroli con anidride carbonica (Ciamician [5]).

Acido (a) omocarbopirrolico

Dal sale di piombo solubile (Ciamician [5]). — Pagliette, p. f. 169°,5.

Acido (b) omocarbopirrolico

Dal sale piombico insolubile (Ciamician [5]). — Croste cristalline, p. f. 142°,4.

COOH, $C_2 H_5$

Acido n-etil-α-carbopirrolico $C_4 H_3 (\overset{\alpha}{COOH}) N\overset{n}{C_2} H_5$

Dalla dietilcarbopirrolamide con potassa alcoolica (Bell [12]). — Aghi p. f. 78°.

Dietilcarbopirrolamide $C_4 H_3 (CON\overset{\alpha}{H}C_2 H_5) N\overset{n}{C_2} H_5$

Dal mucato di etilammina (Bell [12]). — Prismi, p. f. 43-44°, p. eb. 269-270°.

$CONHC_5 H_{11}$, $C_5 H_{11}$

Diisoamilcarbopirrolamide $C_4 H_3 (CON\overset{\alpha}{H}C_5 H_{11}) N\overset{n}{C_5} H_{11}$

Dal mucato di isoamilammina (Bell [12]). — Prismi, p. f. 77°.

COOH, $COCH_3$

Acido n-acetil-α-carbopirrolico (?)

$C_4 H_3 (\overset{\alpha}{COOH}) N\overset{n}{CO}CH_3$ o $C_4 H_3 (CO . \overset{\alpha}{O} . COCH_3) NH$

1. Dall'acido α-carbopirrolico con anidride acetica (?) (Ciamician e Silber [9]). 2. Dal sale argentico dell'acido carbopirrolico con cloruro d'acetile (Ciamician e Silber [3]). — Squamette che col riscaldamento si scindono in acido acetico e pirocolla, p. f. 75°.

Acido α-acetil-α'-carbopirrolico

$C_4 H_2 (\overset{\alpha}{COOH}) (\overset{\alpha'}{COCH_3}) NH$

Dal suo etere metilico con potassa (Ciamician e Silber [3]). — Pagliette, p. f. 186°.

Etere metilico $C_4 H_2 (\overset{\alpha}{COOCH_3}) (\overset{\alpha'}{COCH_3}) NH$

Dall'etere metilico dell'acido α-carbopirrolico con anidride acetica (Ciamician e Silber [3]). — Aghi lunghi, p. f. 113°.

COOH, COOH

Acido αα'-pirroldicarbonico $C_4 H_2 (\overset{\alpha\alpha'}{COOH})_2 NH$

1. Dal composto potassico del pirrolo con anidride carbonica (Ciamician e Silber). 2. Dall'acido αα'-carbopirrilgliossilico con la potassa fondente (Ciamician e Silber [13]). — Croste cristalline bianche, si scompone verso 260°.

Etere monometilico $C_4 H_2 (\overset{\alpha}{COOCH_3}) (\overset{\alpha'}{COOH}) NH$

Dal sale biargentico con joduro di metile (Ciamician e Silber [14]). — Solido, p. f. 243°.

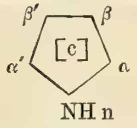
Etere dimetilico $C_4 H_2 (\overset{\alpha\alpha'}{COOCH_3})_2 NH$

Dal sale biargentico con joduro metilico (Ciamician e Silber [13]). — Aghi lunghi, p. f. 132°.

Etere dietilico $C_4 H_2 (\overset{\alpha\alpha'}{COOC_2 H_5})_2 NH$

Dal sale biargentico con joduro etilico (Ciamician e Silber [13]). — Aghi lunghi, p. f. 82°.

Tabella V (continuazione).

	ACIDI CARBOSSILICI
COOH , CO . COOH	**Acido** $\alpha\alpha'$**-carbopirrilgliossilico** $C_4 H_2 (\overset{\alpha}{C}OOH) (CO . \overset{\alpha'}{C}OOH) NH$ 1. Dall'acido α-acetil-α'-carbopirrolico col permanganato potassico (Ciamician e Silber [13]). 2. Dall'$\alpha\alpha'$-diacetilpirrolo col permanganato potassico (Ciamician e Silber [13]). — Croste giallastre. **Etere dimetilico** $C_4 H_2 (\overset{\alpha}{C}OOCH_3) (CO\overset{\alpha'}{C}OOCH_3) NH$ Dal sale biargentico con joduro di etile (Ciamician e Silber [13]). — Aghi lunghi, p. f. 144-145°.
COOH , COOH , $C_2 H_5$	**Acido n-etil-**$\alpha\alpha'$**-pirroldicarbonico** $C_4 H_2 (\overset{\alpha\alpha'}{C}OOH)_2 \overset{n}{N}C_2 H_5$ Dall'amide trietildicarbopirrolica con potassa alcoolica (Bell [12]). — Aghi che si scompongono a 250°. **Amide trietil-**$\alpha\alpha'$**-dicarbopirrolica** $C_4 H_2 (\overset{\alpha\alpha'}{C}OOC_2 H_5)_2 \overset{n}{N}C_2 H_5$ Dal mucato di etilammina (Bell [12]). — Aghi, p. f. 229-230°.
COOH , CH_3 , CH_3	**Acido** $\alpha\alpha'$**-dimetil-**β**-carbopirrolico** $C_4 H (\overset{\alpha\alpha'}{C}H_3)_2 (\overset{\beta}{C}OOH) NH$ Dal suo etere etilico (Knorr [15]). — Aghetti, si scompongono a 210-213°. **Etere etilico** $C_4 H (\overset{\alpha\alpha'}{C}H_3)_2 (COO\overset{\beta}{C}_2 H_5) NH$ Dal composto $C_4 (\overset{\alpha\alpha'}{C}H_3)_2 (\overset{\beta}{C}OOH) (COO\overset{\beta'}{C}_2 H_5) NH$ riscaldandolo sopra il suo punto di fusione (Knorr [15]).— Solido, p. f. 117-118°; p. eb. 290° a 731 mm. **Acido** $\alpha\beta'$**-dimetilcarbopirrolico** $C_4 \overset{\beta}{H} (\overset{\alpha\beta'}{C}H_3)_2 (\overset{\alpha'}{C}OOH) NH$ o $C_4 \overset{\alpha'}{H} (\overset{\alpha\beta'}{C}H_3)_2 (\overset{\beta}{C}OOH) NH$ Dal suo etere etilico (Knorr [16]). — Solido, p. f. 183°. **Etere etilico** Dall'etere monoetilico dell'acido $\alpha\beta'$-dimetilpirroldicarbonico assimmetrico (Knorr [16]). — Solido, p. f. 75-76°, p. eb. 291°. **Anilide** $C_4 \overset{\alpha'}{H} (\overset{\alpha\beta'}{C}H_3)_2 (CON\overset{\beta}{H}C_6 H_5) NH$ Dall'acido dimetilpirroldicarbonanilico corrispondente (Knorr [16]). — Materia vetrosa, p. f. 80°.
COOH , CH_3 , $C_6 H_5$	**Acido** α**-metil-**α'**-fenil-**β**-carbopirrolico** $C_4 H (\overset{\alpha}{C}H_3) (\overset{\alpha'}{C}_6 H_5) (\overset{\beta}{C}OOH) NH$ Dal suo etere con potassa alcoolica (Lederer e Paal [17]). — Solido, si scompone a 175° e fonde intorno a 190°. **Etere etilico** $C_4 H (CH_3) (C_6 H_5) (COOC_2 H_5) NH$

CH_3 , CH_3 , COOH , OH	**Acido n-ossi-$\alpha\alpha'$-dimetil-β-carbopirrolico** $C_4H(\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2(\overset{\beta}{COOH})N\overset{n}{OH}$ Si ottiene dall'etere dietilico dell'acido n-ossi-$\alpha\alpha'$-dimetil-$\beta\beta'$-pirroldicarbonico con la soda o del suo etere etilico (Knorr [16]). — Aghi sottili, p. f. 138°. **Etere etilico** $C_4H(\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2(\overset{\beta}{COOC_2}H_5)N\overset{n}{OH}$ Dall'etere monoetilico dell'acido n-ossi-$\alpha\alpha'$-dimetil-$\beta\beta'$-pirroldicarbonico, saldandolo a 190° (Knor [16]). — Olio denso non distilla senza decomposizione.
CH_3 , CH_3 , C_6H_5 , COOH	**Acido n-metil-α-metil-α'-fenil-β-carbopirrolico** $C_4H(\overset{\alpha}{CH_3})(\overset{\alpha'}{C_6}H_5)(\overset{\beta}{COOH})N\overset{n}{CH_3}$ Dal suo etere etilico (Lederer e Paal [17]). **Etere etilico** $C_4H(\overset{\alpha}{CH_3})(\overset{\alpha_1}{C_6}H_5)(\overset{\beta}{COOC_2}H_5)N\overset{n}{CH_3}$ Dall'etere acetofenonacetoacetico con metilammina (Lederer e Paal [17]). — Solido, p. f. 112°.
CH_3 , C_3H_5 , C_6H_5 , COOH	**Acido n-allil-α-metil-α'-fenil-β-carbopirrolico** $C_4H(\overset{\alpha}{CH_3})(\overset{\alpha'}{C_6}H_5)(\overset{\beta}{COOH})NC_3\overset{n}{H_5}$ Dal suo etere etilico (Lederer e Paal [17]). Prismi, p. f. 158°. **Etere etilico** $C_4H(\overset{\alpha}{CH_3})(\overset{\alpha'}{C_6}H_5)(\overset{\beta}{COOC_2}H_5)N\overset{n}{C_3}H_5$ Dall'etere acetofenonacetoacetico con allilammina (Lederer e Paal [17]).
CH_3 , C_6H_5 , C_6H_5 , COOH	**Acido n-fenil-α-metil-α'-fenil-β-carbopirrolico** $C_4H(\overset{\alpha}{CH_3})(\overset{\alpha'}{C_6}H_5)(\overset{\beta}{COOH})NC_6\overset{n}{H_5}$ Dal suo etere etilico (Lederer e Paal [17]). — Aghi, p. f. 226°. **Etere etilico** $C_4H(\overset{\alpha}{CH_3})(\overset{\alpha'}{C_6}H_5)(\overset{\beta}{COOC_2}H_5)NC_6\overset{n}{H_5}$ Dall'etere acetofenonacetoacetico con anilina (Lederer e Paal [17]). — Prismi, p. f. 100°.
CH_3 , C_6H_5 , $C_6H_4CH_3$, COOH	**Acido n-ortototil-α-metil-α'-fenil-β-carbopirrolico** $C_4H(\overset{\alpha}{CH_3})(\overset{\alpha'}{C_6}H_5)(\overset{\beta}{COOH})\underset{1}{N}\overset{n}{\overbrace{C_6H_4\underset{2}{CH_3}}}$ Dal suo etere etilico (Lederer e Paal [17]). — Solido, p. f. 199°. **Etere etilico** $C_4H(\overset{\alpha}{CH_3})(\overset{\alpha'}{C_6}H_5)(\overset{\beta}{COOC_2}H_5)\underset{1}{N}\overset{n}{\overbrace{C_6H_4\underset{2}{CH_3}}}$ Dall'etere acetofenonacetoacetico con ortotoluidina (Lederer e Paal [17]).

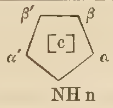
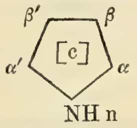
	ACIDI CARBOSSILICI
COOH, CO.COOH	**Acido αα'-carbopirrilgliossilico** $C_4H_2(\overset{\alpha}{C}OOH)(CO.\overset{\alpha'}{C}OOH)NH$ 1. Dall'acido α-acetil-α'-carbopirrolico col permanganato potassico (Ciamician e Silber [13]). 2. Dall'αα'-diacetilpirrolo col permanganato potassico (Ciamician e Silber [13]). — Croste giallastre. **Etere dimetilico** $C_4H_2(\overset{\alpha}{C}OOCH_3)(COC\overset{\alpha'}{O}OCH_3)NH$ Dal sale biargentico con joduro di etile (Ciamician e Silber [13]). — Aghi lunghi, p. f. 144-145°.
COOH, COOH, C_2H_5	**Acido n-etil-αα'-pirroldicarbonico** $C_4H_2(\overset{\alpha\alpha'}{C}OOH)_2\overset{n}{N}C_2H_5$ Dall'amide trietildicarbopirrolica con potassa alcoolica (Bell [12]). — Aghi che si scompongono a 250°. **Amide trietil-αα'-dicarbopirrolica** $C_4H_2(\overset{\alpha\alpha'}{C}OOC_2H_5)_2\overset{n}{N}C_2H_5$ Dal mucato di etilammina (Bell [12]). — Aghi, p. f. 229-230°.
COOH, CH_3, CH_3	**Acido αα'-dimetil-β-carbopirrolico** $C_4H(\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2(\overset{\beta}{C}OOH)NH$ Dal suo etere etilico (Knorr [15]). — Aghetti, si scompongono a 210-213°. **Etere etilico** $C_4H(\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2(\overset{\beta}{COOC_2}H_5)NH$ Dal composto $C_4(\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2(\overset{\beta}{C}OOH)(\overset{\beta'}{COOC_2}H_5)NH$ riscaldandolo sopra il suo punto di fusione (Knorr [15]).— Solido, p. f. 117-118°; p. eb. 290° a 731 mm. **Acido αβ'-dimetilcarbopirrolico** $C_4\overset{\beta}{H}(\overset{\alpha\beta'}{CH_3})_2(\overset{\alpha'}{C}OOH)NH$ o $C_4\overset{\alpha'}{H}(\overset{\alpha\beta'}{CH_3})_2(\overset{\beta}{C}OOH)NH$ Dal suo etere etilico (Knorr [16]). — Solido, p. f. 183°. **Etere etilico** Dall'etere monoetilico dell'acido αβ'-dimetilpirroldicarbonico assimmetrico (Knorr [16]). — Solido, p. f. 75-76°, p. eb. 291°. **Anilide** $C_4\overset{\alpha'}{H}(\overset{\alpha\beta'}{CH_3})_2(CON\overset{\beta}{H}C_6H_5)NH$ Dall'acido dimetilpirroldicarbonanilico corrispondente (Knorr [16]). — Materia vetrosa, p. f. 80°.
COOH, CH_3, C_6H_5	**Acido α-metil-α'-fenil-β-carbopirrolico** $C_4H(\overset{\alpha}{C}H_3)(\overset{\alpha'}{C_6}H_5)(\overset{\beta}{C}OOH)NH$ Dal suo etere con potassa alcoolica (Lederer e Paal [17]). — *Solido, si scompone a 175° e fonde intorno a 190°.* **Etere etilico** $C_4H(\overset{\alpha}{C}H_3)(\overset{\alpha'}{C_6}H_5)(\overset{\beta}{COOC_2}H_5)NH$ Dall'etere acetofenonacetoacetico con ammoniaca (Lederer e Paal [17]). — *Tavolette incolore, p. f. 120°.*
CH_3, CH_3, C_6H_4, COOH	**Acido αα'-dimetilpirrilmetabenzoico** $C_4H_2(\overset{\alpha\alpha'}{C}H_3)_2\overset{n}{N}C_6H_4COOH$ Dall'acetonilacetone con acido m-amidobenzoico (Paal e Schneider [18]). — Cristalli, p. f. 134-135°.
CH_3, CH_3, COOH, OH	**Acido n-ossi-αα'-dimetil-β-carbopirrolico** $C_4H(\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2(\overset{\beta}{C}OOH)N\overset{n}{O}H$ Si ottiene dall'etere dietilico dell'acido n-ossi-αα'-dimetil-ββ'-pirroldicarbonico con la soda o del suo etere etilico (Knorr [16]). — Aghi sottili, p. f. 138°. **Etere etilico** $C_4H(\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2(\overset{\beta}{COOC_2}H_5)N\overset{n}{O}H$ Dall'etere monoetilico dell'acido n-ossi-αα'-dimetil-ββ'-pirroldicarbonico, saldandolo a 190° (Knor [16]). — Olio denso non distilla senza decomposizione.
CH_3, CH_3, C_6H_5, COOH	**Acido n-metil-α-metil-α'-fenil-β-carbopirrolico** $C_4H(\overset{\alpha}{C}H_3)(\overset{\alpha'}{C_6}H_5)(\overset{\beta}{C}OOH)N\overset{n}{C}H_3$ Dal suo etere etilico (Lederer e Paal [17]). **Etere etilico** $C_4H(\overset{\alpha}{C}H_3)(\overset{\alpha_1}{C_6}H_5)(\overset{\beta}{COOC_2}H_5)N\overset{n}{C}H_3$ Dall'etere acetofenonacetoacetico con metilammina (Lederer e Paal [17]). — Solido, p. f. 112°.
CH_3, C_3H_5, C_6H_5, COOH	**Acido n-allil-α-metil-α'-fenil-β-carbopirrolico** $C_4H(\overset{\alpha}{C}H_3)(\overset{\alpha'}{C_6}H_5)(\overset{\beta}{C}OOH)NC_3\overset{n}{H_5}$ Dal suo etere etilico (Lederer e Paal [17]). Prismi, p. f. 158°. **Etere etilico** $C_4H(\overset{\alpha}{C}H_3)(\overset{\alpha'}{C_6}H_5)(\overset{\beta}{COOC_2}H_5)NC_3\overset{n}{H_5}$ Dall'etere acetofenonacetoacetico con allilammina (Lederer e Paal [17]).
CH_3, C_6H_5, C_6H_5, COOH	**Acido n-fenil-α-metil-α'-fenil-β-carbopirrolico** $C_4H(\overset{\alpha}{C}H_3)(\overset{\alpha'}{C_6}H_5)(\overset{\beta}{C}OOH)NC_6\overset{n}{H_5}$ Dal suo etere etilico (Lederer e Paal [17]). — Aghi, p. f. 226°. **Etere etilico** $C_4H(\overset{\alpha}{C}H_3)(\overset{\alpha'}{C_6}H_5)(\overset{\beta}{COOC_2}H_5)NC_6\overset{n}{H_5}$ Dall'etere acetofenonacetoacetico con anilina (Lederer e Paal [17]). — Prismi, p. f. 100°.
CH_3, C_6H_5, $C_6H_4CH_3$, COOH	**Acido n-ortototil-α-metil-α'-fenil-β-carbopirrolico** $C_4H(\overset{\alpha}{C}H_3)(\overset{\alpha'}{C_6}H_5)(\overset{\beta}{C}OOH)\overset{n}{N}\underset{1}{C_6H_4}\underset{2}{CH_3}$ Dal suo etere etilico (Lederer e Paal [17]). — Solido, p. f. 199°. **Etere etilico** $C_4H(\overset{\alpha}{C}H_3)(\overset{\alpha'}{C_6}H_5)(\overset{\beta}{COOC_2}H_5)\overset{n}{N}\underset{1}{C_6H_4}\underset{2}{CH_3}$ Dall'etere acetofenonacetoacetico con ortotoluidina (Lederer e Paal [17]).

TABELLA V (continuazione).

	ACIDI CARBOSSILICI
CH_3, C_6H_5, $C_6H_4CH_3$, COOH	**Acido n-paratolil-α-metil-α'-fenil-β-carbopirrolico** $C_4H(\overset{\alpha}{CH_3})(\overset{\alpha'}{C_6H_5})(\overset{\beta}{COOH})\overbrace{\underset{1}{N}C_6H_4\underset{4}{CH_3}}^{n}$ Dal suo etere etilico (Lederer e Paal [17]). — Solido, p. f. 227°. **Etere etilico** $C_4H(\overset{\alpha}{CH_3})(\overset{\alpha'}{C_6H_5})(\overset{\beta}{COOC_2H_5})\underset{1}{N}\overbrace{C_6H_4\underset{4}{CH_3}}^{n}$ Dall'etere acetofenonacetoacetico con paratoluidina (Lederer e Paal [17]). — Solido, p. f. 115°.
CH_3, C_6H_5, $\underset{\alpha}{C_{10}H_7}$, COOH	**Acido n-α-naftil-α-metil-α'-fenil-β-carbopirrolico** $C_4H(\overset{\alpha}{CH_3})(\overset{\alpha'}{C_6H_5})(\overset{\beta}{COOH})N\overset{n}{\underset{\alpha}{C_{10}}}H_7$ Dall'etere etilico (Lederer e Paal [17]). — Aghi, p. f. 244°. **Etere etilico** $C_4H(\overset{\alpha}{CH_3})(\overset{\alpha'}{C_6H_5})(\overset{\beta}{COOC_2H_5})N\overset{n}{\underset{\alpha}{C_{10}}}H_7$ Dall'etere acetofenonacetoacetico con α-naftilammina (Lederer e Paal [17]).
CH_3, C_6H_5, $\underset{\beta}{C_{10}H_7}$, COOH	**Acido n-β-naftil-α-metil-α'-fenil-β-carbopirrolico** $C_4H(\overset{\alpha}{CH_3})(\overset{\alpha'}{C_6H_5})(\overset{\beta}{COOH})N\overset{n}{\underset{\beta}{C_{10}}}H_7$ Dal suo etere etilico (Paal e Lederer [17]). — Aghi, p. f. 249°. **Etere etilico** $C_4H(\overset{\alpha}{CH_3})(\overset{\alpha'}{C_6H_5})(\overset{\beta}{COOC_2H_5})N\overset{n}{\underset{\beta}{C_{10}}}H_7$ Dall'etere acetofenonacetoacetico con β-naftilammina (Lederer e Paal [17]). — Pagliette, p. f. 115°.
CH_3, C_6H_5, CH_2COOH, COOH	**Acido α-metil-α'-fenil-β-pirrolcarbon-n-acetico** $C_4H(\overset{\alpha}{CH_3})(\overset{\alpha'}{C_6H_5})(\overset{\beta}{COOH})N\overbrace{CH_2COOH}^{n}$ Dall'etere monoetilico (Paal e Schneider [19]). — Solido, p. f. 152°. **Etere monoetilico** $C_4H(\overset{\alpha}{CH_3})(\overset{\alpha'}{C_6H_5})(\overset{\beta}{COOC_2H_5})N\overset{n}{CH_2}COOH$ Dall'etere acetofenonacetoacetico con acido amidoacetico (Paal e Schneider [19]). — Aghi bianchi e sottili, p. f. 131°.
CH_3, C_6H_5, C_6H_4COOH, COOH	**Acido α-metil-α'-fenil-β-carbopirril-n-metabenzoico** $C_4H(\overset{\alpha}{CH_3})(\overset{\alpha'}{C_6H_5})(\overset{\beta}{COOH})\underset{1}{N}C_6\overset{n}{H_4}\underset{3}{COOH}$ Dall'etere monoetilico con potassa alcoolica (Paal e Schneider [19]). — Aghi, p. f. 210°. **Etere monoetilico** $C_4H(CH_3)(C_6H_5)(COOC_2H_5)NC_6H_4COOH$

	Dall'etere etilico con potassa alcoolica (Paal e Schneider [19]). — Cristalli rossi, p. f. 195°.
	Etere etilico $C_4H(\overset{\alpha}{CH_3})(\overset{\alpha'}{C_6H_5})(\overset{\beta}{COOC_2H_5})N\overbrace{C_6H_4N_2C_6H_5}$ Dall'etere acetofenonacetoacetico con amidoazobenzolo (Paal e Schneider [19]). — Cristalli colorati in rosso cupo, p. f. 123°.
CH_3, C_6H_5, $COOH$, $\overset{n}{CH_2}CH_2NC_4H(\overset{\alpha}{CH_3})(\overset{\alpha'}{C_6H_5})(\overset{\beta}{COOH})$	**Acido n-etilen-α-dimetil-α'-difenil-β-dipirroldicarbonico** $C_4H(\overset{\alpha}{CH_3})(\overset{\alpha'}{C_6H_5})(\overset{\beta}{COOH})N\overbrace{CH_2.CH_2}^{n}NC_4H(\overset{\alpha}{CH_3})(\overset{\alpha'}{C_6H_5})(\overset{\beta}{COOH})$ Dal suo etere dietilico (Paal e Schneider [19]). — Solido, p. f. 181°. **Etere dietilico** $\overset{n}{C_2H_4}[NC_4H(\overset{\alpha}{CH_3})(\overset{\alpha'}{C_6H_5})(\overset{\beta}{COOC_2H_5})]_2$ Dall'etere acetofenonacetoacetico con etilendiammina (Paal e Schneider [19]). — Pagliette, p. f. 197°.
CH_3, C_6H_5, $COOC_2H_5$, $\underset{1,3}{\overset{n}{C_6H_4}}NC_4H(\overset{\alpha}{CH_3})(\overset{\alpha'}{C_6H_5})(\overset{\beta}{COOC_2H_5})$	**Etere n-metafenilen-α-dimetil-α'-difenil-dipirrol-β-dicarbonico** $C_4H(\overset{\alpha}{CH_3})(\overset{\alpha'}{C_6H_5})(\overset{\beta}{COOC_2H_5})N\underset{1\quad 3}{\overset{n}{C_6H_4}}NC_4H(\overset{\alpha}{CH_3})(\overset{\alpha'}{C_6H_5})(\overset{\beta}{COOC_2H_5})$ Dall'etere acetofenonacetoacetico con la metafenilendiammina (Paal e Schneider [19]). — Aghi bianchi, p. f. 185°.
CH_3, C_6H_5, $COOC_2H_5$, $\overbrace{\underset{1}{C_6H_4}.\underset{4}{C_6H_4}}^{n}NC_4H(\overset{\alpha}{CH_3})(\overset{\alpha'}{C_6H_5})(\overset{\beta}{COOC_2H_5})$	**Etere n-paradifenilen-α-dimetil-α'-difenil-β-dipirroldicarbonico** $C_4H(\overset{\alpha}{CH_3})(\overset{\alpha'}{C_6H_5})(\overset{\beta}{COOC_2H_5}).N.\overbrace{C_6H_4C_6H_4}^{n}.N.C_4H(\overset{\alpha}{CH_3})(\overset{\alpha'}{C_6H_5})(\overset{\beta}{COOC_2H_5})$ Dall'etere acetofenonacetoacetico colla benzidina (Paal e Schneider [19]). — Aghi capillari gialli, p. f. 178-179°.
CH_3, CH_3, $COOH$, $COOH$	**Acido $\alpha\alpha'$-dimetil-$\beta\beta'$-pirroldicarbonico** $C_4(\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2(\overset{\beta\beta'}{COOH})_2NH$ Dall'etere dietilico (Knorr [15]). — Aghi lunghi, p. f. 250-251°. **Etere monoetilico** $C_4(\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2(\overset{\beta}{COOH})(\overset{\beta'}{COOC_2H_5})NH$ Dall'etere dietilico (Knorr [15]). — Solido, p. f. 227°. **Etere dietilico** $C_4(\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2(\overset{\beta\beta'}{COOC_2H_5})_2NH$ Dall'etere dietilico dell'acido diacetilsuccinico con ammoniaca (Knorr [15]). — Solido, p. f. 99°, dà un picrato e un cloroplatinato $(C_{12}H_{17}NO_4HCl)_2PtCl_4$. **Acido $\alpha\beta'$-dimetil-$\alpha'\beta$-pirroldicarbonico** (assimmetrico) $C_4(\overset{\alpha\beta'}{CH_3})_2(\overset{\alpha'\beta}{COOH})_2NH$ Dall'etere dietilico con soda (Knorr [16]). — Si scinde senza fondere a 260° in CO_2 e $C_4H_2(\overset{\alpha\beta'}{CH_3})_2NH$. **Etere monoetilico** $C_4(\overset{\alpha\beta'}{CH_3})_2(\overset{\alpha'}{COOH})(\overset{\beta}{COOC_2H_5})NH$ o $C_4(\overset{\alpha\beta'}{CH_3})_2(\overset{\alpha'}{COOC_2H_5})(\overset{\beta}{COOH})NH$ Dall'etere dietilico con potassa alcoolica (Knorr [16]). — Aghi, p. f. 202°. **Etere dietilico** $C_4(\overset{\alpha\beta'}{CH_3})_2(\overset{\alpha'\beta}{COOC_2H_5})_2NH$ Da un miscuglio equimolecolare di etere acetoacetico ed etere nitrosoacetoacetico con acido acetico e polvere di zinco (Knorr [16]). — Aghi sottili, p. f. 134-135°, non ha proprietà alcaline.

TABELLA V (continuazione).

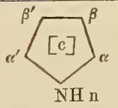
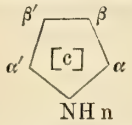
	ACIDI CARBOSSILICI
CH_3, C_6H_5, $C_6H_4CH_3$, COOH	**Acido n-paratolil-α-metil-α'-fenil-β-carbopirrolico** $C_4H(\overset{\alpha}{CH_3})(\overset{\alpha'}{C_6}H_5)(\overset{\beta}{COOH})\overset{n}{\overbrace{\underset{1}{N}\,C_6H_4\,\underset{4}{CH_3}}}$ Dal suo etere etilico (Lederer e Paal [17]). — Solido, p. f. 227°. **Etere etilico** $C_4H(\overset{\alpha}{CH_3})(\overset{\alpha'}{C_6}H_5)(COO\overset{\beta}{C_2}H_5)N\overset{n}{\overbrace{\underset{1}{C_6}H_4\underset{4}{CH_3}}}$ Dall'etere acetofenonacetoacetico con paratoluidina (Lederer e Paal [17]). — Solido, p. f. 115°.
CH_3, C_6H_5, $\underset{\alpha}{C_{10}}H_7$, COOH	**Acido n-α-naftil-α-metil-α'-fenil-β-carbopirrolico** $C_4H(\overset{\alpha}{CH_3})(\overset{\alpha'}{C_6}H_5)(\overset{\beta}{COOH})N\underset{\alpha}{\overset{n}{C_{10}}}H_7$ Dall'etere etilico (Lederer e Paal [17]). — Aghi, p. f. 244°. **Etere etilico** $C_4H(\overset{\alpha}{CH_3})(\overset{\alpha'}{C_6}H_5)(COO\overset{\beta}{C_2}H_5)N\underset{\alpha}{\overset{n}{C_{10}}}H_7$ Dall'etere acetofenonacetoacetico con α-naftilammina (Lederer e Paal [17]).
CH_3, C_6H_5, $\underset{\beta}{C_{10}}H_7$, COOH	**Acido n-β-naftil-α-metil-α'-fenil-β-carbopirrolico** $C_4H(\overset{\alpha}{CH_3})(\overset{\alpha'}{C_6}H_5)(\overset{\beta}{COOH})N\underset{\beta}{\overset{n}{C_{10}}}H_7$ Dal suo etere etilico (Paal e Lederer [17]). — Aghi, p. f. 249°. **Etere etilico** $C_4H(\overset{\alpha}{CH_3})(\overset{\alpha'}{C_6}H_5)(COO\overset{\beta}{C_2}H_5)N\underset{\beta}{\overset{n}{C_{10}}}H_7$ Dall'etere acetofenonacetoacetico con β-naftilammina (Lederer e Paal [17]). — Pagliette, p. f. 115°.
CH_3, C_6H_5, CH_2COOH, COOH	**Acido α-metil-α'-fenil-β-pirrolcarbon-n-acetico** $C_4H(\overset{\alpha}{CH_3})(\overset{\alpha'}{C_6}H_5)(\overset{\beta}{COOH})N\overset{n}{\overbrace{CH_2\,COOH}}$ Dall'etere monoetilico (Paal e Schneider [19]). — Solido, p. f. 152°. **Etere monoetilico** $C_4H(\overset{\alpha}{CH_3})(\overset{\alpha'}{C_6}H_5)(COO\overset{\beta}{C_2}H_5)N\overset{n}{CH_2}COOH$ Dall'etere acetofenonacetoacetico con acido amidoacetico (Paal e Schneider [19]). — Aghi bianchi e sottili, p. f. 131°.
CH_3, C_6H_5, C_6H_4COOH, COOH	**Acido α-metil-α'-fenil-β-carbopirril-n-metabenzoico** $C_4H(\overset{\alpha}{CH_3})(\overset{\alpha'}{C_6}H_5)(\overset{\beta}{COOH})\underset{1}{N}C_6\overset{n}{H_4}\underset{3}{COOH}$ Dall'etere monoetilico con potassa alcoolica (Paal e Schneider [19]). — Aghi, p. f. 210°. **Etere monoetilico** $C_4H(\overset{\alpha}{CH_3})(\overset{\alpha'}{C_6}H_5)(COO\overset{\beta}{C_2}H_5)\underset{1}{N}C_6\overset{n}{H_4}\underset{3}{COOH}$ Dall'etere acetofenonacetoacetico con acido m-amidobenzoico (Paal e Schneider [19]). — Aghi gialli sottili, p. f. [illegible]
CH_3, C_6H_5, $C_6H_4N{:}N.C_6H_5$, COOH	**Acido n-azobenzol-α-metil-α'-fenil-β-carbopirrolico** $C_4H(CH_3)(C_6H_5)(COOH)NC_6H_4.N_2.C_6H_5$ Dall'etere etilico con potassa alcoolica (Paal e Schneider [19]). — Cristalli rossi, p. f. 195°. **Etere etilico** $C_4H(\overset{\alpha}{CH_3})(\overset{\alpha'}{C_6}H_5)(COO\overset{\beta}{C_2}H_5)N\overset{n}{\overbrace{C_6H_4N_2C_6H_5}}$ Dall'etere acetofenonacetoacetico con amidoazobenzolo (Paal e Schneider [19]). — Cristalli colorati in rosso cupo, p. f. 123°.
CH_3, C_6H_5, COOH, $\overset{n}{CH_2}CH_2NC_4H(\overset{\alpha}{CH_3})(\overset{\alpha'}{C_6}H_5)(\overset{\beta}{COOH})$	**Acido n-etilen-α-dimetil-α'-difenil-β-dipirroldicarbonico** $C_4H(\overset{\alpha}{CH_3})(\overset{\alpha'}{C_6}H_5)(\overset{\beta}{COOH})N\overset{n}{\overbrace{CH_2.CH_2}}NC_4H(\overset{\alpha}{CH_3})(\overset{\alpha'}{C_6}H_5)(\overset{\beta}{COOH})$ Dal suo etere dietilico (Paal e Schneider [19]). — Solido, p. f. 181°. **Etere dietilico** $\overset{n}{C_2}H_4[NC_4H(\overset{\alpha}{CH_3})(\overset{\alpha'}{C_6}H_5)(COO\overset{\beta}{C_2}H_5)]_2$ Dall'etere acetofenonacetoacetico con etilendiammina (Paal e Schneider [19]). — Pagliette, p. f. 197°.
CH_3, C_6H_5, $COOC_2H_5$, $\underset{1,3}{\overset{n}{C_6}}H_4NC_4H(\overset{\alpha}{CH_3})(\overset{\alpha'}{C_6}H_5)(COO\overset{\beta}{C_2}H_5)$	**Etere n-metafenilen-α-dimetil-α'-difenil-dipirrol-β-dicarbonico** $C_4H(\overset{\alpha}{CH_3})(\overset{\alpha'}{C_6}H_5)(COO\overset{\beta}{C_2}H_5)\underset{1}{N}\overset{n}{C_6}H_4\underset{3}{N}C_4H(\overset{\alpha}{CH_3})(\overset{\alpha'}{C_6}H_5)(COO\overset{\beta}{C_2}H_5)$ Dall'etere acetofenonacetoacetico con la metafenilendiammina (Paal e Schneider [19]). — Aghi bianchi, p. f. 185°.
CH_3, C_6H_5, $COOC_2H_5$, $\overset{n}{\overbrace{\underset{1}{C_6H_4}.\underset{4}{C_6H_4}}}NC_4H(\overset{\alpha}{CH_3})(\overset{\alpha'}{C_6}H_5)(COO\overset{\beta}{C_2}H_5)$	**Etere n-paradifenilen-α-dimetil-α'-difenil-β-dipirroldicarbonico** $C_4H(\overset{\alpha}{CH_3})(\overset{\alpha'}{C_6}H_5)(COO\overset{\beta}{C_2}H_5).N.\overset{n}{\overbrace{C_6H_4C_6H_4}}.N.C_4H(\overset{\alpha}{CH_3})(\overset{\alpha'}{C_6}H_5)(COO\overset{\beta}{C_2}H_5)$ Dall'etere acetofenonacetoacetico colla benzidina (Paal e Schneider [19]). — Aghi capillari gialli, p. f. 178-179°.
CH_3, CH_3, COOH, COOH	**Acido αα'-dimetil-ββ'-pirroldicarbonico** $C_4(\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2(\overset{\beta\beta'}{COOH})_2NH$ Dall'etere dietilico (Knorr [15]). — Aghi lunghi, p. f. 250-251°. **Etere monoetilico** $C_4(\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2(\overset{\beta}{COOH})(COO\overset{\beta'}{C_2}H_5)NH$ Dall'etere dietilico (Knorr [15]). — Solido, p. f. 227°. **Etere dietilico** $C_4(\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2(COO\overset{\beta\beta'}{C_2}H_5)_2NH$ Dall'etere dietilico dell'acido diacetilsuccinico con ammoniaca (Knorr [15]). — Solido, p. f. 99°, dà un picrato e un cloroplatinato $(C_{12}H_{17}NO_4HCl)_2PtCl_4$. **Acido αβ'-dimetil-α'β-pirroldicarbonico** (assimmetrico) $C_4(\overset{\alpha\beta'}{CH_3})_2(\overset{\alpha'\beta}{COOH})_2NH$ Dall'etere dietilico con soda (Knorr [16]). — Si scinde senza fondere a 260° in CO_2 e $C_4H_2(\overset{\alpha\beta'}{CH_3})_2NH$. **Etere monoetilico** $C_4(\overset{\alpha\beta'}{CH_3})_2(\overset{\alpha'}{COOH})(COO\overset{\beta}{C_2}H_5)NH$ o $C_4(\overset{\alpha\beta'}{CH_3})_2(COO\overset{\alpha'}{C_2}H_5)(\overset{\beta}{COOH})NH$ Dall'etere dietilico con potassa alcoolica (Knorr [16]). — Aghi, p. f. 202°. **Etere dietilico** $C_4(\overset{\alpha\beta'}{CH_3})_2(COO\overset{\alpha'\beta}{C_2}H_5)_2NH$ Da un miscuglio equimolecolare di etere acetoacetico ed etere nitrosoacetoacetico con acido acetico e polvere di zinco (Knorr [16]). — Aghi sottili, p. f. 134-135°, non ha proprietà alcaline.

TABELLA V (continuazione).

	ACIDI CARBOSSILICI
CH_3, CH_3, COOH, CONH C_6H_5	**Monoanilide dell'acido** $\alpha\beta'$**-dimetil-**$\alpha'\beta$**-pirroldicarbonico** $C_4\overset{\alpha\beta'}{(CH_3)_2}\overset{\alpha'}{(COOH)}\overset{\beta}{(CONH\,C_6H_5)}NH$ Dal suo etere etilico con la potassa alcoolica (Knorr [16]). — Aghi, si compongono a 198°. **Etere etilico** $C_4\overset{\alpha\beta'}{(CH_3)_2}\overset{\alpha'}{(COO\,C_2H_5)}\overset{\beta}{(CONH\,C_6H_5)}NH$ Da quantità equimolecolari di anilide acetoacetica ed etere nitrosoacetoacetico con ac. acetico e polvere di zinco (Knorr [16]). — Solido, p. f. 216°. **Anilide dell'etere** $\alpha\beta'$**-dimetil-**$\alpha'\beta$**-pirroldicarbonico** $C_4\overset{\alpha\beta'}{(CH_3)_2}\overset{\beta}{(COOC_2H_5)}\overset{\alpha'}{(CONH\,C_6H_5)}NH$ Da quantità equimolecolari di etere acetoacetico ed anilide nitrosoacetoacetica con polvere di zinco ed acido acetico (Knorr [16]). — Solido, fonde a 180°.
CH_3, CH_3, CONH C_6H_5, CONH C_6H_5	**Dianilide dell'acido** $\alpha\beta'$**-dimetil-**$\alpha'\beta$**-pirroldicarbonico** $C_4\overset{\alpha\beta'}{(CH_3)_2}\overset{\alpha'\beta}{(CONH\,C_6H_5)_2}NH$ Da quantità equimolecolari di anilide acetoacetica ed anilide nitrosoacetoacetica con acido acetico e polvere di zinco (Knorr [16]). — Solido, p. f. 255°.
CH_3, CH_3, $COOC_2H_5$, $COOC_2H_5$, OH	**Etere dietilico dell'acido n-ossi-**$\alpha\alpha'$**-dimetilpirrol-**$\beta\beta'$**-dicarbonico** $C_4\overset{\alpha\alpha'}{(CH_3)_2}\overset{\beta\beta'}{(COO\,C_2H_5)_2}N\overset{n}{OH}$ Dall'etere diacetilsuccinico con cloridrato d'idrossilammina (Knorr [16]). — Solido, dà un sale potassico $C_{12}H_{16}NO_5K$. Non si conosce l'acido libero perchè si scinde subito nell'acido monocarbonico. **Etere monoetilico** $C_4\overset{\alpha\alpha'}{(CH_3)_2}\overset{\beta}{(COOH)}\overset{\beta'}{(COO\,C_2H_5)}N\overset{n}{OH}$ Dall'etere dietilico con potassa a freddo o con potassa alcoolica (Knorr [16]). — Cristalli, p. f. 185°.
CH_3, CH_3, COOH, CH_2 COOH	**Acido** $\alpha\alpha'$**-dimetil-**$\beta\beta'$**-pirrolcarbonacetico** $C_4\overset{\alpha\alpha'}{(CH_3)_2}\overset{\beta}{(COOH)}(CH_2\overset{\beta'}{COOH})NH$ Dal suo etere dietilico con la soda acquosa (Knorr [20]). — Prismi, fonde con decomposizione a 196°. **Etere dietilico** $C_4\overset{\alpha\alpha'}{(CH_3)_2}\overset{\beta}{(COOC_2H_5)}(CH_2\overset{\beta'}{COOC_2H_5})NH$ Dall'etere diacetilglutarico con acetato ammonico (Knorr [20]). — Pagliette, p. f. 109-110°.
CH_3, CH_3, CH_3, COOH, COOH	**Acido n-metil-**$\alpha\alpha'$**-dimetilpirrol-**$\beta\beta'$**-dicarbonico** $C_4\overset{\alpha\alpha'}{(CH_3)_2}\overset{\beta\beta'}{(COOH)_2}N\overset{n}{CH_3}$

	Dal suo etere dietilico (Knorr [15]). — Polvere bianca, si scompone a 224° in CO_2 e dimetilfenilpirrolo. **Etere dietilico** $C_4(CH_3)_2(COOC_2H_5)_2NC_6H_5$ Dall'etere diacetilsuccinico con anilina (Knorr [15]). — Solido, p. f. 37-38°, p. eb. 280° a 50 mm.
CH_3, CH_3, C_7H_7, COOH, COOH	**Acido n-paratolil-αα'-dimetil-ββ'-pirroldicarbonico** $C_4\overset{\alpha\alpha'}{(CH_3)_2}\overset{\beta\beta}{(COOH)_2}\overset{n}{N}\underset{1}{C_6}H_4\underset{4}{C}H_3$ Dal suo etere dietilico (Knorr [15]). — Si scinde a 250° in CO_2 e dimetil-p-tolilpirrolo. **Etere dietilico** $C_4\overset{\alpha\alpha'}{(CH_3)_2}\overset{\beta\beta'}{(COOC_2H_5)_2}\overset{n}{N}\underset{1}{C_6}H_4\underset{4}{C}H_3$ Dall'etere diacetilsuccinico con paratoluidina (Knorr [15]). — Solido, p. f. 67°.
CH_3, CH_3, $\underset{\alpha}{C_{10}H_7}$, COOH, COOH	**Acido n-α-naftil-αα'-dimetil-ββ'-pirroldicarbonico** $C_4\overset{\alpha\alpha'}{(CH_3)_2}\overset{\beta\beta'}{(COOH)_2}\overset{n}{N}\underset{\alpha}{C_{10}}H_7$ Dal suo etere dietilico con potassa alcoolica (Knorr [16]). — Solido, p. f. 244°. **Etere dietilico** $C_4\overset{\alpha\alpha'}{(CH_3)_2}\overset{\beta\beta'}{(COOC_2H_5)_2}\overset{n}{N}\underset{\alpha}{C_{10}}H_7$ Dall'etere diacetilsuccinico con α-naftilammina (Knorr [16]). — Solido, p. f. 91-92°.
CH_3, CH_3, $\underset{\beta}{C_{10}H_7}$, COOH, COOH	**Acido n-β-naftil-αα'-dimetil-ββ'-pirroldicarbonico** $C_4\overset{\alpha\alpha'}{(CH_3)_2}\overset{\beta\beta'}{(COOH)_2}\overset{n}{N}\underset{\beta}{C_{10}}H_7$ Dal suo etere dietilico con potassa alcoolica (Knorr [15]). — Si scinde a 260° in CO_2 ed in αα'-dimetil-β-naftilpirrolo. **Etere dietilico** $C_4\overset{\alpha\alpha'}{(CH_3)_2}\overset{\beta\beta'}{(COOC_2H_5)_2}\overset{n}{N}\underset{\beta}{C_{10}}H_7$ Dall'etere diacetilsuccinico con β-naftilammina (Knorr [15]). — Solido, p. f. 124°.
CH_3, CH_3, $NCH_3C_6H_5$, COOH, COOH	**Acido n-metilfenilamido-αα'-dimetil-ββ'-pirroldicarbonico** $C_4\overset{\alpha\alpha'}{(CH_3)_2}\overset{\beta\beta'}{(COOH)_2}\overset{n}{N}(\overbrace{NCH_3C_6H_5})$ Dall'etere dietilico con potassa alcoolica (Knorr [16]). — Solido, si scinde a 231° in CO_2 e in $C_4H_2\overset{\alpha\alpha'}{(CH_3)_2}N_2(CH_3C_6H_5)$. **Etere dietilico** $C_4\overset{\alpha\alpha'}{(CH_3)_2}\overset{\beta\beta'}{(COOC_2H_5)_2}N\overset{n}{(NCH_3}.C_6H_5)$ Dall'etere diacetilsuccinico con metilfenilidrazina (Knorr [16]). — Olio denso.
CH_3, CH_3, COOH, COOH, CH_2COOH	**Acido αα'-dimetil-ββ'-pirroldicarbon-n-acetico** $C_4\overset{\alpha\alpha'}{(CH_3)_2}\overset{\beta\beta'}{(COOH)_2}N\overset{n}{CH_2}.COOH$ Dal suo etere dietilico con potassa alcoolica (Knorr [16]). — Si scinde a 214° in CO_2 e un olio che è forse $C_4(CH_3)_2H_2N.CH_2COOH$. Forma un sale tripotassico $C_4(CH_3)_2(COOK)_2.N.CH_2COOK$ ed uno biargentico. **Etere dietilico** $C_4\overset{\alpha\alpha'}{(CH_3)_2}\overset{\beta\beta'}{(COOC_2H_5)_2}N\overset{n}{CH_2}.COOH$ Dall'etere diacetilsuccinico con glicocolla (Knorr [16]). — Tavole, p. f. 169°. Forma un sale piombico $(C_{14}H_{18}NO_6)_2Pb$.

Tabella V (continuazione).

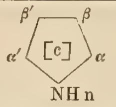
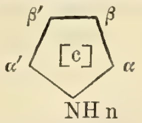
	ACIDI CARBOSSILICI
CH_3, CH_3, COOH, CONH C_6H_5	**Monoanilide dell'acido** *αβ'*-**dimetil**-*α'β*-**pirroldicarbonico** $C_4 (\overset{\alpha\beta'}{CH_3})_2 (\overset{\alpha'}{COOH}) (\overset{\beta}{CONH} C_6 H_5) NH$ Dal suo etere etilico con la potassa alcoolica (Knorr [16]). — Aghi, si compongono a 198°. **Etere etilico** $C_4 (\overset{\alpha\beta'}{CH_3})_2 (COO \overset{\alpha'}{C_2} H_5)(\overset{\beta}{CONH} C_6 H_5) NH$ Da quantità equimolecolari di anilide acetoacetica ed etere nitrosoacetoacetico con ac. acetico e polvere di zinco (Knorr [16]). — Solido, p. f. 216°. **Anilide dell'etere** *αβ'*-**dimetil**-*α'β*-**pirroldicarbonico** $C_4 (\overset{\alpha\beta'}{CH_3})_2 (\overset{\beta}{COOC_2} H_5) (\overset{\alpha'}{CONH} C_6 H_5) NH$ Da quantità equimolecolari di etere acetoacetico ed anilide nitrosoacetoacetica con polvere di zinco ed acido acetico (Knorr [16]). — Solido, fonde a 180°.
CH_3, CH_3, CONH C_6H_5, CONH C_6H_5	**Dianilide dell'acido** *αβ'*-**dimetil**-*α'β*-**pirroldicarbonico** $C_4 (\overset{\alpha\beta'}{CH_3})_2 (CONH \overset{\alpha'\beta}{C_6} H_5)_2 NH$ Da quantità equimolecolari di anilide acetoacetica ed anilide nitrosoacetoacetica con acido acetico e polvere di zinco (Knorr [16]). — Solido, p. f. 255°.
CH_3, CH_3, $COOC_2H_5$, $COOC_2H_5$, OH	**Etere dietilico dell'acido n-ossi**-*αα'*-**dimetilpirrol**-*ββ'*-**dicarbonico** $C_4 (\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2 (\overset{\beta\beta'}{COO} C_2 H_5)_2 N \overset{n}{OH}$ Dall'etere diacetilsuccinico con cloridrato d'idrossilammina (Knorr [16]). — Solido, dà un sale potassico $C_{12} H_{16} NO_5 K$. Non si conosce l'acido libero perchè si scinde subito nell'acido monocarbonico. **Etere monoetilico** $C_4 (\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2 (\overset{\beta}{COOH}) (COO \overset{\beta'}{C_2} H_5) N \overset{n}{OH}$ Dall'etere dietilico con potassa a freddo o con potassa alcoolica (Knorr [16]). — Cristalli, p. f. 185°.
CH_3, CH_3, COOH, CH_2 COOH	**Acido** *αα'*-**dimetil**-*ββ'*-**pirrolcarbonacetico** $C_4 (\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2 (\overset{\beta}{COOH}) (CH_2 \overset{\beta'}{COOH}) NH$ Dal suo etere dietilico con la soda acquosa (Knorr [20]). — Prismi, fonde con decomposizione a 196°. **Etere dietilico** $C_4 (\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2 (\overset{\beta}{COOC_2} H_5) (CH_2 \overset{\beta'}{COOC_2} H_5) NH$ Dall'etere diacetilglutarico con acetato ammonico (Knorr [20]). — Pagliette, p. f. 109-110°.
CH_3, CH_3, CH_3, COOH, COOH	**Acido n-metil**-*αα'*-**dimetilpirrol**-*ββ'*-**dicarbonico** $C_4 (\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2 (\overset{\beta\beta'}{COOH})_2 N C \overset{n}{H_3}$ Dal suo etere dietilico (Knorr [15]). — Solido, p. f. 240-245°. **Etere dietilico** $C_4 (\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2 (COO \overset{\beta\beta'}{C_2} H_5)_2 N C \overset{n}{H_3}$ Dall'etere diacetilsuccinico con metilammina (Knorr [15]). — Solido, p. f. 73°.
CH_3, CH_3, C_6H_5, COOH, COOH	**Acido n-fenil**-*αα'*-**dimetilpirrol**-*ββ'*-**dicarbonico** $C_4 (\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2 (\overset{\beta\beta'}{COOH})_2 N \overset{n}{C_6} H_5$ Dal suo etere dietilico (Knorr [15]). — Polvere bianca, si scompone a 221° in CO_2 e dimetilfenilpirrolo. **Etere dietilico** $C_4 (\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2 (COO \overset{\beta\beta'}{C_2} H_5)_2 N \overset{n}{C_6} H_5$ Dall'etere diacetilsuccinico con anilina (Knorr [15]). — Solido, p. f. 37-38°, p. eb. 280° a 50 mm.
CH_3, CH_3, C_7H_7, COOH, COOH	**Acido n-paratolil**-*αα'*-**dimetil**-*ββ'*-**pirroldicarbonico** $C_4 (\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2 (\overset{\beta\beta}{COOH})_2 \underset{1}{N} C_6 \overset{n}{H_4} \underset{4}{C} H_3$ Dal suo etere dietilico (Knorr [15]). — Si scinde a 250° in CO_2 e dimetil-p-tolilpirrolo. **Etere dietilico** $C_4 (\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2 (COO \overset{\beta\beta'}{C_2} H_5)_2 \underset{1}{N} C_6 \overset{n}{H_4} \underset{4}{C} H_3$ Dall'etere diacetilsuccinico con paratoluidina (Knorr [15]). — Solido, p. f. 67°.
CH_3, CH_3, $\underset{\alpha}{C_{10}} H_7$, COOH, COOH	**Acido n-**-*α*-**naftil**-*αα'*-**dimetil**-*ββ'*-**pirroldicarbonico** $C_4 (\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2 (\overset{\beta\beta'}{COOH})_2 N \underset{\alpha}{\overset{n}{C_{10}}} H_7$ Dal suo etere dietilico con potassa alcoolica (Knorr [16]). — Solido, p. f. 244°. **Etere dietilico** $C_4 (\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2 (\overset{\beta\beta'}{COOC_2} H_5)_2 N \underset{\alpha}{\overset{n}{C_{10}}} H_7$ Dall'etere diacetilsuccinico con *α*-naftilammina (Knorr [16]). — Solido, p. f. 91-92°.
CH_3, CH_3, $\underset{\beta}{C_{10}} H_7$, COOH, COOH	**Acido n-**-*β*-**naftil**-*αα'*-**dimetil**-*ββ'*-**pirroldicarbonico** $C_4 (\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2 (\overset{\beta\beta'}{COOH})_2 N \underset{\beta}{\overset{n}{C_{10}}} H_7$ Dal suo etere dietilico con potassa alcoolica (Knorr [15]). — Si scinde a 260° in CO_2 ed in *αα'*-dimetil-*β*-naftilpirrolo. **Etere dietilico** $C_4 (\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2 (\overset{\beta\beta'}{COOC_2} H_5)_2 N \underset{\beta}{\overset{n}{C_{10}}} H_7$ Dall'etere diacetilsuccinico con *β*-naftilammina (Knorr [15]). — Solido, p. f. 124°.
CH_3, CH_3, N CH_3 C_6H_5, COOH, COOH	**Acido n-metilfenilamido**-*αα'*-**dimetil**-*ββ'*-**pirroldicarbonico** $C_4 (\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2 (\overset{\beta\beta'}{COOH})_2 N \overset{n}{\overparen{(NC H_3 C_6 H_5)}}$ Dall'etere dietilico con potassa alcoolica (Knorr [16]). — Solido, si scinde a 231° in CO_2 e in $C_4H_2 (\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2 N_2 (CH_3C_6H_5)$. **Etere dietilico** $C_4 (\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2 (\overset{\beta\beta'}{COOC_2} H_5)_2 N (\overset{n}{NCH_3} . C_6 H_5)$ Dall'etere diacetilsuccinico con metilfenilidrazina (Knorr [16]). — Olio denso.
CH_3, CH_3, COOH, COOH, CH_2 COOH	**Acido** *αα'*-**dimetil**-*ββ'*-**pirroldicarbon-n-acetico** $C_4 (\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2 (\overset{\beta\beta'}{COOH})_2 N \overset{n}{CH_2} . COOH$ Dal suo etere dietilico con potassa alcoolica (Knorr [16]). — Si scinde a 214° in CO_2 e un olio che è forse $C_4 (CH_3)_2 H_2 N . CH_2$ COOH. Forma un sale tripotassico $C_4 (CH_3)_2 (COOK)_2 . N . CH_2$ COOK ed uno biargentico. **Etere dietilico** $C_4 (\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2 (\overset{\beta\beta'}{COOC_2} H_5)_2 \overset{n}{NCH_2} . COOH$ Dall'etere diacetilsuccinico con glicocolla (Knorr [16]). — Tavole, p. f. 169°. Forma un sale piombico $(C_{14} H_{18} NO_6)_2 Pb$.

TABELLA V (continuazione).

 	ACIDI CARBOSSILICI
CH_3, CH_3, $C_7H_6NH_2$ (meta), COOH, COOH	**Acido n-metamidotolil-αα'-dimetil-ββ'-pirroldicarbonico** $C_4(\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2(\overset{\beta\beta'}{COOH})_2N\overbrace{C_6H_3\underset{1}{CH_3}\underset{3}{NH_2}}^{n}$ Dal suo etere dietilico (Knorr [16]). — Cristallizza con due mol. di OH_2, si scinde a 203° in CO_2 e $C_4H_2(\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2NC_6H_3\underset{1}{CH_3}\underset{3}{NH_2}$. **Etere dietilico** $C_4(\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2(\overset{\beta\beta'}{COOC_2H_5})_2N\overbrace{C_6H_3\underset{1}{CH_3}\underset{3}{NH_2}}^{n}$ Dall'etere diacetilsuccinico con metatoluilendiammina (Knorr [16]). — Solido fonde a 134°.
CH_3, CH_3, COOH, COOH, $C_7H_6NC_4(\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2(\overset{\beta\beta'}{COOH})_2$	**Acido n-toluilen-αα'-tetrametil-dipirrol-ββ'-tetracarbonico** $C_4(\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2(\overset{\beta\beta'}{COOH})_2\underset{1}{N}.\overbrace{C_6H_3\underset{4}{CH_3}}^{n}\underset{3}{N}.C_4(\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2(\overset{\beta\beta'}{COOH})_2$ Dal suo etere tetraetilico (Knorr [16]). — Si scompone a 247-248°. **Etere tetraetilico** $(C_4(\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2(\overset{\beta\beta'}{COOC_2H_5})_2N)_2.\overset{n}{C_6H_3}.CH_3$ Dall'etere diacetilsuccinico con un eccesso di m-toluilendiammina (Knorr [16]). — Liquido oleoso pesante con fluorescenza azzurra.

1) L. Ann. 116, pag. 257.
2) R. Acc. L. T. VIII (1884). — Gazz. XIV, pag. 264. — Berl. Ber. 17, pag. 1437.
3) R. Acc. L. M. [3] XVIII (1883-1884). — Gazz. XIV, pag. 162. — Berl. Ber. 17, pag. 1150.
4) R. Acc. L. R. (1885). — Gazz. XV, pag. 256. — Berl. Ber. 18, pag. 1828.
5) R. Acc. L. T. V (1881). — Gazz. XI, pag. 226. — Berl. Ber. 14, pag. 1053.
6) R. Acc. L. R. (1885). — Gazz. XVI, pag. 46.
7) Berl. Ber. 1887, pag. 850.
8) Monatshefte für Chemie 1880, pg. 279. — Gazz. chim. XI, pag. 28.
9) R. Acc. L. T. VIII (1883). — Gazz. XIII, pag. 563. — Berl. Ber. 17, pag. 103.
10) R. Acc. L. M. [3], XV (1882-1883). — Gazz. XIII, pag. 455. — Berl. Ber. 16, pag. 2348.
11) R. Acc. L. M. [3], XIX (1883-1884). — Gazz. XV, pag. 9. — Berl. Ber. 17, pag. 2944.
12) Berl. Ber. 1877, pag. 1861.
13) R. Acc. L. R. 1886. — Gazz. XVI, pag. 373. — Berl. Ber. 19, pag. 1956.
14) R. Acc. L. R, III 1887. — Gazz. XVII, pag. 262, 269. — Berl. Ber. 20, pag. 2601.
15) Berl. Ber. 1885, pag. 299 e 1558.
16) L. Ann. 236, pag. 290 e 317.
17) Berl. Ber. 1885, pag. 2591.
18) Berl. Ber. 1886, pag. 558.
19) Berl. Ber. 1886, pag. 3158.
20) Berl. Ber. 1886, pag. 46.

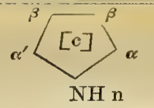
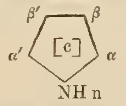
	PRODOTTI DI SOSTITUZIONE CON RADICALI ORGANICI NEGATIVI		
CN	**Tetrolcianamide** (cianopirrolo) $[C_4 H_4 \overset{n}{N}]_3 CN_3$ (?) Dal composto pirrolpotassico con cloruro di cianogeno gassoso (Ciamician e Dennstedt [1]). — Aghi bianchi, sottili, p. f. 210°, si volatilizzano verso 300° con decomposizione.		
$CO\,NH_2$	**Tetrolurea** (pirrolcarbamide) $C_4 H_4 N . \overset{n}{CO} . NH_2$ Dalla tetroluretana con ammoniaca a 110° (Ciamician e Dennstedt [2]). — Pagliette o prismi monoclini senza colore, p. f. 167-168°.	*α*-**Carbopirrolamide** $C_4 H_3 (\overset{\alpha}{CONH_2}) NH$ 1. Dal mucato ammonico (Schwanert [3]). 2. Dalla pirocolla con ammoniaca alcoolica (Weidel e Ciamician [4]). — Pagliette monocline, p. f. 176°,5.	
$CO . OC_2 H_5$	**Tetroluretana** $C_4 H_4 N . \overset{n}{\widehat{CO . OC_2 H_5}}$ Dal composto pirrolpotassico coll'etere clorocarbonico (Ciamician e Dennstedt [2]). — Liquido incoloro, p. eb. 180° a 770 mm.	**Etere etilico dell'acido *α*-carbopirrolico** $C_4 H_3 (\overset{\alpha}{COOC_2 H_5}) NH$ Dal sale argentico dell'acido *α*-carbopirrolico con joduro etilico (Ciamician e Silber [5]). — Solido, p. f. 39°, p. eb. 230-232°.	
CO	**Carbonilpirrolo** (Ditetrolurea) $C_4 H_4 N . \overset{n}{CO} . N . C_4 H_4$ Dal composto pirrolpotassico col fosgene (Ciamician e Magnaghi [6]). — Grossi prismi monoclini, p. f. 62-63°, p. eb. 238° (circa). Si scinde con la potassa in CO_2 e $C_4 H_5 N$, riduce la soluzione d'argento ammoniacale.	**Pirroilpirrolo** $(C_4H_3NH) . \overset{\alpha}{\widehat{CO . NC_4H_4}}$ Dal carbonilpirrolo scaldandolo a 250° (Ciamician e Magnaghi [7]). — Squamette bianche di splendore serico, p. f. 62-63°. Si scinde con la potassa in pirrolo ed acido *α*-carbopirrolico, dà con nitrato d'argento ammoniacale un composto giallo $(C_4 H_3 N Ag) . CO . (NC_4 H_4)$.	**Dipirrilchetone** (Pirrone) $(C_4 \overset{\alpha}{H_3} NH) . CO . (C_4 \overset{\alpha}{H_3} NH)$ 1. Dal composto pirrolpotassico e fosgene (Ciamician e Magnaghi [6]). 2. Riscaldando il carbonilpirrolo a 250° (gli stessi [7]). — Aghetti o prismi trimetrici, p. f. 160°. Non viene decomposto dalla potassa, dà col nitrato d'argento ammoniacale un composto $CO(C_4 H_3 N Ag)_2$.

Tabella V (continuazione).

	ACIDI CARBOSSILICI
CH_3, CH_3, $C_7H_6NH_2$ (meta), COOH, COOH	**Acido n-metamidotolil-αα′-dimetil-ββ′-pirroldicarbonico** $C_4(\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2(\overset{\beta\beta'}{COOH})_2N\overbrace{C_6H_3\underset{1}{CH_3}\underset{3}{NH_2}}^{n}$ Dal suo etere dietilico (Knorr [16]). — Cristallizza con due mol. di OH_2, si scinde a 203° in CO_2 e $C_4H_2(\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2NC_6H_3\underset{1}{CH_3}\underset{3}{NH_2}$. **Etere dietilico** $C_4(\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2(\overset{\beta\beta'}{COOC_2H_5})_2N\overbrace{C_6H_3\underset{1}{CH_3}\underset{3}{NH_2}}^{n}$ Dall'etere diacetilsuccinico con metatoluilendiammina (Knorr [16]). — Solido fonde a 134°.
CH_3, CH_3, COOH, COOH, $C_7H_6NC_4(\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2(\overset{\beta\beta'}{COOH})_2$	**Acido n-toluilen-αα′-tetrametil-dipirrol-ββ′-tetracarbonico** $C_4(\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2(\overset{\beta\beta'}{COOH})_2\underset{1}{N}.\overbrace{C_6H_3\underset{4}{CH_3}}^{n}\underset{3}{N}.C_4(\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2(\overset{\beta\beta'}{COOH})_2$ Dal suo etere tetraetilico (Knorr [16]). — Si scompone a 247-248°. **Etere tetraetilico** $(C_4(\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2(\overset{\beta\beta'}{COOC_2H_5})_2N)_2.C_6\overset{n}{H_3}.CH_3$ Dall'etere diacetilsuccinico con un eccesso di m-toluilendiammina (Knorr [16]). — Liquido olcoso pesante con fluorescenza azzurra.

1) L. Ann. 116, pag. 257.
2) R. Acc. L. T. VIII (1884). — Gazz. XIV, pag. 264. — Berl. Ber. 17, pag. 1437.
3) R. Acc. L. M. [3] XVIII (1883-1884). — Gazz. XIV, pag. 162. — Berl. Ber. 17, pag. 1150.
4) R. Acc. L. R. (1885). — Gazz. XV, pag. 256. — Berl. Ber. 18, pag. 1828.
5) R. Acc. L. T. V (1881). — Gazz. XI, pag. 226. — Berl. Ber. 14, pag. 1053.
6) R. Acc. L. R. (1885). — Gazz. XVI, pag. 46.
7) Berl. Ber. 1887, pag. 850.
8) Monatshefte für Chemie 1880, pg. 279. — Gazz. chim. XI, pag. 28.
9) R. Acc. L. T. VIII (1883). — Gazz. XIII, pag. 563. — Berl. Ber. 17, pag. 103.
10) R. Acc. L. M. [3], XV (1882-1883). — Gazz. XIII, pag. 455. — Berl. Ber. 16, pag. 2348.
11) R. Acc. L. M. [3], XIX (1883-1884). — Gazz. XV, pag. 9. — Berl. Ber. 17, pag. 2944.
12) Berl. Ber. 1877, pag. 1861.
13) R. Acc. L. R. 1886. — Gazz. XVI, pag. 373. — Berl. Ber. 19, pag. 1956.
14) R. Acc. L. R, III 1887. — Gazz. XVII, pag. 262, 269. — Berl. Ber. 20, pag. 2601.
15) Berl. Ber. 1885, pag. 299 e 1558.
16) L. Ann. 236, pag. 290 e 317.
17) Berl. Ber. 1885, pag. 2591.
18) Berl. Ber. 1886, pag. 558.
19) Berl. Ber. 1886, pag. 3158.
20) Berl. Ber. 1886, pag. 46.

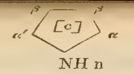
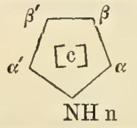
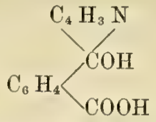
	PRODOTTI DI SOSTITUZIONE CON RADICALI ORGANICI NEGATIVI		
CN	**Tetrolcianamide** (cianopirrolo) $[C_4H_4N]_3\overset{n}{C}N_3$ (?) Dal composto pirrolpotassico con cloruro di cianogeno gassoso (Ciamician e Dennstedt [1]). — Aghi bianchi, sottili, p. f. 210°, si volatilizzano verso 300° con decomposizione.		
$CONH_2$	**Tetrolurea** (pirrolcarbamide) $C_4H_4N.C\overset{n}{O}.NH_2$ Dalla tetroluretana con ammoniaca a 110° (Ciamician e Dennstedt [2]). — Pagliette o prismi monoclini senza colore, p. f. 167-168°.	**α-Carbopirrolamide** $C_4H_3(\overset{\alpha}{CONH_2})NH$ 1. Dal mucato ammonico (Schwanert [3]). 2. Dalla pirocolla con ammoniaca alcoolica (Weidel e Ciamician [4]). — Pagliette monocline, p. f. 176°,5.	
$CO.OC_2H_5$	**Tetroluretana** $C_4H_4N.\overbrace{CO.OC_2H_5}^{n}$ Dal composto pirrolpotassico coll'etere clorocarbonico (Ciamician e Dennstedt [2]). — Liquido incoloro, p. eb. 180° a 770 mm.	**Etere etilico dell'acido α-carbopirrolico** $C_4H_3(\overset{\alpha}{COOC_2H_5})NH$ Dal sale argentico dell'acido α-carbopirrolico con joduro etilico (Ciamician e Silber [5]). — Solido, p. f. 39°, p. eb. 230-232°.	
CO	**Carbonilpirrolo** (Ditetrolurea) $C_4H_4N.\overset{n}{CO}.N.C_4H_4$ Dal composto pirrolpotassico col fosgene (Ciamician e Magnaghi [6]). — Grossi prismi monoclini, p. f. 62-63°, p. eb. 238° (circa). Si scinde con la potassa in CO_2 e C_4H_5N, riduce la soluzione d'argento ammoniacale.	**Pirroilpirrolo** $(C_4H_3NH).\overbrace{CO.NC_4H_4}^{\alpha}$ Dal carbonilpirrolo scaldandolo a 250° (Ciamician e Magnaghi [7]). — Squamette bianche di splendore serico, p. f. 62-63°. Si scinde con la potassa in pirrolo ed acido α-carbopirrolico, dà con nitrato d'argento ammoniacale un composto giallo $(C_4H_3NAg).CO.(NC_4H_4)$.	**Dipirrilchetone** (Pirrone) $(C_4\overset{\alpha}{H_3}NH).CO.(C_4\overset{\alpha}{H_3}NH)$ 1. Dal composto pirrolpotassico e fosgene (Ciamician e Magnaghi [6]). 2. Riscaldando il carbonilpirrolo a 250° (gli stessi [7]). — Aghetti o prismi trimetrici, p. f. 160°. Non viene decomposto dalla potassa, dà col nitrato d'argento ammoniacale un composto $CO(C_4H_3NAg)_2$.

TABELLA VI (continuazione).

	PRODOTTI DI SOSTITUZIONE CON RADICALI ORGANICI NEGATIVI	
CO CH_3	**Pirrilmetilchetone** (α-acetilpirrolo) $C_4 H_3 (CO\overset{\alpha}{}CH_3) NH$ 1. Dal composto pirrolpotassico col cloruro d'acetile (Ciamician e Dennstedt [8]). 2. Dal pirrolo con l'anidride acetica (R. Schiff [9], Ciamician e Dennstedt [8]). 3. Dal n-acetilpirrolo riscaldandolo a 250-280° (Ciamician e Magnaghi [7]). — Aghi lunghi, senza colore o tavole monocline, p. f. 90°, p. eb. 220°. Non viene decomposto dalla potassa, dà un composto argentico ($C_4 H_3 (COCH_3) N$) Ag bianco. **Pirrilmetilacetossima** $C_4 H_3 [C (NOH) CH_3] NH$ Dal pirrilmetilchetone coll'idrossilammina (Ciamician e Dennstedt [11]). — Aghi senza colore, p. f. 145-146°. **Pirrilmetilchetonfenilidrazina** $C_4 H_3 [C (N_2 HC_6 H_5) CH_3] NH$ Dal pirrilmetilchetone coll'acetato di fenilidrazina (Ciamician e Dennstedt [11]). — Polvere bianca alterabilissima, p. f. 146-147°. **Pirrilmetilpinacone** $(C_4 H_3 NH) . C (OH . CH_3) . C (OHCH_3) . (C_4 H_3 NH)$ Dal pirrilmetilchetone con amalgama di sodio (Dennstedt e Zimmermann [12]). — Cristalli monoclini di splendore vitreo, contengono due mol. di $H_2 O$, p. f. 98°, il composto deacquificato fonde a 120°.	**n-Acetilpirrolo** $C_4 H_4 N CO\overset{n}{}CH_3$ 1. Dal composto pirrolpotassico e cloruro d'acetile (Ciamician e Dennstedt[8]). 2. Dal pirrolo con anidride acetica (gli stessi[8]). 3. Dall'acido carbopirrolico con anidride acetica (Ciamician e Silber [10]).— Liquido p. eb. 181-182°, si scinde colla potassa in CO_2 e pirrolo. Riduce la soluzione d'argento ammoniacale.
CO . $CH_2 CH_3$	**c-Propionilpirrolo** (Etilpirrilchetone) $C_4 H_3 (CO . \overset{\alpha\,(?)}{C_2} H_5) NH$ Dal pirrolo con anidride propionica (Dennstedt e Zimmermann [13]). — Aghi senza colore p. f. 52°, p. eb. 222-225°. Dà un composto argentico bianco $C_4 H_3 (COC_2 H_5) N Ag$.	**n-Propionilpirrolo** $C_4 H_4 N CO\overset{n}{}C_2 H_5$ Dal pirrolo con anidride propionica (Dennstedt e Zimmermann [13]). — Liquido, p. eb. 192-194°.
CO $C_6 H_5$	**c-Benzoilpirrolo** (Fenilpirrilchetone) $C_4 H_3 (CO \overset{\alpha\,(?)}{C_6} H_5) NH$ Dal pirrolo con anidride benzoica (Ciamician e Dennstedt [11]). — Piccoli aghetti o squamette bianche p. f. 77-78°. Dà un composto argentico giallo $C_4 H_3 (CO C_6 H_5) N Ag$.	**n-Benzoilpirrolo** (?) $C_4 H_4 N \overset{n}{C_6} H_5$ Dal pirrolo con anidride benzoica in piccola quantità (Ciamician e Dennstedt [11]). — Liquido oleoso.

Dal pirrolo con anidride ftalica ed acido acetico glaciale a 180-190° (Ciamician e Dennstedt [11]). — Aghi lunghi, gialli, p. f. 240-241°. Non dà un composto argentico.

Acido pirrolenfenilcarbinol-o-carbonico



Dalla pirrolenftalide con potassa (Ciamician e Dennstedt [11]). — Mammelloncini che si scompongono verso i 174°, trasformandosi nell'anidride.

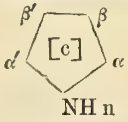
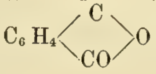
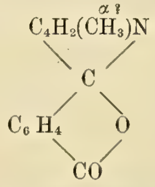
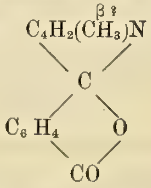
Etere metilico dell'acido pirrolenfenilcarbinol-o-carbonico $C_{12} H_8 NO_3 CH_3$

Saturando la soluzione dell'acido nell'alcool metilico con H Cl gassoso, o trattando il sale argentico con joduro metilico (Ciamician e Dennstedt [11]). — Tavole monocline, p. f. 104-105°.

$CO\,CH_3$, CH_3	**α-Metilpirrilmetilchetone** (α-metil-α'-acetilpirrolo) $C_4 H_2 (\overset{\alpha'}{CO}CH_3)(\overset{\alpha}{CH_3}) NH$ Dal miscuglio dei due c-metilpirroli con anidride acetica (Ciamician e Silber [14]). — Piccoli aghetti bianchi, p. f. 85-86°, p. eb. 240°. Dà un composto argentico bianco $C_4 H_2 (\overset{\alpha}{CO}CH_3)(\overset{\alpha}{CH_3}) N Ag$.	**n-Metilpirrilmetilchetone** (n-Metil-α-acetilpirrolo) $C_4 H_3 (\overset{\alpha (?)}{CO}CH_3) N \overset{n}{CH_3}$ Dal n-metilpirrolo con anidride acetica (Ciamician e Dennstedt [11]). — Olio senza colore p. eb. 200-202°. Non viene decomposto dalla potassa.	**n-Acetil-c-metilpirrolo** (n-Acetilomopirrolo) $C_4 H_3 (\overset{\alpha ?}{CH_3}) N \overset{n}{CO}CH_3$ Dal miscuglio dei due c-metilpirroli con anidride acetica (Ciamician e Silber [14]). — Olio, p. eb. intorno a 196-197°. Viene decomposto dalla potassa in CO_2 e c-metilpirrolo.
$CO\,CH_3$, $C_2 H_5$	**c-Etilpirrilmetilchetone** (c-etil-c-acetilpirrolo) $C_4 H_2 (\overset{\alpha (?)}{CO}CH_3)(\overset{\beta (?)}{C_2} H_5) NH$ Dal c-etilpirrolo con anidride acetica (Dennstedt e Zimmermann [15]). — Cristalli senza colore p. f. 47°, p. eb. 249-250°. Dà un composto argentico bianco e cristallino $C_4 H_2 (COCH_3)(C_2 H_5) N Ag$.		**n-Acetil-c-etilpirrolo** $C_4H_3(\overset{\beta ?}{C_2}H_5) N \overset{n}{CO}CH_3$ Dal c-etilpirrolo con anidride acetica (Dennstedt e Zimmermann [15]). — Liquido senza colore bolle fra 220-230°.
$CO . CH_3$, $C_3 H_7$ iso	**c-Isopropilpirrilmetilchetone** (c-isopropil-c-acetilpirrolo) $C_4 H_2 (\overset{\alpha ?}{CO}CH_3)(\overset{\beta ?}{C_3} H_7) NH$ (iso) Dal c-isopropilpirrolo con anidride acetica (Dennstedt e Zimmermann [16]). — Pagliette senza colore o tavolette monocline p. f. 64°; p. eb. 251°. Dà un composto argentico bianco e cristallino $C_4 H_2 (COCH_3)(C_3 H_7) N Ag$.		**n-Acetil-c-isopropilpirrolo** $C_4 H_3 (\overset{\beta ?}{C_3} H_7) N \overset{n}{CO}CH_3$ Dal c-isopropilpirrolo con anidride acetica (Dennstedt e Zimmermann [16]). — Liquido oleoso che bolle fra 222° e 232°.

β′ β α′ [c] α NH n	Prodotti di sostituzione con radicali organici negativi		
$CO\,CH_3$	**Pirrilmetilchetone** (α-acetilpirrolo) $C_4H_3(CO\overset{\alpha}{C}H_3)NH$ 1. Dal composto pirrolpotassico col cloruro d'acetile (Ciamician e Dennstedt [8]). 2. Dal pirrolo con l'anidride acetica (R. Schiff [9], Ciamician e Dennstedt [8]). 3. Dal n-acetilpirrolo riscaldandolo a 250-280° (Ciamician e Magnaghi [7]). — Aghi lunghi, senza colore o tavole monocline, p. f. 90°, p. eb. 220°. Non viene decomposto dalla potassa, dà un composto argentico $(C_4H_3(COCH_3)N)Ag$ bianco. **Pirrilmetilacetossima** $C_4H_3[C(NOH)CH_3]NH$ Dal pirrilmetilchetone coll'idrossilammina (Ciamician e Dennstedt [11]). — Aghi senza colore, p. f. 145-146°. **Pirrilmetilchetonfenilidrazina** $C_4H_3[C(N_2HC_6H_5)CH_3]NH$ Dal pirrilmetilchetone coll'acetato di fenilidrazina (Ciamician e Dennstedt [11]). — Polvere bianca alterabilissima, p. f. 146-147°. **Pirrilmetilpinacone** $(C_4H_3NH).C(OH.CH_3).C(OHCH_3).(C_4H_3NH)$ Dal pirrilmetilchetone con amalgama di sodio (Dennstedt e Zimmermann [12]). — Cristalli monoclini di splendore vitreo, contengono due mol. di H_2O, p. f. 98°, il composto deacquificato fonde a 120°.		**n-Acetilpirrolo** $C_4H_4NCO\overset{n}{C}H_3$ 1. Dal composto pirrolpotassico e cloruro d'acetile (Ciamician e Dennstedt [8]). 2. Dal pirrolo con anidride acetica (gli stessi [8]). 3. Dall'acido carbopirrolico con anidride acetica (Ciamician e Silber [10]).— Liquido p. eb. 181-182°, si scinde colla potassa in CO_2 e pirrolo. Riduce la soluzione d'argento ammoniacale.
$CO.CH_2CH_3$	**c-Propionilpirrolo** (Etilpirrilchetone) $C_4H_3(CO.\overset{\alpha(?)}{C_2}H_5)NH$ Dal pirrolo con anidride propionica (Dennstedt e Zimmermann [13]). — Aghi senza colore p. f. 52°, p. eb. 222-225°. Dà un composto argentico bianco $C_4H_3(COC_2H_5)NAg$.		**n-Propionilpirrolo** $C_4H_4NCO\overset{n}{C}_2H_5$ Dal pirrolo con anidride propionica (Dennstedt e Zimmermann [13]). — Liquido, p. eb. 192-194°.
$CO\,C_6H_5$	**c-Benzoilpirrolo** (Fenilpirrilchetone) $C_4H_3(CO\overset{\alpha(?)}{C_6}H_5)NH$ Dal pirrolo con anidride benzoica (Ciamician e Dennstedt [11]). — Piccoli aghetti o squamette bianche p. f. 77-78°. Dà un composto argentico giallo $C_4H_3(COC_6H_5)NAg$.		**n-Benzoilpirrolo** (?) $C_4H_4NC_6\overset{n}{H}_5$ *Dal pirrolo con anidride benzoica in piccola quantità (Ciamician e Dennstedt [11]). — Liquido oleoso.*
$CO.CH:CH.C_6H_5$	**α-Cinnamilpirrolo** $C_4H_3(CO.CH=CH\,C_6H_5)NH$ *Dal pirrilmetilchetone con aldeide benzoica in presenza di potassa (Ciamician e Dennstedt [11]). — Aghi gialli p. f. 141-142°. Dà un composto argentico giallo $C_4H_3(CO.CH:CH.C_6H_5)NAg$.*		
$C_6H_4<^{C}_{CO}>O$	**Pirrolenftalide** $C_6H_4<^{C(C_4H_3N)}_{CO}>O$ Dal pirrolo con anidride ftalica ed acido acetico glaciale a 180-190° (Ciamician e Dennstedt [11]). — Aghi lunghi, gialli, p. f. 240-241°. Non dà un composto argentico. **Acido pirrolenfenilcarbinol-o-carbonico** $C_6H_4<^{C(OH)(C_4H_3N)}_{COOH}$ Dalla pirrolenftalide con potassa (Ciamician e Dennstedt [11]). — Mammelloncini che si scompongono verso i 174°, trasformandosi nell'anidride. **Etere metilico dell'acido pirrolenfenilcarbinol-o-carbonico** $C_{12}H_8NO_3CH_3$ Saturando la soluzione dell'acido nell'alcool metilico con HCl gassoso, o trattando il sale argentico con joduro metilico (Ciamician e Dennstedt [11]). — Tavole monocline, p. f. 104-105°.		
$CO\,CH_3,\ CH_3$	**α-Metilpirrilmetilchetone** (α-metil-α'-acetilpirrolo) $C_4H_2(CO\overset{\alpha'}{C}H_3)(\overset{\alpha}{C}H_3)NH$ Dal miscuglio dei due c-metilpirroli con anidride acetica (Ciamician e Silber [14]). — Piccoli aghetti bianchi, p. f. 85-86°, p. eb. 240°. Dà un composto argentico bianco $C_4H_2(CO\overset{\alpha}{C}H_3)(\overset{\alpha}{C}H_3)NAg$.	**n-Metilpirrilmetilchetone** (n-Metil-α-acetilpirrolo) $C_4H_3(CO\overset{\alpha(?)}{C}H_3)N\overset{n}{C}H_3$ Dal n-metilpirrolo con anidride acetica (Ciamician e Dennstedt [11]). — Olio senza colore p. eb. 200-202°. Non viene decomposto dalla potassa.	**n-Acetil-c-metilpirrolo** (n-Acetilomopirrolo) $C_4H_3(\overset{\alpha?}{C}H_3)N\overset{n}{C}OCH_3$ Dal miscuglio dei due c-metilpirroli con anidride acetica (Ciamician e Silber [14]). — Olio, p. eb. intorno a 196-197°. Viene decomposto dalla potassa in CO_2 e c-metilpirrolo.
$CO\,CH_3,\ C_2H_5$	**c-Etilpirrilmetilchetone** (c-etil-c-acetilpirrolo) $C_4H_2(CO\overset{\alpha(?)}{C}H_3)(\overset{\beta(?)}{C_2}H_5)NH$ Dal c-etilpirrolo con anidride acetica (Dennstedt e Zimmermann [15]). — Cristalli senza colore p. f. 47°, p. eb. 249-250°. Dà un composto argentico bianco e cristallino $C_4H_2(COCH_3)(C_2H_5)NAg$.		**n-Acetil-c-etilpirrolo** $C_4H_3(\overset{\beta?}{C_2}H_5)NCO\overset{n}{C}H_3$ Dal c-etilpirrolo con anidride acetica (Dennstedt e Zimmermann [15]). — Liquido senza colore bolle fra 220-230°.
$CO.CH_3,\ C_3H_7$ iso	**c-Isopropilpirrilmetilchetone** (c-isopropil-c-acetilpirrolo) $C_4H_2(CO\overset{\alpha?}{C}H_3)(\overset{\beta?}{C_3}H_7)NH$ iso Dal c-isopropilpirrolo con anidride acetica (Dennstedt e Zimmermann [16]). — Pagliette senza colore o tavolette monocline p. f. 64°; p. eb. 251°. Dà un composto argentico bianco e cristallino $C_4H_2(COCH_3)(C_3H_7)NAg$.		**n-Acetil-c-isopropilpirrolo** $C_4H_3(\overset{\beta?}{C_3}H_7)NCO\overset{n}{C}H_3$ Dal c-isopropilpirrolo con anidride acetica (Dennstedt e Zimmermann [16]). — Liquido oleoso che bolle fra 222° e 232°.

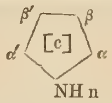
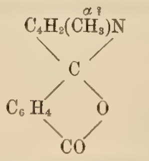
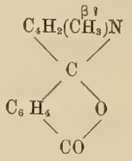
TABELLA VI (continuazione).

	PRODOTTI DI SOSTITUZIONE CON RADICALI ORGANICI NEGATIVI
CO CH:CH . C_6H_5 , C_2H_5	**c-Etil-c-cinnamilpirrolo** $C_4H_2(CO\,CH:\overset{\alpha ?}{C}H\,C_6H_5)(\overset{\beta ?}{C_2}H_5)NH$ Dal c-etil-c-acetilpirrolo con aldeide benzoica e potassa (Dennstedt e Zimmermann [15]). — Aghi gialli, p. f. 149-150°. Dà un composto argentico $C_4H_2(CO\,C_2H_2\,C_6H_5)(C_2H_5)N\,Ag$.
CO CH:CH . C_6H_5 , C_3H_7	**c-Isopropil-c-cinnamilpirrolo** $C_4H_2(CO\,CH:\overset{\alpha ?}{C}H\,.\,C_6H_5)(\overset{\beta ?}{C_3}H_7)NH$ Dal c-isopropil-c-acetilpirrolo con aldeide benzoica e potassa (Dennstedt e Zimmermann [16]). — Tavolette trimetriche, gialle, p. f. 142-143°.
 , CH_3	**α-Metilpirrolenftalide** (?)  Dall'omopirrolo che bolle a 142-143° con anidride ftalica ed acido acetico glaciale a 200° (Dennstedt e Zimmermann [17]). — Aghi gialli p. f. 215° (rammolliscono a 205°). **Acido α-metilpirrolenfenilcarbinol-o-carbonico** $C_6H_4\left\langle\begin{matrix}C(OH)\,.\,(C_4H_2(\overset{\alpha ?}{CH_3})N)\\COOH\end{matrix}\right.$ (?) Dall'anidride con potassa (Dennstedt e Zimmermann [17]). — Cristalli senza colore p. f. 159°. **β-Metilpirrolenftalide** (?)  Dall'omopirrolo che bolle a 147-148° con anidride ftalica ad acido acetico glaciale a 240° (Dennstedt e Zimmermann [17]). — Aghi gialli p. f. 157° (rammolliscono a 151°). **Acido-β-metilpirrolenfenilcarbinol-o-carbonico** $C_6H_4\left\langle\begin{matrix}C(OH)\,.\,(C_4H_2(\overset{\beta ?}{CH_3})N)\\COOH\end{matrix}\right.$ (?) Dall'anidride con potassa (Dennstedt e Zimmermann [17]). — Cristalli senza colore p. f. 170-172°.

	colore, p. f. 161-162°. Dà col nitrato d'argento ammoniacale un composto argentico $[C_4H_2(CO\,CH_3)_2\,N\,Ag]$ bianco e colla potassa bollente e concentrata un composto potassico che cristallizza in aghi senza colore.
$CO\,C_2H_5$, $CO\,C_2H_5$	**Pirrilendietildichetone** (*αα'*-dipropionilpirrolo) ? $C_4H_2(\overset{\alpha\alpha'?}{CO}\,C_2H_5)_2\,NH$ Dal pirrolo con anidride propionica a 260° (Dennstedt e Zimmermann [13]). — Pagliette senza colore, p. f. 116-117°.
$CO.C_2H_2.C_6H_5$, $CO.C_2H_2.C_6H_5$	*αα'*-**Dicinnamilpirrolo** $C_4H_2(\overset{\alpha\alpha'?}{CO\,.\,CH:CH}\,.\,C_6H_5)_2\,NH$ Dal *αα'*-diaacetilpirrolo con aldeide benzoica in presenza di potassa (Ciamician e Dennstedt [11]). — Squamette o aghi appiattiti gialli, p. f. 238-240°, dà con acido solforico concentrato una colorazione violetta intensa.
$CO\,CH_3$, CH_3, CH_3	**Dimetilpirrilmetilchetone** ? (*αα'*-dimetil-*β*-acetilpirrolo) (?) $C_4H(\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2(CO\,\overset{\beta?}{CH_3})\,NH$ Si ottiene in piccola quantità dal *αα'*-dimetilpirrolo con anidride acetica (Dennstedt e Zimmermann [15]). — Aghetti, p. f. intorno a 83-85°. **n-Acetil-*αα'*-dimetilpirrolo** $C_4H_2(\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2\,N\,\overset{n}{CO}\,CH_3$ Dall'*αα'*-dimetilpirrolo con anidride acetica (Weidel e Ciamician [21], Dennstedt e Zimmermann [15]). — Liquido oleoso, bolle fra 260-280°.
$CO\,CH_3$, $CO\,CH_3$, CH_3	**n-Metil-*αα'*-diacetilpirrolo** $C_4H_2(\overset{\alpha\alpha'?}{CO}\,CH_3)_2\,N\,\overset{n}{CH_3}$ Dall'n-metilpirrolo con anidride acetica a 250° (Ciamician e Silber [22]). — Aghetti senza colore, p. f. 133-134°.
$CO\,CH_3$, $CO\,CH_3$, $CH_2.C_6H_5$	**n-Benzil-*αα'*-diacetilpirrolo** $C_4H_2(\overset{\alpha\alpha'?}{CO}\,CH_3)_2\,N\,.\,\overset{n}{CH_2}\,C_6H_5$ Dall'n-benzilpirrolo con anidride acetica a 240° (Ciamician e Silber [22]). — Pagliette senza colore, p. f. 129-130°.

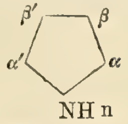
1) R. Acc. L. T. VII (1882-1883). — Gazz. XIII, pag. 102. — Berl. Ber. 16, pag. 64.
2) R. Acc. L. M. [3] XII (1881-1882). — Gazz. XIII, pag. 14. — Berl. Ber. 15, pag. 2579.
3) L. Ann. 116, pag. 257.
4) Monatshefte für Chemie 1880, pag. 279. — Gazz. XI, pag. 28.
5) R. Acc. L. M. [3] XVIII (1883-1884). — Gazz. XIV, pag. 162. — Berl. Ber. 17, pag. 1150.
6) R. Acc. L. R. I (1885). — Gazz. XV, pag. 282. — Berl. Ber. 18, pag. 414.
7) R. Acc. L. R. I (1885). — Gazz. XV, pag. 256. — Berl. Ber. 18, pag. 1828.
8) R. Acc. L. M. [3] XV (1882-1883). — Gazz. XIII, pag. 455. — Berl. Ber. 16, pag. 2348.
9) Berl. Ber. X (1877) pag. 1501.
10) R. Acc. L. T. VIII 1883.— Gazz. XIII, pag. 563.— Berl. Ber. 17, pag. 103.
11) R. Acc. L. M. [3] XIX (1883-1884). — Gazz. XV, pag. 9. — Berl. Ber. 17, 2944.
12) Berl. Ber. 1886, pag. 2204.
13) Berl. Ber. 1887, pag. 1760.
14) R. Acc. L. R. (1886). — Gazz. XVI, pag. 352. — Berl. Ber. 19, pag. 1408.
15) Berl. Ber. (1886), pag. 2189.
16) Berl. Ber. (1887), pag. 850.
17) Berl. Ber. (1886), pag. 2200.
18) R. Acc. L. R. I (1885). — Gazz. XV, 175. — Berl. Ber. 18, pag. 879.
19) R. Acc. L. R. I (1885). — Gazz. XV, pag. 248. — Berl. Ber. 18, pag. 1466.
20) R. Acc. L. R. I (1885). — Gazz. XV, pag. 193. — Berl. Ber. 18, pg. 881.
21) Berl. Ber. XIII, 77.
22) R. Acc. L. R. III (1887). — Gazz. XVII, pag. 134. — Berl. Ber. 20, pag. 1368.

TABELLA VI (continuazione).

	PRODOTTI DI SOSTITUZIONE CON RADICALI ORGANICI NEGATIVI	
CO CH:CH . C_6H_5 , C_2H_5	**c-Etil-c-cinnamilpirrolo** $C_4H_2(CO\ CH\overset{\alpha ?}{:}CH\ C_6H_5)(\overset{\beta ?}{C_2}H_5)NH$ Dal c-etil-c-acetilpirrolo con aldeide benzoica e potassa (Dennstedt e Zimmermann [15]). — Aghi gialli, p. f. 149-150°. Dà un composto argentico $C_4H_2(CO\ C_2H_2\ C_6H_5)(C_2H_5)N\ Ag$.	
CO CH:CH . C_6H_5 , C_3H_7	**c-Isopropil-c-cinnamilpirrolo** $C_4H_2(CO\ CH\overset{\alpha ?}{:}CH\ .\ C_6H_5)(\overset{\beta ?}{C_3}H_7)NH$ Dal c-isopropil-c-acetilpirrolo con aldeide benzoica e potassa (Dennstedt e Zimmermann [16]). — Tavolette trimetriche, gialle, p. f. 142-143°.	
$C_6H_4<\genfrac{}{}{0pt}{}{C}{CO}>O$, CH_3	**α-Metilpirrolenftalide** (?)  Dall'omopirrolo che bolle a 142-143° con anidride ftalica ed acido acetico glaciale a 200° (Dennstedt e Zimmermann [17]). — Aghi gialli p. f. 215° (rammolliscono a 205°). **Acido α-metilpirrolenfenilcarbinol-o-carbonico** $C_6H_4<\genfrac{}{}{0pt}{}{C(OH)\ .\ (C_4H_2(\overset{\alpha ?}{CH_3})N)}{COOH}$ (?) Dall'anidride con potassa (Dennstedt e Zimmermann [17]). — Cristalli senza colore p. f. 159°.	**β-Metilpirrolenftalide** (?)  Dall'omopirrolo che bolle a 147-148° con anidride ftalica ad acido acetico glaciale a 240° (Dennstedt e Zimmermann [17]). — Aghi gialli p. f. 157° (rammolliscono a 151°). **Acido-β-metilpirrolenfenilcarbinol-o-carbonico** $C_6H_4<\genfrac{}{}{0pt}{}{C(OH)\ .\ (C_4H_2(\overset{\beta ?}{CH_3})N)}{COOH}$ (?) Dall'anidride con potassa (Dennstedt e Zimmermann [17]). — Cristalli senza colore p. f. 170-172°.
CO CH_3 , SO_3 H	**Acido pirrilmetilchetonsolfonico** $C_4H_2(CO\overset{\alpha}{C}H_3)(\overset{\alpha ?}{SO_3}H)NH$ Dal pirrilmetilchetone con acido solforico fumante (Ciamician e Silber [18]). — Il sale potassico $[C_4H_2(COCH_3)(SO_3K)NH]$ forma aghi lunghi, senza colore.	
CO CH_3 , CO CH_3	**Pirrilendimetildichetone** (αα'-diacetilpirrolo) $C_4H_2(CO\ CH_3)_2NH$ 1. Dal pirrolo con anidride acetica a 240-250° (Ciamician e Silber [19]). 2. Dal pirrilmetilchetone con anidride acetica a 230-250° (Ciamician e Dennstedt [11]). 3. Dal n-acetilpirrolo con anidride acetica a 290-300° (Ciamician e Silber [20]). — Aghi senza colore, p. f. 161-162°. Dà col nitrato d'argento ammoniacale un composto argentico $[C_4H_2(CO\ CH_3)_2\ N\ Ag]$ bianco e colla potassa bollente e concentrata un composto potassico che cristallizza in aghi senza colore.	
CO C_2H_5 , CO C_2H_5	**Pirrilendietildichetone** (αα'-dipropionilpirrolo) ? $C_4H_2(CO\ \overset{\alpha\alpha' ?}{C_2}H_5)_2NH$ Dal pirrolo con anidride propionica a 260° (Dennstedt e Zimmermann [13]). — Pagliette senza colore, p. f. 116-117°.	
CO . C_2H_2 . C_6H_5 , CO . C_2H_2 . C_6H_5	**αα'-Dicinnamilpirrolo** $C_4H_2(CO\ .\ CH\overset{\alpha\alpha' ?}{:}CH\ .\ C_6H_5)_2NH$ Dal αα'-diaacetilpirrolo con aldeide benzoica in presenza di potassa (Ciamician e Dennstedt [11]). — Squamette o aghi appiattiti gialli, p. f. 238-240°, dà con acido solforico concentrato una colorazione violetta intensa.	
CO CH_3 , CH_3 , CH_3	**Dimetilpirrilmetilchetone** ? (αα'-dimetil-β-acetilpirrolo) (?) $C_4H(\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2(CO\ \overset{\beta ?}{CH_3})NH$ Si ottiene in piccola quantità dal αα'-dimetilpirrolo con anidride acetica (Dennstedt e Zimmermann [15]). — Aghetti, p. f. intorno a 83-85°.	**n-Acetil-αα'-dimetilpirrolo** $C_4H_2(\overset{\alpha\alpha'}{CH_3})_2N\ \overset{n}{CO}\ CH_3$ Dall'αα'-dimetilpirrolo con anidride acetica (Weidel e Ciamician [21], Dennstedt e Zimmermann [15]). — Liquido oleoso. bolle fra 260-280°.
CO CH_3 , CO CH_3 , CH_3	**n-Metil-αα'-diacetilpirrolo** $C_4H_2(\overset{\alpha\alpha' ?}{CO}\ CH_3)_2N\ \overset{n}{C}H_3$ Dall'n-metilpirrolo con anidride acetica a 250° (Ciamician e Silber [22]). — Aghetti senza colore, p. f. 133-134°.	
CO CH_3 , CO CH_3 , CH_2 . C_6H_5	**n-Benzil-αα'-diacetilpirrolo** $C_4H_2(\overset{\alpha\alpha' ?}{CO}\ CH_3)_2N\ .\ \overset{n}{CH_2}\ C_6H_5$ Dall'n-benzilpirrolo con anidride acetica a 240° (Ciamician e Silber [22]). — Pagliette senza colore, p. f. 129-130°.	

[1]) R. Acc. L. T. VII (1882-1883). — Gazz. XIII, pag. 102. — Berl. Ber. 16, pag. 64.
[2]) R. Acc. L. M. [3] XII (1881-1882). — Gazz. XIII, pag. 14. — Berl. Ber. 15, pag. 2579.
[3]) L. Ann. 116, pag. 257.
[4]) Monatshefte für Chemie 1880, pag. 279. — Gazz. XI, pag. 28.
[5]) R. Acc. L. M. [3] XVIII (1883-1884). — Gazz. XIV, pag. 162. — Berl. Ber. 17, pag. 1150.
[6]) R. Acc. L. R. I (1885). — Gazz. XV, pag. 282. — Berl. Ber. 18, pag. 414.
[7]) R. Acc. L. R. I (1885). — Gazz. XV, pag. 256. — Berl. Ber. 18, pag. 1828.
[8]) R. Acc. L. M. [3] XV (1882-1883). — Gazz. XIII, pag. 455. — Berl. Ber. 16, pag. 2348.
[9]) Berl. Ber. X (1877) pag. 1501.
[10]) R. Acc. L. T. VIII 1883.— Gazz. XIII, pag. 563.— Berl. Ber. 17, pag. 103.
[11]) R. Acc. L. M. [3] XIX (1883-1884). — Gazz. XV, pag. 9. — Berl. Ber. 17, 2944.
[12]) Berl. Ber. 1886, pag. 2204.
[13]) Berl. Ber. 1887, pag. 1760.
[14]) R. Acc. L. R. (1886). — Gazz. XVI, pag. 352. — Berl. Ber. 19, pag. 1408.
[15]) Berl. Ber. (1886), pag. 2189.
[16]) Berl. Ber. (1887), pag. 850.
[17]) Berl. Ber. (1886), pag. 2200.
[18]) R. Acc. L. R. I (1885). — Gazz. XV, 175. — Berl. Ber. 18, pag. 879.
[19]) R. Acc. L. R. I (1885). — Gazz. XV, pag. 248. — Berl. Ber. 18, pag. 1466.
[20]) R. Acc. L. R. I (1885). — Gazz. XV, pag. 193. — Berl. Ber. 18, pg. 881.
[21]) Berl. Ber. XIII, 77.
[22]) R. Acc. L. R. III (1887). — Gazz. XVII, pag. 134. — Berl. Ber. 20, pag. 1368.

TABELLA VII.

	COMPOSTI IDROGENATI
[H , H]	**Pirrolina** (Diidropirrolo) $C_4 H_4 \overset{\alpha\beta ?}{[H_2]} NH = C_4 H_6 NH$ Dal pirrolo con polvere di zinco ed acido acetico (Ciamician e Dennstedt [1]). — Liquido senza colore; p. eb. 90-91° a 750°,5 mm. (cor.). Il cloridrato $[C_4 H_6 NH . H Cl]$ forma prismi incolori, appiattiti, deliquescenti p. f. 173-174°. Il cloroplatinato $[(C_4 H_7 N H Cl)_2 Pt Cl_4]$ forma grossi cristalli triclini, giallo-ranciati.
[H , H] . NO	**Nitrosopirrolina** $C_4 H_6 N . NO$ Dal solfato di pirrolina con nitrito sodico in soluzione solforica (Ciamician e Dennstedt [1]). — Cristalli incolori, p. f. 37-38°.
[H , H] . CH_3	**n-Metilpirrolina** $C_4 H_6 N \overset{n}{C}H_3$ Dal n-metilpirrolo con polvere di zinco ed acido acetico (Ciamician e Magnaghi [2]). — Liquido senza colore, p. eb. 79-80°. Il cloroplatinato forma aghi giallo-ranciati o ottaedri trimetrici $[(C_4 H_6 N CH_3 H Cl)_2 Pt Cl_4]$.
[H , H , CH_3 , I] CH_3	**Jodometilato di n-metilpirrolina** (Joduro di dimetilpirrolilammonio) $C_4 H_6 N CH_3 . CH_3 I$ 1. Dalla pirrolina con joduro di metile (Ciamician e Dennstedt [1]). 2. Dalla metilpirrolina con joduro metilico (Ciamician e Magnaghi [2]). — Squamette senza colore, madreperlacee, fondono scomponendosi verso 286°.
[H , H , CH_3 , Cl] CH_3	**Clorometilato di n-metilpirrolina** (Cloruro di dimetilpirrolilammonio) Dal jodometilato con Ag Cl (Ciamician e Dennstedt [1]). — Il cloroplatinato $[C_4 H_6 N CH_3 CH_3 Cl]_2 Pt Cl_4$ forma un precipitato giallo, polverulento o aghi grossi, giallo-ranciati, contenenti acqua di cristallizzazione.
[H , H , Br , Br]	**Bibromuro di pirrolina** (Bibromopirrolidina) $C_4 Br_2 H_6 NH$ (?) Dal cloridrato di pirrolina con bromo (Ciamician e Magnaghi [2]). — Liquido denso. Il cloroplatinato $[(C_4 H_6 Br_2 NH) . H Cl]_2 Pt Cl_4 + 2 OH_2$ forma grossi aghi giallo-ranciati.
[H , H , H , H]	**Pirrolidina** (Diidropirrolina, Tetraidropirrolo) $C_4 H_4 \overset{\alpha\alpha'\beta\beta'}{[H_4]} NH = C_4 H_8 NH$ 1. Dalla pirrolina con acido jodidrico e fosforo rosso a 240-250° (Ciamician e Magnaghi [2]). 2. Riducendo il cianuro di etilene con sodio ed alcool (Ladenburg [4]). 3. Distillando il cloridrato di tetrametilendiammina (Ladenburg [5]). 4. Riducendo l'imide succinica con sodio ed alcool (Ladenburg [6]). — Liquido senza colore, di odore simile a quello della piperidina, p. eb. 82-83°. — *Il cloridrato* $[C_4 H_8 NH . H Cl]$ è deliquescente; *il cloroplatinato*

	$C_4H_8NCH_3$	$C_4H_7(CH_3)NH$	[illegible]
	1. Dalla pirrolidina con CH_3I (Ciamician e Magnaghi [2]). 2. Riducendo la n-metilpirrolina con acido jodidrico e fosforo a 240-250° (Ciamician e Magnaghi [2]). — Liquido senza colore, p. eb. 81-83°. — *Il cloroaurato* $[(C_4H_8NCH_3HCl)AuCl_3)]$ forma pagliette gialle.	Riducendo la α-ossi-α′-metilpirrolidina con sodio ed alcool amilico bollente (Tafel [7]). — Liquido senza colore p. eb. 96-97° a 737 mm.	Distillando il cloridrato della β-metiltetrametilendiammina (Oldach [8]). — Liquido senza colore p. eb. 103-105°. — *Il cloroplatinato* forma lunghi prismi, si scompone a 294°; *il cloroaurato* forma tavolette quadrate microscopiche che si aggregano a forma di penna, p. f. 170°; *il picrato* è molto solubile, p. f. 105°; *il sale doppio di bismuto* $3(C_5H_{11}NHI).2BiI_3$ forma aghetti rossi; *la nitrosammina* bolle a 223-224°.

$[H, H, H, H, CH_3, J]CH_3$

Jodometilato di n-metilpirrolidina (Joduro di dimetilpirrolidilammonio) $C_4H_8NCH_3 . CH_3I$

Dalla n-metilpirrolidina con joduro di metile (Ciamician e Magnaghi [2]). — Aghi grossi senza colore, deliquescenti.

Dimetilquartenilammina (Dimetilpirrolidina) $C_4H_7N(CH_3)_2 = [CH_2:CH . CH_2 . CH_2] . N(CH_3)_2$

Distillando il joduro di dimetilpirrolidilammonio con la potassa solida (Ciamician e Magnaghi [2]). — Liquido incoloro, p. eb. 89-92°.

Joduro di trimetilquartenilammonio (Joduro di trimetilpirrolidilammonio)

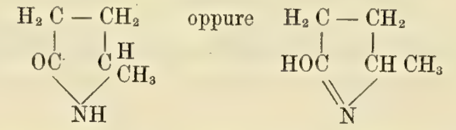
$C_4H_7N(CH_3)_3I = [CH_2:CH . CH_2 . CH_2] . N(CH)_3I$

Dalla dimetilquartenilammina con joduro metilico (Ciamician e Magnaghi [2]). — Piccoli aghetti bianchi. Distillandolo colla potassa si scinde in trimetilammina e nel butino $CH_2:CH . CH:CH_2$ (pirrolilene [9]).

$[H, H, H, H]CH_3, O$

α-Metil-α′-ossipirrolidina (Anidride dell'acido γ-amidovalerianico)

$C_4H_6\overset{\alpha}{(CH_3)}\overset{\alpha'}{(OH)}N$



Distillando l'acido γ-amidovalerianico a 250-260° (Tafel [7]). — Liquido che si solidifica in un miscuglio frigorifero, deliquescente, p. eb. 248° a 743 mm. Dà coll'acido nitroso la nitrosammina.

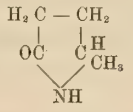
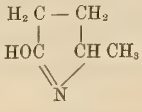
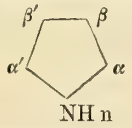
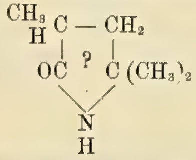
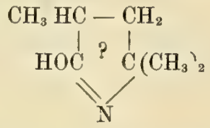
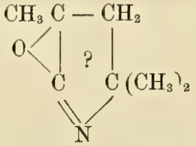
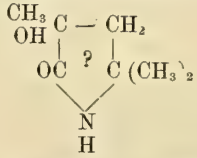
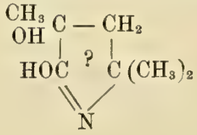
β' — β, α' — α, NH n	COMPOSTI IDROGENATI
[H, H]	**Pirrolina** (Diidropirrolo) $C_4 H_4 \overset{\alpha\beta}{[H_2]} NH = C_4 H_6 NH$ Dal pirrolo con polvere di zinco ed acido acetico (Ciamician e Dennstedt [1]). — Liquido senza colore; p. eb. 90-91° a 750°,5 mm. (cor.). Il cloridrato $[C_4 H_6 NH . H Cl]$ forma prismi incolori, appiattiti, deliquescenti p. f. 173-174°. Il cloroplatinato $[(C_4 H_7 N H Cl)_2 Pt Cl_4]$ forma grossi cristalli triclini, giallo-ranciati.
[H, H] . NO	**Nitrosopirrolina** $C_4 H_6 N . NO$ Dal solfato di pirrolina con nitrito sodico in soluzione solforica (Ciamician e Dennstedt [1]). — Cristalli incolori, p. f. 37-38°.
[H, H] . CH_3	**n-Metilpirrolina** $C_4 H_6 N \overset{n}{C}H_3$ Dal n-metilpirrolo con polvere di zinco ed acido acetico (Ciamician e Magnaghi [2]). — Liquido senza colore, p. eb. 79-80°. Il cloroplatinato forma aghi giallo-ranciati o ottaedri trimetrici $[(C_4 H_6 N CH_3 H Cl)_2 Pt Cl_4]$.
[H, H, CH_3, I] CH_3	**Jodometilato di n-metilpirrolina** (Joduro di dimetilpirrolilammonio) $C_4 H_6 N CH_3 . CH_3 I$ 1. Dalla pirrolina con joduro di metile (Ciamician e Dennstedt [1]). 2. Dalla metilpirrolina con joduro metilico (Ciamician e Magnaghi [2]). — Squamette senza colore, madreperlacee, fondono scomponendosi verso 286°.
[H, H, CH_3, Cl] CH_3	**Clorometilato di n-metilpirrolina** (Cloruro di dimetilpirrolilammonio) Dal jodometilato con Ag Cl (Ciamician e Dennstedt [1]). — Il cloroplatinato $[C_4 H_6 N CH_3 CH_3 Cl]_2 Pt Cl_4$ forma un precipitato giallo, polverulento o aghi grossi, giallo-ranciati, contenenti acqua di cristallizzazione.
[H, H, Br, Br]	**Bibromuro di pirrolina** (Bibromopirrolidina) $C_4 Br_2 H_6 NH$ (?) Dal cloridrato di pirrolina con bromo (Ciamician e Magnaghi [2]). — Liquido denso. Il cloroplatinato $[(C_4 H_6 Br_2 NH) . H Cl]_2 Pt Cl_4 + 2 OH_2$ forma grossi aghi giallo-ranciati.
[H, H, H, H]	**Pirrolidina** (Diidropirrolina, Tetraidropirrolo) $C_4 H_4 \overset{\alpha\alpha'\beta\beta'}{[H_4]} NH = C_4 H_8 NH$ 1. Dalla pirrolina con acido jodidrico e fosforo rosso a 240-250° (Ciamician e Magnaghi [2]). 2. Riducendo il cianuro di etilene con sodio ed alcool (Ladenburg [4]). 3. Distillando il cloridrato di tetrametilendiammina (Ladenburg [5]). 4. Riducendo l'imide succinica con sodio ed alcool (Ladenburg [6]). — Liquido senza colore, di odore simile a quello della piperidina, p. eb. 82-83°. — *Il cloridrato* $[C_4 H_8 NH . H Cl]$ è deliquescente; *il cloroplatinato* $[(C_4 H_9 N . H Cl)_2 Pt Cl_4]$ è molto solubile nell'acqua e forma aghi giallo-ranciati, p. f. verso i 200°; *il cloroaurato* $[(C_4 H_9 N . H Cl) Au Cl_3]$ forma squamette gialle poco solubili, formate da aghi disposti in forma di penna, p. f. 206°; *il sale doppio con joduro di bismuto* $[3 (C_4 H_9 NHI) . 2 Bi I_3]$ è un precipitato rosso, che si trasforma
[H, H, H, H] CH_3	**n-Metilpirrolidina** $C_4 H_8 N \overset{n}{C}H_3$ 1. Dalla pirrolidina con $CH_3 I$ (Ciamician e Magnaghi [2]). 2. Riducendo la n-metilpirrolina con acido jodidrico e fosforo a 240-250° (Ciamician e Magnaghi [2]). — Liquido senza colore, p. eb. 81-83°. — *Il cloroaurato* $[(C_4 H_8 N CH_3 H Cl) Au Cl_3)]$ forma pagliette gialle. **α-Metilpirrolidina** $C_4 H_7 (\overset{\alpha}{C}H_3) NH$ Riducendo la α-ossi-α'-metilpirrolidina con sodio ed alcool amilico bollente (Tafel [7]). — Liquido senza colore p. eb. 96-97° a 737 mm. **β-Metilpirrolidina** $C_4 H_7 (\overset{\beta}{C}H_3) NH$ Distillando il cloridrato della β-metiltetrametilendiammina (Oldach [8]). — Liquido senza colore p. eb. 103-105°. — *Il cloroplatinato* forma lunghi prismi, si scompone a 294°; *il cloroaurato* forma tavolette quadrate microscopiche che si aggregano a forma di penna, p. f. 170°; *il picrato* è molto solubile, p. f. 105°; *il sale doppio di bismuto* $3(C_5H_{11}NHI).2 Bi I_3$ forma aghetti rossi; *la nitrosammina* bolle a 223-224°.
[H, H, H, H, CH_3, J] CH_3	**Jodometilato di n-metilpirrolidina** (Joduro di dimetilpirrolidilammonio) $C_4 H_8 N CH_3 . CH_3 I$ Dalla n-metilpirrolidina con joduro di metile (Ciamician e Magnaghi [2]). — Aghi grossi senza colore, deliquescenti. **Dimetilquartenilammina** (Dimetilpirrolidina) $C_4 H_7 N (CH_3)_2 = [CH_2 : CH . CH_2 . CH_2] . N (CH_3)_2$ Distillando il joduro di dimetilpirrolidilammonio con la potassa solida (Ciamician e Magnaghi [2]). — Liquido incoloro, p. eb. 89-92°. **Joduro di trimetilquartenilammonio** (Joduro di trimetilpirrolidilammonio) $C_4 H_7 N (CH_3)_3 I = [CH_2 : CH . CH_2 . CH_2] . N (CH_3)_3 I$ Dalla dimetilquartenilammina con joduro metilico (Ciamician e Magnaghi [2]). — Piccoli aghetti bianchi. Distillandolo colla potassa si scinde in trimetilammina e nel butino $CH_2 : CH . CH : CH_2$ (pirrolilene [9]).
[H, H, H, H] CH_3, O	**α-Metil-α'-ossipirrolidina** (Anidride dell'acido γ-amidovalerianico) $C_4 H_6 (\overset{\alpha}{C}H_3) (\overset{\alpha'}{O}H) N$  oppure  Distillando l'acido γ-amidovalerianico a 250-260° (Tafel [7]). — Liquido che si solidifica in un miscuglio frigorifero, deliquescente, p. eb. 248° a 743 mm. Dà coll'acido nitroso la nitrosammina.

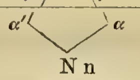
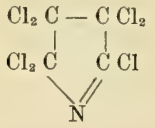
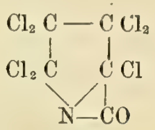
Tabella VII (continuazione).

	COMPOSTI IDROGENATI
[H, H, H, H] CH_3, CH_3, CH_3, O	**α-Dimetil-α′-ossi-β′-metilpirrolidina** (Trimetilossipirrolidina) (?) $C_7H_{13}NO$  oppure  Dall'anidro-diossitrimetilpirrolidina con acido jodidrico e fosforo a 180° o con sodio ed alcool (Weil [3]). — Solida p. f. 79°,5; p. eb. 220°. Forma la nitrosammina che fonde a 98°. Con la polvere di zinco, dà per distillazione probabilmente la trimetilpirrolidina corrispondente.
[H, H, H, H] CH_3, CH_3, CH_3, O	**Anidro-diossitrimetilpirrolidina** (? $C_7H_{11}NO$  Dall'anidride dell' acido amidotrimetilbutilattinico (amido-trimetilossibutirrico) con acido solforico concentrato (Weil [3]). — Cristalli senza colore, p. f. 141°,5, p. eb. intorno ai 240°. Non si combina nè col joduro metilico, anche in presenza di potassa, nè coll'acido nitroso.
[H, H, H, H] CH_3, CH_3, CH_3, OH, O	**Diossitrimetilpirrolidina** (?) (Anidride dell'acido amidotrimetilossibutirrico) $C_7H_{13}NO_2$  oppure  Trattando la diacetonammina con acido cianidrico e cloridrico (Heintz [10]). — Dall'acido amidotrimetilossibutirrico (Heintz [11], Weil [3]). — Solida, p. f. 202°.

[1]) R. Acc. L. M. [3] XV [1882-1883]. — Gazz. XIII, pag. 395. — Berl. Ber. 16, 1536.

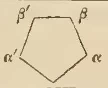
[6]) Berl. Ber. XX (1887), pag. 2215.

[7]) Berl. Ber. XIX (1886), pag. 2414 e XX (1887), pag. 249.

	COMPOSTI D'ADDIZIONE CON GLI ALOGENI
[Cl, I]	**Clorojoduro di pirrolo** $(C_4 H_4 NH) Cl\overset{n}{I} = C_4 H_5 N\langle^{Cl}_{I}$ (?) Dal pirrolo con soluzione cloridrica di cloruro di jodio (M. Dittmar [1]). — Solido, nero, insolubile, poco stabile; con soda si rigenera il pirrolo.
[Cl, Cl, Cl, Cl] Cl, Cl, Cl	**Tetracloruro di percloropirrolo** $C_4 Cl_3 [Cl_4] N$  Dall'imide bicloromaleica con pentacloruro di fosforo a 200° (Ciamician e Silber [2]). — Massa bianca, opalina, molle, p. f. 70-73°, p. eb. 143-144° a 20 mm., a 754 mm. bolle a 261° con svolgimento di cloro. Con acido acetico e polvere di zinco dà il tetracloropirrolo.
[Cl, Cl, Cl, Cl] Cl, Cl, Cl, CO.	**Percloruro di percloropirocolla** $C_4 Cl_3 [Cl_4] {}^{N}_{CO}\rangle = C_5 Cl_7 NO$ $(C_{10} Cl_{14} N_2 O_2$?)  Dalla percloropirocolla con pentacloruro di fosforo a 250° (Ciamician e Danesi [3]) e (Ciamician e Silber [4]). — Cristalli monoclini senza colore, p. f. 146-147°,5. Dà con zinco ed acido acetico il tetracloropirrolo, con acido acetico bollente la bicloromaleinimide e con potassa l'acido bicloromaleico.
	Composto $C_{10} Cl_{10} N_2 O = C_{10} Cl_6 . Cl_2 . [Cl_2] N_2 \cdot O$? Dalla pirocolla con pentacloruro di fosforo (Ciamician e Danesi [3]). — Dalla percloropirocolla con pentacloruro di fosforo (Ciamician e Silber [4]). — Aghi appiattiti trimetrici, senza colore, p. f. 195-197°.

1) Berl. Ber. XVIII (1885), pag. 1622.
2) Acc. L. M. [3] XVIII (1883-1884). — Gazz. XIV, pag. 31. — Berl. Ber. 17, pag. 553.
3) Acc. L. M. [3] XII (1881-1882). — Gazz. XII, pag. 28. — Berl. Ber. 15, pag. 1082.
4) Acc. L. M. [3] XV (1882-1883). — Gazz. XIII, pag. 403. — Berl. Ber. 16, pag. 2388.

Tabella VII (continuazione).

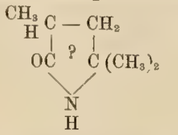
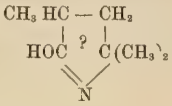


NH n

	COMPOSTI IDROGENATI

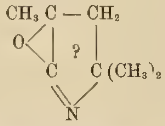
[H, H, H, H] CH$_3$, CH$_3$, CH$_3$, O

α-Dimetil-α'-ossi-β'-metilpirrolidina (Trimetilossipirrolidina) (?)

$C_7H_{13}NO$  oppure 

Dall'anidro-diossitrimetilpirrolidina con acido jodidrico e fosforo a 180° o con sodio ed alcool (Weil [3]). — Solida p. f. 79°,5; p. eb. 220°. Forma la nitrosammina che fonde a 98°. Con la polvere di zinco, dà per distillazione probabilmente la trimetilpirrolidina corrispondente.

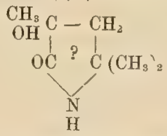
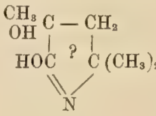
[H, H, H, H] CH$_3$, CH$_3$, CH$_3$, O

Anidro-diossitrimetilpirrolidina (? $C_7H_{11}NO$ 

Dall'anidride dell'acido amidotrimetilbutilattinico (amido-trimetilossibutirrico) con acido solforico concentrato (Weil [3]). — Cristalli senza colore, p. f. 141°,5, p. eb. intorno ai 240°. Non si combina nè col joduro metilico, anche in presenza di potassa, nè coll'acido nitroso.

[H, H, H, H] CH$_3$, CH$_3$, CH$_3$, OH, O

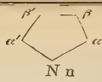
Diossitrimetilpirrolidina (?) (Anidride dell'acido amidotrimetilossibutirrico)

$C_7H_{13}NO_2$  oppure 

Trattando la diacetonammina con acido cianidrico e cloridrico (Heintz [10]). — Dall'acido amidotrimetilossibutirrico (Heintz [11], Weil [3]). — Solida, p. f. 202°.

[1]) R. Acc. L. M. [3] XV [1882-1883]. — Gazz. XIII, pag. 395. — Berl. Ber. 16, 1536.
[2]) R. Acc. L. M. [4] I [1884-1885]. — Gazz. XV, pag. 481. — Berl. Ber. 18, 2079.
[3]) L. Ann. 232, pag. 206.
Berl. Ber. XIX (1886), pag. 780.
[6]) Berl. Ber. XX (1887), pag. 2215.
[7]) Berl. Ber. XIX (1886), pag. 2414 e XX (1887), pag. 249.
[8]) Berl. Ber. XX (1887), pag. 1654.
[9]) Acc. L. R. (1886). — Gazz. XVI, 212. — Berl. Ber. 19, 569.
[10]) L. Ann. 189, pag. 231.
[11]) L. Ann. 192, pag. 329 e 339.

Tabella VIII.



N n

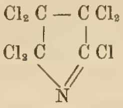
	COMPOSTI D'ADDIZIONE CON GLI ALOGENI

[Cl, I]

Clorojoduro di pirrolo (C_4H_4NH) $Cl\overset{n}{I} = C_4H_5N{<}^{Cl}_{I}$ (?)

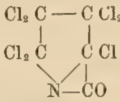
Dal pirrolo con soluzione cloridrica di cloruro di jodio (M. Dittmar [1]). — Solido, nero, insolubile, poco stabile; con soda si rigenera il pirrolo.

[Cl, Cl, Cl, Cl] Cl, Cl, Cl

Tetracloruro di percloropirrolo $C_4Cl_3[Cl_4]N$ 

Dall'imide bicloromaleica con pentacloruro di fosforo a 200° (Ciamician e Silber [2]). — Massa bianca, opalina, molle, p. f. 70-73°, p. eb. 143-144° a 20 mm., a 754 mm. bolle a 261° con svolgimento di cloro. Con acido acetico e polvere di zinco dà il tetracloropirrolo.

[Cl, Cl, Cl, Cl] Cl, Cl, Cl, CO.

Percloruro di percloropirocolla $C_4Cl_3[Cl_4]{}^{N}_{CO}{>} = C_5Cl_7NO$ ($C_{10}Cl_{14}N_2O_2$?) 

Dalla percloropirocolla con pentacloruro di fosforo a 250° (Ciamician e Danesi [3]) e (Ciamician e Silber [4]). — Cristalli monoclini senza colore, p. f. 146-147°,5. Dà con zinco ed acido acetico il tetracloropirrolo, con acido acetico bollente la bicloromaleinimide e con potassa l'acido bicloromaleico.

Composto $C_{10}Cl_{10}N_2O = C_{10}Cl_6 . Cl_2 . [Cl_2]N_2 \cdot O$?

Dalla pirocolla con pentacloruro di fosforo (Ciamician e Danesi [3]). — Dalla percloropirocolla con pentacloruro di fosforo (Ciamician e Silber [4]). — Aghi appiattiti trimetrici, senza colore, p. f. 195-197°.

[1]) Berl. Ber. XVIII (1885), pag. 1622.
[2]) Acc. L. M. [3] XVIII (1883-1884). — Gazz. XIV, pag. 31. — Berl. Ber. 17, pag. 553.
[3]) Acc. L. M. [3] XII (1881-1882). — Gazz. XII, pag. 28. — Berl. Ber. 15, pag. 1082.
[4]) Acc. L. M. [3] XV (1882-1883). — Gazz. XIII, pag. 403. — Berl. Ber. 16, pag. 2388.

TABELLA IX.

	APPENDICE
$C_{12}H_{14}N_2O$?	**Rosso di pirrolo** $C_{12}H_{14}N_2O$? 1. Dal pirrolo riscaldandolo con acido solforico o cloridrico (Anderson [1]) (Weidel e Ciamician [2]). 2. Nella putrefazione del lievito di birra (Hesse [3]). — Massa amorfa giallo-ranciata o nera, insolubile. Dà per distillazione secca pirrolo.
	Pirrolindofenina 1. Bollendo una soluzione di isatina nell'acido acetico glaciale col pirrolo (Ciamician e Silber [4]). 2. Trattando una soluzione acquosa di isatina con pirrolo ed acido solforico (V. Meyer [5]). — Materia azzurra poco solubile nell'acido acetico e nell'alcool.
$C_8H_7N_3O_4$	**Pirrolallossana** $(C_4H_3NH).(C_4H_3N_2O_4) = (C_4H_3NH).COH\langle(CO-NH)(CO-NH)\rangle CO$ (?) Trattando con pirrolo una soluzione acquosa d'allossana (Ciamician e Magnaghi [6]) (Ciamician e Silber [7]). — Pagliette bianche, si trasforma per ebollizione con acqua o con acidi diluiti in una materia colorante violetta. Dà in soluzione ammoniacale col nitrato d'argento un composto argentico $C_8H_5N_3O_4Ag_2$.
$C_7H_6N_2O_3$	**Composto $C_7H_6N_2O_3$** $= (C_4H_3NH).(C_3H_2NO_3) = (C_4H_3NH).COH\langle(CO)(CO)\rangle NH$ (?) Dalla pirrolallossana con potassa (Ciamician e Silber [7]). — Squamettine bianche. Si trasforma per ebollizione con acqua in una materia amorfa di colore rosso scarlatto. Dà un composto argentico $C_7H_5N_2O_3Ag$ ed un composto metilico $C_7H_5N_2O_3(CH_3)$, che si ottiene dal composto argentico con joduro di metile.
$C_9H_9N_3O_4$	**n-Metilpirrolallossana** $(C_4H_3NCH_3)(C_4H_3N_2O_4) = (C_4H_3NCH_3).COH\langle(CO-NH)(CO-NH)\rangle CO$ (?) Dal n-metilpirrolo con una soluzione acquosa di allossana (Ciamician e Silber [7]). — Pagliette bianche.

	col calore in pirrolo, β-isopropilpirrolo ed in un composto della formola $C_{10}H_{13}N$, che bolle fra 275° e 285°.
$C_{16}H_{22}N_2$	**Pirrolmetiletilchetone** $(C_{16}H_{22}N_2)_3 + 5\,H_2O$ e $(C_{16}H_{22}N_2)_3 + H_2O$ Dal pirrolo, metiletilchetone con alcune goccie d'acido cloridrico, in soluzione d'alcool metilico (Dennstedt e Zimmermann [11]). — Aghi, p. f. 80°, contengono 5 mol. di H_2O, delle quali quattro si eliminano spontaneamente nell'essiccatore sull'acido solforico. La sostanza deacquificata parzialmente $[(C_{16}H_{22}N_2)_3 + H_2O]$ fonde a 142° e si scompone a 100°. Dà un composto col nitrato argentico in soluzione alcoolica: $(C_{16}H_{22}N_2)_2 + AgNO_3$.
$C_{18}H_{22}N_2$	**Pirroldietilchetone** $C_{18}H_{22}N_2$ Dal pirrolo, dietilchetone con alcune goccie d'acido cloridrico, in soluzione di alcool metilico (Dennstedt e Zimmermann [10]). — Aghi che contengono acqua di cristallizzazione, che perdono completamente essiccandoli sull'acido solforico, p. f. 208-210°. Dà un composto col nitrato d'argento $(C_{18}H_{22}N_2)_2 + AgNO_3$.

1) L. Ann. 105, pag. 357.
2) Berl. Ber. XIII (1880), pag. 70.
3) L. Ann. 119, pag. 368.
4) Berl. Ber. XVII (1884), pag. 142.
5) Berl. Ber. XVI (1883), pag. 1478.
6) R. Acc. L. R. II (1886). — Gazz. XVI, 198. — Berl. Ber. 19, pag. 106.
7) R. Acc. L. R. II (1886). — Gazz. XVI, pag. 357. — Berl. Ber. 19, pag. 1708.
8) R. Acc. L. T. [3] VIII (1884). — Gazz. XIV, pag. 156. — Berl. Ber. 17, pag. 533.
9) Berl. Ber. XIX (1886), pag. 2184.
10) Berl. Ber. XX (1887), pag. 2449.

Tabella IX.

APPENDICE

$C_{12}H_{14}N_2O$?

Rosso di pirrolo $C_{12}H_{14}N_2O$?

1. Dal pirrolo riscaldandolo con acido solforico o cloridrico (Anderson [1]) (Weidel e Ciamician [2]). 2. Nella putrefazione del lievito di birra (Hesse [3]). — Massa amorfa giallo-ranciata o nera, insolubile. Dà per distillazione secca pirrolo.

Pirrolindotenina

1. Bollendo una soluzione di isatina nell'acido acetico glaciale col pirrolo (Ciamician e Silber [4]). 2. Trattando una soluzione acquosa di isatina con pirrolo ed acido solforico (V. Meyer [5]). — Materia azzurra poco solubile nell'acido acetico e nell'alcool.

$C_8H_7N_3O_4$

Pirrolallossana $(C_4H_3NH).(C_4H_3N_2O_4) = (C_4H_3NH).COH<(CO—NH)(CO—NH)>CO$ (?)

Trattando con pirrolo una soluzione acquosa d'allossana (Ciamician e Magnaghi [6]) (Ciamician e Silber [7]). — Pagliette bianche, si trasforma per ebollizione con acqua o con acidi diluiti in una materia colorante violetta. Dà in soluzione ammoniacale col nitrato d'argento un composto argentico $C_8H_5N_3O_4Ag_2$.

$C_7H_6N_2O_3$

Composto $C_7H_6N_2O_3$ $= (C_4H_3NH).(C_3H_2NO_3) = (C_4H_3NH).COH<(CO)(CO)>NH$ (?)

Dalla pirrolallossana con potassa (Ciamician e Silber [7]). — Squamettine bianche. Si trasforma per ebollizione con acqua in una materia amorfa di colore rosso scarlatto. Dà un composto argentico $C_7H_5N_2O_3Ag$ ed un composto metilico $C_7H_5N_2O_3(CH_3)$, che si ottiene dal composto argentico con joduro di metile.

$C_9H_9N_3O_4$

n-Metilpirrolallossana $(C_4H_3NCH_3)(C_4H_3N_2O_4) = (C_4H_3NCH_3).COH<(CO—NH)(CO—NH)>CO$ (?)

Dal n-metilpirrolo con una soluzione acquosa di allossana (Ciamician e Silber [7]). — Pagliette bianche.

$C_4H_8N_2O_2$

Pirrolidrossilammina $C_4H_4(NHOH)_2 = C_4H_6(NOH)_2$ (?)

Dal pirrolo, riscaldandolo con cloridrato d'idrossilammina e carbonato sodico, in soluzione alcoolica (Ciamician e Dennstedt [8]). — Materia solida e cristallina p. f. 173°.

Pirrolacetone [illegible]

Dal pirrolo, acetone con alcune goccie d'acido cloridrico o con cloruro di zinco (Baeyer [9], Dennstedt e Zimmermann [10]). — Cristalli dimetrici senza colore, p. f. 291°. Dà un composto col nitrato d'argento in soluzione alcoolica $(C_{14}H_{18}N_2)_2 + AgNO_3$. Si scinde col calore in pirrolo, β-isopropilpirrolo ed in un composto della formola $C_{10}H_{13}N$, che bolle fra 275° e 285°.

$C_{16}H_{22}N_2$

Pirrolmetiletilchetone $(C_{16}H_{22}N_2)_3 + 5H_2O$ e $(C_{16}H_{22}N_2)_3 + H_2O$

Dal pirrolo, metiletilchetone con alcune goccie d'acido cloridrico, in soluzione d'alcool metilico (Dennstedt e Zimmermann [11]). — Aghi, p. f. 80°, contengono 5 mol. di H_2O, delle quali quattro si eliminano spontaneamente nell'essiccatore sull'acido solforico. La sostanza deacquificata parzialmente [$(C_{16}H_{22}N_2)_3 + H_2O$] fonde a 142° e si scompone a 100°. Dà un composto col nitrato argentico in soluzione alcoolica: $(C_{16}H_{22}N_2)_2 + AgNO_3$.

$C_{18}H_{22}N_2$

Pirroldietilchetone $C_{18}H_{22}N_2$

Dal pirrolo, dietilchetone con alcune goccie d'acido cloridrico, in soluzione di alcool metilico (Dennstedt e Zimmermann [10]). — Aghi che contengono acqua di cristallizzazione, che perdono completamente essiccandoli sull'acido solforico, p. f. 208-210°. Dà un composto col nitrato d'argento $(C_{18}H_{22}N_2)_2 + AgNO_3$.

[1]) L. Ann. 105, pag. 357.
[2]) Berl. Ber. XIII (1880), pag. 70.
[3]) L. Ann. 119, pag. 368.
[4]) Berl. Ber. XVII (1884), pag. 142.
[5]) Berl. Ber. XVI (1883), pag. 1478.
[6]) R. Acc. L. R. II (1886). — Gazz. XVI, 198. — Berl. Ber. 19, pag. 106.
[7]) R. Acc. L. R. II (1886). — Gazz. XVI, pag. 357. — Berl. Ber. 19, pag. 1708.
[8]) R. Acc. L. T. [3] VIII (1884). — Gazz. XIV, pag. 156. — Berl. Ber. 17, pag. 533.
[9]) Berl. Ber. XIX (1886), pag. 2184.
[10]) Berl. Ber. XX (1887), pag. 2449.

RELAZIONE

letta dal Socio Struever, relatore, a nome anche del Socio Cannizzaro, nella seduta del 13 novembre 1887, sulla Memoria del dott. Ettore Artini, intitolata: *Epidoto dell'Elba.*

« Il dott. Ettore Artini, i cui precedenti lavori cristallografici furono già benevolmente accolti da questa Accademia, ha intrapreso uno studio sull'epidoto dell'Elba e ne presenta ora i risultati.

« Benchè si conosca da tempo l'esistenza di questo interessante minerale in più luoghi dell'isola d'Elba e forse se ne trovino campioni in quasi tutti i grandi Musei di Mineralogia, pure sino ad ora si hanno relativamente poche notizie sulle sue forme cristalline e le sue proprietà fisiche. I soli autori, di fatti, che diano indicazioni cristallografiche sull'epidoto dell'isola, sono il vom Rath e il D'Achiardi.

« L'Artini ebbe a sua disposizione la ricca serie di epidoti elbani posseduta dal Museo di Mineralogia dell'Istituto di studi superiori di Firenze, non che quelli esistenti nella collezione privata del professore Roster.

« Sono assai numerosi i luoghi dell'Elba ove s'incontra l'epidoto, e l'autore discorre di tutti indicandone le condizioni paragenetiche e in parte anche le forme dei cristalli che vi si trovano, ma poi si ferma principalmente sui cristalli provenienti da due giacimenti situati nel Monte la Coscia su quel di Marciana, e detti di Mortigliano e di Patresi.

« Sovratutto da Mortigliano l'Artini potè avere numerosi e belli cristalli, fra cui 20, cioè 14 geminati e 6 semplici, scelti fra i più perfetti, furono sottoposti a misure goniometriche. Vi si constatarono ben 49 forme semplici fra cui 20 nuove per l'epidoto, senza tener conto di numerose faccie vicinali. Di tutte le forme semplici l'autore descrive l'aspetto fisico. Scegliendo poi fra gli 85 angoli, misurati sovra spigoli diversi i 25 che gli sembrano più attendibili, determina le costanti cristallografiche servendosi del metodo dei minimi quadrati. I risultati delle osservazioni e del calcolo sono riassunti in due grandi quadri. Segue finalmente la determinazione dell'angolo vero degli assi ottici e dell'indice di rifrazione medio, per la luce del sodio.

« Sui cristalli provenienti dal giacimento di Patresi si trovarono 26 forme semplici fra cui ancora 8 nuove per l'epidoto, senza tener conto di numerosissime faccie vicinali. Benchè l'autore abbia istituito anche su questi cristalli un gran numero di misure, egli si astiene dal calcolare le costanti cristallografiche per l'epidoto di questo luogo non sembrandogli di disporre di un numero sufficiente di misure ineccepibili, però, come per l'epidoto di Mortigliano, dà la descrizione dell'aspetto fisico delle faccie, l'angolo vero degli assi ottici e l'indice di rifrazione medio per la luce del sodio. Un

fatto degno di nota, fra gli altri, è ancora questo, che i cristalli di Patresi, in grandissima parte semplici, non mostrano più quel preponderante sviluppo nel senso dell'asse normale al piano di simmetria, così abituale nell'epidoto, bensì sono allungati secondo l'asse verticale.

« Una tavola con 12 disegni accompagna la Memoria.

« Riassumendo siamo di parere che il lavoro dell'Artini è condotto con molta cura e che i risultati ottenuti sono importanti ed esposti in modo assai conciso e chiaro.

« Proponiamo quindi l'inserzione della Memoria nei volumi dell'Accademia ».

Epidoto dell'Elba.
Memoria di ETTORE ARTINI

(Con una tavola)

Epidoto dell'Elba.

Per questo studio trassi partito dei numerosi esemplari di epidoto elbano esistenti nella *Collezione Foresi*, splendido ornamento del Museo di Mineralogia di questo Istituto, per facoltà gentilmente concessami dal prof. ing. Giuseppe Grattarola, e della ricchissima raccolta privata del prof. Giorgio Roster, dalla squisita cortesia del Proprietario messa a mia disposizione. Ad entrambi questi egregi signori, che sì vivo interesse presero a che venisse illustrata una specie elbana tanto importante, porgo qui i più vivi ringraziamenti.

L'epidoto dell'Elba è, si può dire, oggi ancora poco studiato. L'illustre vom Rath [1] parla solo dell'epidoto che va unito al granato ottaedrico al *Colle di Castiglione*; ne cita le forme (100), (001), (110), (210), ($\bar{1}$11), ($\bar{1}$01), (101) [2], dice che è di colore verdiccio, e aggiunge: « die Krystalle sind wenig ausgezeichnet, und zu genauen Messungen ungeeignet ». E il d'Achiardi [3] conferma tutto questo. Ma in nessuna delle due collezioni da me esaminate ci sono esemplari di questa località, e il prof. Roster sopramenzionato, minuto e profondo conoscitore dei giacimenti mineralogici elbani, mi assecura che sul *Colle di Castiglione*, alle *Coste di Burro*, luogo dove si trovano i bei cristalli di granato ottaedrico, nelle molte volte che ci fu, non trovò mai cristalli di epidoto. Trovansene bensì collo stesso granato in altre località, come sarà detto a suo luogo.

Il d'Achiardi cita inoltre le località di *Campo, Pomonte, Punta della Stella, Campo al Pero*, ecc., ma riunendole tutte, in modo che non ho ben capito quale egli abbia più propriamente studiato; ne distingue però due tipi: uno in cui i cristalli, di colore verde pallido o gialliccio, sono foggiati a zeppa per il predominio delle (100) ($\bar{1}$01), (101) [4]; l'altro in cui le forme sono più numerose, e vi trovò le (100), (010), (001), (110), (210), (011), ($\bar{1}$11), ($\bar{2}$33), ($\bar{7}$32), ($\bar{2}$01), ($\bar{1}$01), ($\bar{1}$02), (101); in questi cristalli il colore sarebbe verde cupo.

(1) *Die Insel Elba.* Zeitschr. d. deut. geol. Gesellschaft. Jahrg. 1870, 641.

(2) Secondo la orientazione di Marignac e Des Cloizeaux, generalmente adottata dagli autori.

(3) *Mineralogia della Toscana.*

(4) Il d'Achiardi, che adotta pure l'orientazione di Des Cloizeaux, traduce i simboli di Lévy dati da quest' autore in milleriani, mantenendo invertito il segno del simbolo che si riferisce all'asse [x].

Finalmente il prof. G. Roster ([1]) trovò, nelle spaziose geodi del masso della *Fonte del Prete*, dei ciuffi di esilissimi cristallini capillari, di colore azzurrognolo-cinereo, che da una analisi qualitativa gli parvero potersi forse ascrivere all'epidoto; ma siccome dal breve esame ottico che io ne feci non mi sembrò trattarsi di questo minerale, e siccome d'altra parte i filamenti sono così estremamente esili che non ne può trarre argomento di studio il cristallografo, e la sostanza è sì poca e rara da rendere impossibile una analisi quantitativa, credo inutile parlarne qui.

L'epidoto è disseminato su gran parte dell'isola, e sarebbe quasi impossibile dare un elenco dettagliatissimo di tutte le località precise in cui si trova. Ma alcune sono di grande importanza.

Prima è quella del *Monte la Coscia* (*Marciana*), estesissimo giacimento che a sua volta può scindersi in due, uno verso *Mortigliano*, l'altro verso *Patresi*. In queste due località i cristalli sono foggiati su due tipi ben diversi, ciò che sarà naturalmente spiegato e messo in chiaro quando verremo allo studio particolare.

Altro notevole giacimento è quello di *Monte Orello*, con le quattro località principali di *Campo a' Peri*, *Catenacci*, *l'Acquacalda*, e *Norsi*.

Numerosissime sono poi le località meno importanti; noi le esamineremo una dopo l'altra, fermandoci più a lungo su quelle di maggiore interesse.

Epidoto di Mortigliano.

I cristalli, assai numerosi, sono semplici o geminati secondo (100).

I cristalli semplici sono allungati più o meno secondo l'asse [*y*], come di consueto si osserva nell'epidoto, e vi prendono grande sviluppo la zona [100.001] e la zona [$\bar{1}$01.$\bar{1}$11].

I geminati sono quasi sempre schiacciati un poco per il grande sviluppo della (100), e sviluppati equamente secondo [*y*] e [*z*]; vi predominano per lo più la zona [100.001] e la zona [100.$\bar{1}$11], ma in alcuni, rari, pur conservando il loro sviluppo gli emidomi, alla zona [$\bar{1}$00.$\bar{1}$11] si sostituisce per importanza la zona [$\bar{1}$01.$\bar{1}$11]. In questi ultimi geminati si riconosce assai meglio l'affinità coi cristalli semplici, in cui la zona [100.$\bar{1}$11] è appena rappresentata da rare forme poco sviluppate.

I geminati e i cristalli semplici si trovano spesso insieme sullo stesso esemplare, onde credei utile tenere unite le misure portate sugli uni e sugli altri, per il calcolo delle costanti.

La loro grandezza varia assai; i semplici sono per lo più della grossezza di $\frac{1}{2}$ mm. a 1 mm., lunghi da 1 a 3 mm., e piantati per una delle estremità dell'asse [*y*], riuscendo così la (010) all'incirca parallela alla superficie della roccia; in alcuni, rari, piantati secondo un'altra pinakoide o uno degli emidomi, la lunghezza è assai maggiore, giungendo fino a 5-6 mm., con una grossezza di poco più che $\frac{1}{2}$ mm.

I geminati invece sono piantati o secondo una delle estremità dell'asse [*z*] ([2]), e in questo caso è maggiormente sviluppata la zona [100.$\bar{1}$11], oppure, più raramente,

([1]) *Note mineralogiche su l'isola d'Elba.* P.^{e} 1^a, 1875, 31.

([2]) [+*z*] di un individuo [—*z*] dell'altro.

secondo una estremità dell'asse [y] come i più dei semplici, e in questo caso è più sviluppata la zona [$\bar{1}01.\bar{1}11$]. Questa diversità è tanto forte e spiccata che in questi ultimi generalmente non compariscono affatto le forme (110), ($\bar{1}11$), che hanno un enorme sviluppo in quelli prima nominati. La loro grandezza è pur varia; la grossezza va da $\frac{1}{2}$ mm. a 2 mm. eccezionalmente a 3 mm.; la lunghezza (sull'asse [z]) è di 3-4 mm., eccezionalmente di 6-7; la larghezza di 2-4, raramente di più.

Misurai 14 cristalli geminati e 6 semplici, scelti fra i più perfetti e brillanti, e molti anzi veramente ammirabili per la perfezione e lo splendore delle facce, e per il numero delle forme.

Elenco delle forme osservate (¹).

Numero progressivo	Simboli di Miller	Simboli di Naumann	Simboli di Lévy	Simboli di Weiss	Autore
1	100	$\infty \bar{P} \infty$	h'	$a:\infty b:\infty c$	Hauy
2	010	$\infty \breve{P} \infty$	g'	$\infty a:b:\infty c$	"
3	001	oP	p	$\infty a:\infty b:c$	"
4	110	∞P	m	$a:b:\infty c$	"
5	210	$\infty \bar{P}\ 2$	h^3	$a:2b:\infty c$	"
6	120	$\infty \breve{P}\ 2$	g^3	$2a:b:\infty c$	Březina
7	350*	$\infty \breve{P} \frac{5}{3}$	g^4	$\frac{5}{3}a:b:\infty c$	Artini
8	011	$\bar{P} \infty$	e^1	$\infty a:b:c$	Hauy
9	$\bar{3}11$	$3 \bar{P} 3$	$b^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{4}}\ h^1$	$a:3b:3c$	Kokscharow
10	$\bar{8}33$*	$\frac{8}{3} \bar{P} \frac{8}{3}$	$b^{\frac{1}{5}}\ b^{\frac{1}{11}}\ h^{\frac{1}{3}}$	$a:\frac{8}{3}b:\frac{8}{3}c$	Artini
11	$\bar{2}\bar{1}.10.10$*	$\frac{21}{10} \bar{P} \frac{21}{10}$	$b^{\frac{1}{11}}\ b^{\frac{1}{31}}\ h^{\frac{1}{10}}$	$a:\frac{21}{10}b:\frac{21}{10}c$	"
12	$\bar{2}11$	$2 \bar{P} 2$	$b^1\ b^{\frac{1}{3}}\ h^1$	$a:2b:2c$	Hauy
13	$\bar{3}22$*	$\frac{3}{2} \bar{P} \frac{3}{2}$	$b^1\ b^{\frac{1}{5}}\ h^{\frac{1}{2}}$	$a:\frac{3}{2}b:\frac{3}{2}c$	Artini
14	$\bar{1}11$	P	$b^{\frac{1}{2}}$	$a:b:c$	Hauy
15	$\bar{1}\bar{5}.16.16$*	$\breve{P} \frac{16}{5}$	$b^1\ d^{\frac{1}{31}}\ g^{\frac{1}{16}}$	$a:\frac{15}{16}b:\frac{15}{16}c$	Artini
16	$\bar{9}.10.10$*	$\breve{P} \frac{10}{9}$	$b^1\ d^{\frac{1}{19}}\ g^{\frac{1}{10}}$	$a:\frac{9}{10}b:\frac{9}{10}c$	"
17	$\bar{3}44$	$\breve{P} \frac{4}{3}$	$b^1\ d^{\frac{1}{7}}\ g^{\frac{1}{4}}$	$a:\frac{3}{4}b:\frac{3}{4}c$	Bücking
18	$\bar{5}77$	$\breve{P} \frac{7}{5}$	$b^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{1}{2}}\ g^{\frac{1}{7}}$	$a:\frac{5}{7}b:\frac{5}{7}c$	"
19	$\bar{2}33$	$\breve{P} \frac{3}{2}$	$b^1\ d^{\frac{1}{5}}\ g^{\frac{1}{3}}$	$a:\frac{2}{3}b:\frac{2}{3}c$	Zepharovich
20	$\bar{9}.14.14$*	$\breve{P} \frac{14}{9}$	$b^{\frac{1}{5}}\ d^{\frac{1}{23}}\ g^{\frac{1}{14}}$	$a:\frac{9}{14}b:\frac{9}{14}c$	Artini
21	$\bar{1}\bar{1}.20.20$*	$\breve{P} \frac{20}{11}$	$b^{\frac{1}{9}}\ d^{\frac{1}{31}}\ g^{\frac{1}{20}}$	$a:\frac{11}{20}b:\frac{11}{20}c$	"
22	$\bar{7}67$*	$\bar{P} \frac{7}{6}$	$b^1\ b^{\frac{1}{13}}\ h^{\frac{1}{7}}$	$\frac{6}{7}a:b:\frac{6}{7}c$	"
23	$\bar{8}.15.8$*	$\frac{15}{8} \breve{P} \frac{15}{8}$	$b^{\frac{1}{7}}\ d^{\frac{1}{23}}\ g^{\frac{1}{8}}$	$\frac{15}{8}a:b:\frac{15}{8}c$	"

(¹) Le forme contrassegnate coll'asterisco sono nuove per l'Epidoto.

Numero progressivo	Simboli di Miller	Simboli di Naumann	Simboli di Lévy	Simboli di Weiss	Autore
24	$\bar{1}21$	2 Ᵽ 2	$b^1 d^{\frac{1}{3}} g^1$	2a:b:2c	Marignac
25	$\bar{1}31$	3 Ᵽ 3	$b^{\frac{1}{2}} d^{\frac{1}{4}} g^1$	3a:b:3c	Klein
26	$\bar{1}51$	5 Ᵽ 5	$b^{\frac{1}{4}} d^{\frac{1}{6}} g^1$	5a:b:5c	Zepharovich
27	$\bar{3}.17.3^{\star}$	$\frac{17}{3}$ Ᵽ $\frac{17}{3}$	$b^{\frac{1}{14}} d^{\frac{1}{20}} g^{\frac{1}{3}}$	$\frac{17}{3}a:b:\frac{17}{3}c$	Artini
28	$\bar{1}61$	6 Ᵽ 6	$b^{\frac{1}{5}} d^{\frac{1}{7}} g^1$	6a:b:6c	Marignac
29	$\bar{1}81$	8 Ᵽ 8	$b^{\frac{1}{7}} d^{\frac{1}{9}} g^1$	8a:b:8c	Bücking
30	$\bar{1}.10.1^{\star}$	10 Ᵽ 10	$b^{\frac{1}{9}} d^{\frac{1}{11}} g^1$	10a:b:10c	Artini
31	$\bar{1}.13.1^{\star}$	13 Ᵽ 13	$b^{\frac{1}{12}} d^{\frac{1}{14}} g^1$	13a:b:13c	"
32	$\bar{2}21$	2 P	$b^{\frac{1}{4}}$	a:b:2c	Hauy
33	$\bar{7}32$	$\frac{7}{2}$ Ᵽ $\frac{7}{3}$	$b^{\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{10}} h^{\frac{1}{2}}$	$a:\frac{7}{3}b:\frac{7}{2}c$	Zepharovich
34	$\bar{2}\bar{3}.10.7^{\star}$	$\frac{23}{7}$ Ᵽ $\frac{23}{10}$	$b^{\frac{1}{13}} b^{\frac{1}{33}} h^{\frac{1}{7}}$	$a:\frac{23}{10}b:\frac{23}{7}c$	Artini
35	$\bar{2}\bar{8}.12.9^{\star}$	$\frac{28}{9}$ Ᵽ $\frac{7}{3}$	$b^{\frac{1}{16}} b^{\frac{1}{40}} h^{\frac{1}{9}}$	$a:\frac{7}{3}b:\frac{28}{9}c$	"
36	$\bar{2}\bar{6}.11.8^{\star}$	$\frac{13}{14}$ Ᵽ $\frac{26}{11}$	$b^{\frac{1}{15}} b^{\frac{1}{37}} h^{\frac{1}{8}}$	$a:\frac{26}{11}b:\frac{13}{4}c$	"
37	$22.0.23^{\star}$	$-\frac{22}{23}$ Ᵽ ∞	$o^{\frac{23}{22}}$	$a^1:\infty b:\frac{22}{23}c$	"
38	101	$-$ Ᵽ ∞	o^1	$a^1:\infty b:c$	Haidinger
39	$504^{\star}$	$-\frac{5}{4}$ Ᵽ ∞	$o^{\frac{4}{5}}$	$a^1:\infty b:\frac{5}{4}c$	Artini
40	$19.0.14^{\star}$	$-\frac{19}{14}$ Ᵽ ∞	$o^{\frac{14}{19}}$	$a^1:\infty b:\frac{19}{14}c$	"
41	$403^{\star}$	$-\frac{4}{3}$ Ᵽ ∞	$o^{\frac{3}{4}}$	$a^1:\infty b:\frac{4}{3}c$	"
42	$\bar{2}\bar{5}.0.12$	$\frac{25}{12}$ Ᵽ ∞	$a^{\frac{12}{25}}$	$a:\infty b:\frac{25}{12}c$	Bücking
43	$\bar{2}01$	2 Ᵽ ∞	$a^{\frac{1}{2}}$	$a:\infty b:2c$	Hauy
44	$\bar{7}04$	$\frac{7}{4}$ Ᵽ ∞	$a^{\frac{4}{7}}$	$a:\infty b:\frac{7}{4}c$	Bücking
45	$\bar{1}01$	Ᵽ ∞	a^1	$a:\infty b:c$	Hauy
46	$\bar{1}\bar{3}.0.15$	$\frac{13}{15}$ Ᵽ ∞	$a^{\frac{15}{13}}$	$a:\infty b:\frac{13}{15}c$	Bücking
47	$\bar{3}04$	$\frac{3}{4}$ Ᵽ ∞	$a^{\frac{4}{3}}$	$a:\infty b:\frac{3}{4}c$	Des Cloizeaux
48	$\bar{8}.0.11$	$\frac{8}{11}$ Ᵽ ∞	$a^{\frac{11}{8}}$	$a:\infty b:\frac{8}{11}c$	Bücking
49	$\bar{1}02$	$\frac{1}{2}$ Ᵽ ∞	a^2	$a:\infty b:\frac{1}{2}c$	Hauy

Tutte queste forme sono riunite in combinazioni numerosissime, delle quali sarebbe inutile dare una lunga lista. Le più frequenti nei cristalli semplici e che danno loro la « facies » caratteristica sono:

I^a (100) (010) (001) ($\bar{1}$11) ($\bar{1}$61) ($\bar{1}$01) (101)

II^a (100) (010) (001) (011) ($\bar{1}$11) ($\bar{1}$61) ($\bar{7}$32) ($\bar{1}$01) (101)

alle quali poi si aggiungono facce di altre forme come (110), (210), ($\bar{2}\bar{1}$.10.10), ($\bar{8}$33), ($\bar{1}\bar{1}$.20.20), ($\bar{1}$81), ($\bar{1}$.13 1), ($\bar{2}$01), ($\bar{1}$02), (504), (403), e altre meno importanti, ma

si può dire essere difficile trovare due cristalli che presentino propriamente la identica combinazione.

Nei geminati più frequenti l'aspetto caratteristico è dato dalle seguenti combinazioni principali:

III^a^ (100) (110) $(\bar{1}11)$ $(\bar{1}01)$

IV^a^ (100) (110) $(\bar{1}11)$ $(\bar{2}21)$ $(\bar{1}01)$ $(\bar{3}04)$;

e in quelli meno frequenti di cui già parlai, la combinazione fondamentale è:

V^a^ (100) (010) (001) (011) $(\bar{1}61)$ $(\bar{1}01)$ (101)

che è molto vicina a quelle dei cristalli semplici. A queste (III^a^, IV^a^, V^a^) si aggiungono con molta variabilità da cristallo a cristallo, facce di (210), (120), $(\bar{3}11)$, $(\bar{2}11)$, $(\bar{3}44)$, $(\bar{2}33)$, $(\bar{1}21)$, $(\bar{1}31)$, $(\bar{7}32)$, $(\bar{2}01)$, $(\bar{1}02)$, e altre molte, alquanto meno frequenti.

Potrà sembrare a parecchi che, contrariamente alle opinioni da me antecedentemente espresse [1], mi sia lasciato trarre qualche volta a calcolare dei simboli piuttosto complicati, anche se nuovi. Posso dire che fui sempre molto scrupoloso e rigoroso in questo, preferendo sagrificare una nuova forma piuttosto che cadere nella possibilità che qualche simbolo fosse falso o fantastico. Imperocchè, trascurando pure di considerar qui il caso di prendere per una vicinale una faccia di una forma qualunque, spostata per una perturbazione del processo di formazione del cristallo, il simbolo che si calcola quando la vicinale sia pure bella e distinta, ma di troppo poco inclinata sulla forma limite teorica, non può essere esatto: sia per la poca sicurezza della posizione relativa delle facce cui si deve riferire per il calcolo, bastando anche soltanto le oscillazioni comuni e tollerate nella misura dei diedri omologhi per portare (trattandosi di angoli sempre tanto piccoli) enormi differenze nel simbolo; sia, in grado minore, per la approssimazione sempre limitata delle costanti di cui ci dobbiamo servire. Perciò è semplicemente una utopia calcolare questi simboli soverchiamente complicati; a meno di farlo per dare un nome purchessia a detta faccia, o per dare una più chiara idea della sua posizione rispetto agli assi del cristallo, senza tuttavia attribuire alcun valore a un simbolo così calcolato. Ma non è questo il caso delle forme qui esposte; io sono sicuro dei miei simboli come sono sicuro degli angoli misurati da me, e se taluno è calcolato da un solo angolo, si è che la bontà della misura, e la bellezza delle facce mi permisero di farlo senza timore di allontanarmi dalla verità. Nè sarei disposto a considerare come semplici *vicinali*, forme più volte e con ottimi angoli ripetute, come la $(\bar{2}1.10.10)$, la $(\bar{3}.17.3)$, la $(\bar{2}3.10.7)$, e altre congeneri.

Esposte queste considerazioni, per mostrare i criterî che mi furono guida nel condurre il lavoro, passerò a dire alcuna cosa sulle zone e le forme in particolare

Credei utile, per dare una precisa idea dei limiti e della bontà degli angoli, di esporre qui, via via che dovrò parlare delle singole forme, tutti quelli trovati sugli spigoli misurati.

Zona [100.010] (Zona dei prismi).

Nei cristalli semplici questa zona spesse volte non è rappresentata che dalle sole due pinakoidi; qualche volta compaiono alcune piccole faccettine di (110) e (210). Nei geminati è quasi sempre molto bene sviluppata, e rappresentata da forme con

[1] *Natr. della reg. veneta.* Atti d. Lincei. Ser. 4^a^, vol. IV, p. 79.

facce ampie e numerose; qualche volta manca interamente anche in questi, come ebbi già ad accennare.

(100). Questa forma che non manca mai, si presenta con facce ampie, splendenti, talora pianissime, ma sempre striate più o meno profondamente, parallelamente allo spigolo [100.001].

(010). Nei cristalli semplici talora è mancante, o presente come una sottile faccia, striata parallelamente a $[\bar{1}01.\bar{1}11]$. Nei geminati quasi sempre esiste come una faccia più o meno ampia, poco splendente, in generale, sulla quale le strie parallele nei due individui rispettivamente alle zone $[\bar{1}01.\bar{1}11]$, $[\underline{10\bar{1}}.\underline{1\bar{1}\bar{1}}]$, si riuniscono lungo la sutura di geminazione, formando una striatura pennata.

(110). Nei cristalli semplici già dissi come raramente si osservi; nei geminati manca raramente, e generalmente si presenta con facce ampie, lisce, bene sviluppate, splendenti, rare volte rigate lievemente secondo $[\bar{1}10.\bar{1}11]$.

100.110 = Mis. med. 55°.1'.52''. Calc. 55°.1'.33''. Trovati. 54.57—II [1]; 55.11—I; 54.48 — II; 55.9 — II; 54.51 — II; 55.11 — II; 55.6 — II; 55.00 — II; 55.3 — III; 55.1 — III; 55.20 — II; 55.1 — II; 55.00 — II; 55.3 — II; 54.45 — I; 55.00 — II.

$1\bar{1}0.\bar{1}10$ = Mis. med. 69°.58'.35''. Calc. 69°.56'.54''. Trovati. 69.54 — II; 70.4—II; 69.54 — II; 69.46 — II; 70.02 — III; 70.21 — I.

110.010 = Mis. med. 35°.12'. Calc. 34.58.27. Trovati. 34.53 — I; 35.21 — I; 35.22 — I.

(210). Forma poco frequente, sì nei semplici come nei geminati; le sue strette facce sono però sempre piane e brillanti.

210.100 = Mis. med. 35°.30'. Calc. 35.33.21. Trovati. 35.36 — II; 35.18 — I.

210.101 = Mis. 45°.00 — I. Calc. 45.9.12.

(120). Forma che rade volte compare nei geminati, con strette ma brillanti faccette.

120.010 = Mis. med. 19°.15'.45''. Calc. 19.16.41. Trovati. 19.12 — I; 19.29 — I; 19.11 — II.

(350)*. Di questa nuova forma fu trovata in un bel geminato una sola faccia assai splendente, ma strettissima, sì che al goniometro dava una immagine alquanto pallida e diffusa.

350.100. Mis. 66°.43' — I. Calc. 67.13.53.

350.010. Mis. 23°.29' — I. Calc. 22.46.7.

Zona $[\bar{1}00.\bar{1}11]$ [2].

Questa zona è molto ricca di forme nella maggior parte dei geminati, e rimarchevoli sono le sue facce per bellezza, splendore, e mancanza quasi assoluta di rigatura o striatura alcuna.

$(\bar{3}11)$. Si presenta spesso con faccette poligonali, piuttosto piccole, ma sempre lisce e splendentissime.

[1] Il numero romano che segue ogni angolo trovato, ne esprime il *peso*.

[2] La $(\bar{3}33)$ sarà considerata come facente parte di altra zona.

$\bar{3}11.\bar{1}00$ = Mis. med. 32°.10'.12". Calc. 31.54.55. Trovati. 32.7 — II; 32.17 — I; 32.10 — II.

$\bar{3}11.\bar{1}11$ = Mis. med. 36°.55'.40". Calc. 37.11.36. Trovati. 36.59 — II; 36.49 — I.

($\overline{21}$.10.10)*. Fu osservata questa forma in due cristalli semplici, con facce piccole, ma brillanti, che davano una immagine unica, e spesso propriamente bella.

$\overline{21}$ 10 10.$\bar{1}00$ = Mis. med. 43°.35'.48". Calc. 43.28.16. Trovati. 43.48 — I; 43.34—I; 43.30 — II; 43.37 — I.

($\bar{2}11$). Fu trovata nei cristalli geminati come una faccia piuttosto ampia, splendente e piana.

$\bar{2}11.\bar{1}00$ = Mis. med. 45°.2'. Calc. 45.10.58. Trovati. 45.1 — II; 45.3 — II.

($\bar{3}22$)*. Questa nuova forma fu osservata una sola volta in un cristallo semplice, come una faccia stretta, splendente, e liscia.

$\bar{3}22.\bar{1}00$ = Mis. 55°.10' — II. Calc. 55.29.5.

($\bar{1}11$). Questa forma non manca quasi mai, e nella maggior parte dei geminati è rappresentata da facce magnifiche, splendenti, ampie, prive di qualunque striatura, solo eccezionalmente spezzate o curve. Nei cristalli semplici è pure generalmente presente, con facce sempre belle, ma di sviluppo assai variato, mancando pure in taluni.

$\bar{1}11.\bar{1}00$ = Mis. med. 68°.8.'11". Calc. 69.6.31. Trovati. 69.7 — III; 69.17 — II; 69.9 — III; 69.12 — III; 69.11 — II; 69.3 — II; 68.51 (1) — II; 69.5 (2)— II; 69.3—II; 69.11—III; 69.6—III; 69.8—II: 69.2—II; 69.9—III; 69.2—III; 69.11 — III; 69.00 — II; 69.1 — II; 69.10 — III; 69.25 — II; 69.17 (3) — I; 69.23 — I; 69.6 — II; 69,3 — II; 69.12 — II; 69.12 — II.

$1\bar{1}1.\bar{1}11$ = Mis. med. 41°43'.33". Calc. 41.46.58. Trovati. 41.39 — III; 41.35 — III; 41.56 — II; 41.51 — II; 41.56 — II; 41.49 — III; 41.44 — III; 41.44 — III; 41.43 — III; 41.31 — II; 41.29 — II; 41.53 — II; 41.36 — I.

($\bar{15}$.16.16)* } Queste forme furono trovate con facce strette, brillantissime, in
($\bar{9}$.10.10)* } un geminato assai bello.

$\overline{15}$ 16 16.$\bar{1}11$ = Mis. 2°2' — I. Calc. 1.56.11.

$\bar{9}$ 10 10.$\bar{1}11$ = Mis. 2°52' — I. Calc. 3.7.16.

($\bar{3}44$). Questa forma è quasi costante nei geminati, e le sue facce, piane e brillantissime, sono talora di notevole sviluppo.

$\bar{3}44.\bar{1}11$ = Mis. med. 8°.1'35". Calc. 8.00.34. Trovati. 7.38 — I; 7.59 — II; 7.47 — II; 8.5 — II; 8.30 — II; 8.7 — II; 7.50 — I; 8.5 — I; 7.53 — I.

($\bar{5}77$). Strette ma brillanti facce di questa forma osservai non di rado nei geminati più complessi.

$\bar{5}77.\bar{1}11$ = Mis. med. 9°.39'.20". Calc. 9.12.18. Trovati. 9.35 — I; 9.44 — I.

($\bar{2}33$). Forma piuttosto frequente nei geminati; le sue facce somigliano a quelle di ($\bar{3}44$).

$\bar{2}33.\bar{1}11$ = Mis. med. 10°.50.26. Calc. 10.48.53. Trovati. 11,13 — I; 10.36 — II; 11.11 — I; 10.50 — II; 10.37 — I.

(1) Una vicinale fa un angolo = 69.32.

(2) Una vicinale fa un angolo = 69.45.

(3) Due vicinali fanno angoli rispettivamente = 69.27; 69.34.

$(\bar{9}.14.14)^{\star}$. Fu osservata una volta sola in un geminato molto ricco di forme, come una faccia splendente e piuttosto ampia.

$\bar{9}\,14\,14.\bar{1}11$ = Mis. 11°36′ — II. Calc. 11.37.39.

$(\bar{1}\bar{1}.20.20)^{\star}$. Fu trovata negli stessi due cristalli semplici in cui osservai la $(\bar{2}\bar{1}.10.10)$, con faccette piccole e brillanti, e per di più come un'ampia e bella faccia in un cristallo geminato.

$\bar{1}\bar{1}\,20\,20.\bar{1}11$ = Mis. med. 15°.9.′20″. Calc. 14.49.24. Trovati. 15.2 — II; 15.6 — I; 15.1 — I; 15.25 — I; 15.20 — I.

(011). Questa forma è esclusiva dei cristalli semplici e di quei geminati in cui predomina la zona $[\bar{1}01.\bar{1}11]$, e in questi è abbastanza frequente, senza essere costante. Le sue facce triangolari, generalmente piccole, sono piane e splendono bene.

$011.\bar{1}00$ = Mis. med. 102°.54′.12″. Calc. 102.58.3. Trovati. 102.54 — I; 102.54 — I; 102.55 — II; 102.53 — I.

$011.\bar{1}11$ = Mis. med. 33°.52′. Calc. 33.51.32. Trovati. 34.2—II; 33.50 — I; 33.43—II.

011.001 = Mis. 58°.23′ — II. Calc. 58.29.7.

Zona $[\bar{1}01.\bar{1}11]$.

Ho già brevemente accennato come questa zona sia molto importante nell'epidoto di questa località, e abbia forme sviluppatissime nei cristalli semplici, e in quei tali geminati che, come i semplici, stanno piantati nella roccia per una estremità dell'asse [y]. Per evitare di ripeterlo ad ogni momento, dirò subito che, ad eccezione della $(\bar{1}01)$ e, per lo più, della $(\bar{1}11)$, tutte le forme di questa zona hanno le facce loro più o meno fortemente striate parallelamente all'asse della zona stessa, striatura che però non toglie affatto il loro splendore. Anche in qualche geminato del tipo più frequente si trovano forme numerose di questa zona, ma ridotte ad estrema piccolezza dal grande sviluppo di (110) e $(\bar{1}11)$: queste poco meno che microscopiche faccettine riescono allora brillantissime, e danno spesso immagini nette e decise; si osservano per lo più in uno solo dei due individui.

$(\bar{7}67)^{\star}$. Questa nuova forma fu osservata con due sottili e brillanti facce in un geminato del tipo più frequente.

$\bar{7}67.\bar{1}01$ = Mis. med. 50°.37′.30″. Calc. 50.33.44. Trovati. 50.35 — I; 50.40 — I.

$(\bar{1}11)$. V. sopra.

$\bar{1}01.\bar{1}11$ = Mis. med. 54°.48′28″. Calc. 54.48.56. Trovati. 54. 48 — III; 54.46 — II; 54.44 — II; 54.56. — II; 54.44 — II; 54.47 — III; 54.50 — III; 54.38 — III; 54.39 — II; 54.50 — II; 54.39 — II; 54.45 — II; 54.41 — II; 54.51 — III; 54.45 — III; 54.48 — III; 54.47 — III; 54.55 — II; 54.56 — II; 54.49 — II; 55.9 — I; 54.46 — III; 54.45 — III; 54.43 — III; 54.54 — II; 54.46 — III; 54.55 — I; 54.50 — II; 54.49 — II; 55.2—I; 54.49 (1)— II; 54.52 (1)— II; 54.58 — II; 54.50 — II; 54.52 — II; 54.53 — II; 54.53 — II; 54.51 — II.

$(\bar{8}.15.8)^{\star}$. Fu osservata una sola volta come una piccola faccettina brillante in un geminato.

$\bar{8}\,15\,8.\bar{1}11$ = Mis. 14°.38′ — II. Calc. 14.34.40.

(1) Media di due immagini vicine.

$(\bar{1}21)$. Forma abbastanza comune nei geminati: non fu osservata mai nei cristalli semplici; le sue piccole e splendide faccette danno bellissime immagini

$\bar{1}21.\bar{1}11$ = Mis. med. 15°43′.15″. Calc. 15.45.59. Trovati. 15.55 — II; 15.33 — II; 15.40 — II; 15.45 — II.

$(\bar{1}31)$. Forma più rara della precedente, che si trova negli stessi cristalli con piccole faccettine brillanti.

$\bar{1}31.\bar{1}11$ = Mis. med. 21°.42′.30″. Calc. 21.57.34. Trovati. 21.29 — I; 21.56 — I.

$(\bar{1}51)$. Come la $(\bar{1}21)$ si trova nei geminati con piccole e belle facce.

$\bar{1}51.\bar{1}11$=Mis. med. 27°.13′.48″. Calc. 27.9.30. Trovati. 27.22—II; 27.10—II; 27.5—II.

$(\bar{3}.17.3)$*. Questa forma, che è inclinata di soli 23′.24″ sulla $(\bar{1}61)$, fu trovata 4 volte in un solo cristallo geminato, con facce ampie, poco striate, e che mi diedero immagini così belle e angoli compresi tra limiti tanto ristretti che non esitai a calcolarne il simbolo.

$\bar{3}$ 17 3.010 = Mis. med. 7°.00′.15″. Calc. 7.5.30. Trovati. 7.1 — III; 7.1—III; 7.3—III; 6.56 — III.

$(\bar{1}61)$. Questa forma è di gran lunga più importante delle precedenti; le sue facce, striate, splendenti, si osservano costantemente nei cristalli semplici e nei geminati del tipo meno frequente; in questi sono spesso tanto ampie da fare sparire al tutto la $(\bar{1}11)$ e ridurre la (010) a una faccia lineare appena distinta. Qualche volta sono un po' arrotondate, e si passa dalla $\bar{1}61$ alla $16\bar{1}$ per mezzo di una superficie curva, fortemente solcata, che al goniometro dà una serie continua di immagini, bianche o colorate per diffrazione.

$\bar{1}61.\bar{1}11$ = Mis. med. 28°.33′55″. Calc. 28.28.58. Trovati. 28.24 — I: 28.28 — II; 28.45 — I; 28.57 — I; 28.22 — I; 28.36 — III; 28.28 — II: 28.39 — II; 28.58—I; 28.27 — III; 28.33 — III; 28.31 — II.

$\bar{1}61.010$ = Mis. med. 6°.42′.51″. Calc. 6.42.6. Trovati. 6.43 — III; 6.46—II; 6.45 — I; 6.34 — I.

$(\bar{1}81)$. Due volte in un cristallo semplice potei osservare questa forma; una delle due facce era piana, splendente, e mi permise una discreta misura; l'altra faccia, bruttissima, striata e solcata profondamente, mi permise solo una misura approssimativa.

$\bar{1}81.\bar{1}11$ = Mis. 30°.23′ — I; (31.17 — appross.). Calc. 30°.8.53.

$(\bar{1}.10.1)$*. Questa forma nuova fu trovata una volta sola in un geminato, come una piccolissima faccia assai brillante.

$\bar{1}$ 10 1.010 = Mis. 4.00 — I. Calc. 4.1.57.

$(\bar{1}.13.1)$*. Osservai questa nuova forma molto bene sviluppata con due facce abbastanza piane e splendenti in un bel cristallo semplice; però la trovai qualche volta anche nei geminati.

$\bar{1}$ 13 1.010 = Mis. med. 3.5.40. Calc. 3.6.14. Trovati. 3.5 — I; 2.57 — I; 3.15 — I.

$\bar{1}$ 13 1 . 1 13 $\bar{1}$ = Mis. 6.26 — I. Calc. 6.12.28.

Zona $[\bar{1}10.\bar{1}11]$.

Questa zona è pochissimo ricca di facce, come del resto in generale nell'epidoto; anzi nei cristalli semplici consta delle sole forme (110), $(\bar{1}11)$, (001).

(110). V. sopra.

$(\bar{1}11)$. V. sopra.

$\bar{1}10.\bar{1}11$ = Mis. med. 28°.59.′43″. Calc. 29.3.36. Trovati. 28.41 — II; 28.54 — II; 28.59 — III; 29.13 — II; 28.56 — II; 29°.1′ — II; 28.50 — II; 28.45 — II; 28.50 — III; 28.59 — III; 29.3 — II; 29.10 — II; 29.17 — II; 29.6 — I; 29.15 — II.

($\bar{2}21$). Questa forma si può dire quasi costante nei geminati, ai quali contribuisce a dare la « facies » caratteristica. Le sue facce, ampie, splendenti, piane, raramente striate parallelamente all'asse della zona, danno immagini nette, chiare, decise. Nei cristalli semplici non fu mai osservata.

$\bar{2}21.\bar{1}10$ = Mis. med. 14°.30′.48″. Calc. 14.32.57. Trovati. 14.23 — III; 14.26 — II; 14.29 — I; 14.37 — II; 14.41 — I; 14.43 — I.

$\bar{2}21.\bar{1}11$ = Mis. med. 14°.31′. Calc. 14.30.39. Trovati. 14.19 — II; 14.43 — I; 14.47 — II; 14.36 — III; 14.28 — III; 14.44 — I; 14.20 — II; 14.39 — II; 14.22 — II; 14.34 — I.

(001). Di questa forma sarà parlato poi.

001.110 = Mis. med. 75.°45.′ Calc. 75.45.17. Trovati. 75.51 — I; 75.43 — II; 75.45 — II; 75.44 — II.

$001.\bar{1}11$ = Mis. med. 75.10. Calc. 75.11.6. Trovati. 75.12 — II; 75.10 — II; 75.12 — II; 75.2 — I.

($\bar{3}04$). Nei più dei geminati si aggiunge anche questa forma che sarà esaminata in seguito.

$\bar{3}04.\bar{1}10$ = Mis. med. 75.43.24. Calc. 75.50.9. Trovati. 75.51 — III; 75.32 — II.

$30\bar{4}.\bar{1}11$ = Mis. med. 75°.11′.38″. Calc. 75.6.15. Trovati. 75.6 — II; 75.8 — II; 75.15 — III; 75.13 — II; 75.9 — II.

Zona [$\bar{7}32.\bar{1}01$].

($\bar{7}32$). Questa forma, data già dallo Zepharovich e da altri, poi messa in dubbio per la imperfetta corrispondenza del simbolo cogli angoli misurati (tanto che il Goldschmidt la esclude dal suo « *Index* ») compare qui frequentemente, sì nei geminati come nei cristalli semplici. In questi anzi spesso le sue facce raggiungono un'ampiezza paragonabile a quella delle facce di ($\bar{1}11$) e ($\bar{1}61$); non sono sempre piane, talora anzi tutte contorte, spezzate, ma qualche volta danno una immagine unica e netta. Nei geminati sono più frequenti, più piccole, più piane e più brillanti che nei cristalli semplici; ma se talora sono isolate, tal'altra sono accompagnate o più spesso sostituite da altre facce di forma a simbolo più complicato, le quali, benchè non appartenenti alla zona, domando di esaminare qui, subito dopo la ($\bar{7}32$), non potendosi da questa in alcun modo disgiungere.

$\bar{7}32.\bar{1}00$ = Mis. med. 36°.8′43″. Calc. 36.11.40. Trovati. 36.14 — I; 36.00 — I; 36.7 — I; 36.24 — II; 35.56 — II.

$\bar{7}32.\bar{1}10$ = Mis. med. 23°.35′.22″. Calc. 23.34.37. Trovati. 23.37 — III; 23.32 — II; 23.36 — II; 23.42 — II; 23.29 — II.

$\bar{7}32.\bar{1}01$ = Mis. med. 48°.21′.47″. Calc. 48.41.36. Trovati. 48.26 — II; 48.24 — II; 48.28 — II; 47.58 — I; 48.21 — II.

$\bar{7}32.101$ = Mis. med. 53°.36′. Calc. 53.18.15. Trovati. 53.32 — I; 53.40 — I.

$\bar{7}32.\bar{1}11$ = Mis. med. 33°.25′ Calc. 33.34.46. Trovati. 33.19 — II; 33.31 — II.

$\bar{7}32.\bar{3}04$ = Mis. 57.43 — II. Calc. 58.1.51.

$\bar{7}32.\bar{2}11$ = Mis. 10.22 — II. Calc. 10.37.00.

$\bar{7}32.7\bar{3}\bar{2}$ = Mis. 107.53 — II. Calc. 107.36.40.

($\overline{23}$.10.7)*. Facce di questa nuova forma furono trovate in parecchi geminati, anche due volte nello stesso cristallo, non mai insieme con la ($\bar{7}32$) nè altre forme di questo gruppo. Tale è la bellezza di queste facce, tanto ristretti sono i limiti degli angoli misurati, che non credo possa cader dubbio sulla sua esistenza come forma semplice.

$\overline{23}$ 10 7.$\bar{1}00$ = Mis. med. 36°.44′.30″. Calc. 36.58.22. Trovati. 36.41 — I; 36.46— II; 36.40 — II; 36.51 — II.

$\overline{23}$ 10 7.$\bar{1}11$ = Mis. med. 32°.48′.40. Calc. 32.41.23. Trovati. 32.49 — II; 32.44 — II; 32.53 — II.

$\overline{23}$ 10 7.$\bar{2}21$ = Mis. 24.55 — II. Calc. 24.41.45.

($\overline{26}$.11.8)*. In un solo cristallo, una faccia di $\bar{7}32$ mi diede al goniometro due imagini piuttosto lontane, nette e luminose; una riconobbi dalle misure essere veramente di ($\bar{7}32$), per l'altra fu calcolato dagli angoli su $\bar{1}11$ e $\bar{1}01$ il simbolo ($\overline{26}$.11.8).

$\overline{26}$ 11 8.$\bar{1}11$ = Mis. 32.56 — II. Calc. 33.8.41.

$\overline{26}$ 11 8.$\bar{1}01$ = Mis. 47.39 — II. Calc. 47.45.31.

$\overline{26}$ 11 8.$\bar{1}10$ = Mis. 23.56 — II. Calc. 24.9.20.

($\overline{28}$.12.9)*. In un cristallo geminato osservai una bellissima faccia triangolare, abbastanza grande, piana, splendente, che al goniometro mi diede una immagine unica e netta: dagli angoli misurati su $\bar{1}00$ e $\bar{3}04$ ne calcolai il simbolo.

$\overline{28}$ 12 9.$\bar{1}00$ = Mis. 36.50 — II. Calc. 37.2.27.

$\overline{28}$ 12 9.$\bar{3}04$ = Mis. 56.37 — II. Calc. 56.39.14.

$\overline{28}$ 12 9.110 = Mis. 23.48 — II. Calc. 24.1.23.

($\bar{8}33$)*. Questa nuova forma fu trovata una sola volta in un cristallo semplice, come una faccia un po' stretta, ma splendente e abbastanza piana. Il simbolo calcolato dall'angolo misurato su $\bar{1}01$, fu verificato con le zone [$\bar{7}32.\bar{1}01$], e [$\bar{1}00.\bar{1}11$]. Questa forma è importante perchè concorre a formare una zona nuova [$\bar{7}32.\bar{1}01$], non rappresentata negli altri epidoti conosciuti che dalle due sole forme ($\bar{7}32$) e ($\bar{1}01$).

$\bar{8}33.\bar{1}01$ = Mis. 43.45 — I. Calc. 43.32.50.

Zona [100.001]. (Zona degli emidomi).

Questa zona è molto ricca nei cristalli semplici come nei geminati; le sue forme sono tutte, nessuna eccettuata, più o meno fortemente striate parallelamente all'asse della zona stessa. Qui fu necessario usare la massima circospezione nella misura, e sopratutto nella scelta delle immagini, che sono spesso parecchie per una faccia sola. Ma scegliendo con cura, non mancano le facce sufficentemente piane e belle. Il caso è diverso nei più dei geminati, nei quali questa zona si presenta con forme meno numerose [1], ma con facce ampie, belle, splendenti, sulle quali la striatura finissima permette una esatta misura.

[1] Soli emidomi *positivi*, per effetto della geminazione, e della maniera come aderiscono alla roccia; mentre nei geminati più rari, la zona degli emidomi è completa tutto all'ingiro, e compare anche la base (001). Questo appare chiarissimo dalle figure.

(001). Questa forma si osserva costantemente nei cristalli semplici e nei geminati impiantati per una estremità dell'asse [y]; negli altri, ben più numerosi, non si trova che come faccia di sfaldatura, la quale si forma qualche volta quando si cerca di staccare il cristallo. Nei semplici specialmente le sue facce hanno un grandissimo sviluppo, e qualche volta tale da rendere il cristallo come schiacciato e quasi tabulare.

($\bar{1}02$). Questa forma è abbastanza frequente senza essere comunissima nei cristalli semplici; più rara nei geminati. Le sue facce, buone, hanno uno sviluppo sufficiente.

$\bar{1}02.001$ = Mis. 34.31 — I. Calc. 34.18.16.

$\bar{1}02.\bar{1}00$ = Mis. med. 80°.58'. Calc. 81.7.4. Trovati. 80.59 — II; 81.12 — I; 80.42—I.

$\bar{1}02.\bar{1}01$ = Mis. med. 29.9.20. Calc. 29.21.5. Trovati. 29.20 — I; 29.15 — I; 28.53—I.

($\bar{8}.0.11$). Una sola volta in un geminato fu osservata questa forma, come una stretta faccia, piana e brillante.

$\bar{8}$ 0 11.$\bar{1}01$ = Mis. 13.49 — II. Calc. 14.19.22.

($\bar{3}04$). Molto rara nei cristalli semplici, nei geminati questa forma non manca quasi mai, ed è tra le più importanti: si presenta con facce splendenti, benchè striate, piuttosto ampie, di diverso sviluppo nei due individui.

$\bar{3}04.\bar{1}01$ = Mis. med. 12°.51'.15''. Calc. 12.57.46. Trovati. 13.5 — I; 12.54 — III; 12.55 — II; 12.54 — II; 12.52 — II; 12.33 — II.

($\overline{13}.0.15$). In un geminato fu osservata questa forma come una sottile faccia, netta e brillante.

$\overline{13}$ 0 15.$\bar{1}01$ = Mis. 6.°10' — II. Calc. 6.27.27.

($\bar{1}01$). Questa è senza dubbio la più importante forma della zona dopo la (100) e la (001). Nei cristalli semplici come nei geminati, le sue facce ampie e splendenti sono presenti costantemente. Nei geminati del tipo più comune, spesso in uno degli individui raggiungono un enorme sviluppo, e sono straordinariamente brillanti, restando nell'altro molto più piccole, e sì fittamente coperte da una minuta striatura, da essere qualche volta interamente opache. A questo si aggiunge molte volte il comparire nel primo di una faccia di ($\bar{3}04$) e di due facce di ($\bar{2}21$) che possono mancare nell'altro individuo e in conseguenza anche le facce di ($\bar{1}11$) restano disegualmente sviluppate. In questa maniera il geminato, che dovrebbe avere l'apparenza di un cristallo trimetrico, assume un certo aspetto di cristallo semplice monoclino, aspetto in qualche modo accresciuto dallo scomparire della (010) con la sua striatura pennata. Il goniometro però ci mostra facilmente nulla esserci di sostanziale in questo.

$\bar{1}01.\bar{1}00$ = Mis. med. 51.°47'.34''. Calc. 51.45.59. Trovati. 51.49 — I; 51.41 — I; 51.48 — I; 51.40 — II; 52.9 — II; 51.37 — III; 51.47 — II; 51.52 — II; 51.55—I; 51.42 — II; 51.43 — III; 51.46—II; 51.37 —I; 51.55—II; 51.51—II; 51.54—II; 52.4 — I; 51.38 — II.

$10\bar{1}.\bar{1}01$ = Mis. med. 76°.33'.52''. Calc. 76.28.2. Trovati. 76.46 — I; 76.39 — III; 76.33 — III; 76.8 — I; 76.36 — III; 76.17 — I; 76.49 — I; 76.32 — II.

$\bar{1}01.001$ = Mis. med. 63°.36'.20''. Calc. 63.39.22. Trovati. 63.36 — II; 63.41 — II; 63.24 — II; 63.29 — II; 63.42 — II; 63.39 — II; 63.35 — II; 63.53 — I.

($\bar{7}04$). In un geminato assai bello fu trovata una stretta e brillante faccia di questa forma.

$\bar{7}04.\bar{1}00$ = Mis. 30°.00′ — I. Calc. 29.57.15.

($\bar{2}01$). Facce piuttosto ampie, splendenti, ma alquanto striate di questa forma sono comunissime nei cristalli semplici, e qualche volta si osservano anche nei geminati.

$\bar{2}01.\bar{1}00$ = Mis. med. 25°.50′.42″. Calc. 25.59.30. Trovati. 25.50 — III; 25.44 — I; 25.38 — I; 26.12 — I; 25.57 — I; 25.58 — I; 25.48 — I; 25.40 — I.

$\bar{2}01.\bar{1}01$ = Mis. med. 25°.58′.12″. Calc. 25.46.29. Trovati. 25.59 — I; 26.4 — I; 25.52 — I; 26.5 — I; 26.12 — I; 25.25 — I; 25.55 — I; 25.56 — I; 26.16 — I; 25.58 — I.

($\bar{2}\bar{5}.0.12$). Una volta in un geminato potei osservare una faccia abbastanza larga e molto bella di questa forma.

$\bar{2}\bar{5}$ 0 12.$\bar{1}01$ = Mis. 26°.48′ — II. Calc. 26.53.12.

(403)*. Fu trovata come una faccia bella, di sufficente sviluppo, molto ben distinta, in un cristallo semplice.

403.100 = Mis. 24°.48′ — II. Calc. 24.50.48.

(19.0.14)*. Anche questa forma fu osservata una volta in un cristallo semplice.

19 0 14.001 = Mis. 40°.21′. Calc. 40°.1′.53″.

(504)*. Potei osservare facce abbastanza larghe e ben misurabili di questa nuova forma in due bei cristalli semplici.

504.100 = Mis. med. 25°.56′.20″. Calc. 25.57.22. Trovati. 25.49 — II; 26.12 — I.

(101). Questa forma è frequentissima nei cristalli semplici, e in quei pochi geminati in cui questa zona è completa. Le sue facce ampie, splendenti, sono piuttosto fortemente striate e solcate.

101.001 = Mis. med. 34°.38.′18″. Calc. 34.40.11. Trovati. 34.23 — I; 34.16 — I; 34.34 — I; 34.46 — I; 34.49 — I; 34.55 — I; 34.31 — I; 34.37 — II; 34.55 — I.

101.100 = Mis. med. 29°.48′.26″. Calc. 29.54.28. Trovati. 29.49 — I; 29.51 — I; 29.49 — I; 29.41 — I; 30.9 — I; 29.38 — I; 29.42 — I.

(22.0.23)*. Una sola faccia ne fu trovata in un geminato, ampia ma non molto splendente.

22 0 23.100 = Mis. 30°.42′ — I. Calc. 30.42.33.

Calcolo delle costanti.

Scelti 25 angoli che mi parvero più attendibili per il peso maggiore e i limiti più ristretti, da questi calcolai le costanti cristallografiche, servendomi del metodo dei minimi quadrati. Ottenni

per il I calcolo

$$(a_I : b : c_I = 1.5810 : 1 : 1.8060 ; \beta_I = 64^\circ 35') : \Sigma d^2_I = 2.949\,749 ; \mu_I = 4'.51''$$

per il II calcolo

$$(a_{II} : b : c_I = 1.5805 : 1 : 1.8060 ; \beta_I = 64.35) : \Sigma d^2_{II} = 3.162\,239 ; \mu_{II} = 4'.50''$$

per il III calcolo

$$(a_I : b : c_{II} = 1.5810 : 1 : 1.8055 ; \beta_I = 64.35) : \Sigma d^2_{III} = 2.839\,298 ; \mu_{III} = 4'.46''$$

per il IV calcolo

$$(a_I : b : c_I = 1.5810 : 1 : 1.8060 ; \beta_{II} = 64.36) : \Sigma d^2_{IV} = 2.921\,650 ; \mu_{IV} = 4'.59''$$

e, finalmente, colle costanti ottenute dai dati sovra esposti

$$(a:b:c = 1.58279:1:1.80576\,;\ \beta = 64^{\circ}.34'.39''):\Sigma d^2 = 2.466401\,;\ \mu = 4'.16''.$$

Qui sarà utile riportare le costanti ottenute da alcuni dei principali autori per l'epidoto di altre località, perchè sia reso facile il paragone:

a:b:c = 1.5807:1:1.8057 ; β = 64.36 . . . . . . Kokscharow [1]
a:b:c = 1.5836:1:1.8153 ; β = 64.33 . . . . . . Des Cloizeaux
a:b:c = 1.5767:1:1.8018 ; β = 64.36 . . . . . . Miller
a:b:c = 1.5778:1:1.8034 ; β = 64.34 . . . . . . Websky.

Le differenze tra l'osservazione e il calcolo si potranno più estesamente scorgere nel quadro seguente.

Numero Progressivo	Spigoli [2] misurati	Angoli trovati. Medie.	Numero degli spigoli misurati.	Peso complessivo di ogni angolo	Angoli calc. dalle costanti di Kokscharow	Angoli calcolati dalle costanti a:b:c = =1.58279:1:1.80576 β=64°.34′39″	Differenza positiva in secondi	Differenza negativa in secondi	Quadrato della differenza
1	100.110*	55.1.52	16	32	55.00	55.1.33	19	—	361
2	$\underline{110}.\bar{1}\bar{1}0$*	69.58.35	6	12	70.00	69.56.54	101	—	10201
3	110.010	35.12	3	3	35.00	34.58.27	—	—	
4	210.100	35.30	2	3	—	35.33.21	—	—	
5	210.101	45.00	1	1	—	45.9.12	—	—	
6	120.010	19.15.45	3	4	—	19.16.41	—	—	
7	350.100	66.43.1	1	1	—	67.13.53	—	—	
8	350.010	23.29	1	1	—	22.46.7	—	—	
9	$\bar{3}11.\bar{1}00$*	32.10.12	3	5	—	31.54.55	917	—	840889
10	$\bar{3}11.\bar{1}11$	36.55.40	2	3	—	37.11.36	—	—	
11	$\bar{2}\bar{1}\ 10\ 10.\bar{1}00$	43.35.48	4	5	—	43.28.16	—	—	
12	$\bar{2}\ 11.\bar{1}00$	45.2	2	4	—	45.10.58	—	—	
13	$\bar{3}22.100$	55.10	1	2	—	55.29.5	—	—	
14	$\bar{1}11.\bar{1}00$	69.8.11	26	58	69.4	69.6.31	100	—	10000
15	$\underline{1\bar{1}\bar{1}}.\bar{1}11$*	41.43.33	13	31	41.52	41.46.58	—	205	42025
16	$\bar{1}\bar{5}\ 16\ 16.\bar{1}11$	2°.2′	1	1	—	1.56.11	—	—	
17	$\bar{9}\ 10\ 10.\bar{1}11$	2.52	1	1	—	3.7.16	—	—	
18	$\bar{3}44.\bar{1}11$*	8.1.35	9	14	—	8.00.34	61	—	3721
19	$\bar{5}77.\bar{1}11$	9.39.20	2	2	—	9.12.18	—	—	
20	$\bar{2}33.\bar{1}11$	10.50.26	5	7	—	10.48.53	—	—	
21	$\bar{9}\ 14\ 14.\bar{1}11$	11.36	1	2	—	11.37.39	—	—	
22	$\bar{1}\bar{1}\ 20\ 20.\bar{1}11$	15.9.20	5	6	—	14.49.24	—	—	
23	$011.\bar{1}00$*	102.54.12	4	5	102.57	102.58.3	—	231	53361
24	$011.\bar{1}11$	33.52	3	5	—	33.51.32	—	—	

(1) Le costanti del Kokscharow furono accettate dal Klein, dal Bücking, come pure dal Groth nel *Tabellarische Uebersicht der Mineralien*.

(2) Gli angoli che servirono al calcolo delle costanti sono distinti coll'asterisco.

Numero Progressivo	Spigoli misurati	Angoli trovati. Medie.	Numero degli spigoli misurati.	Peso complessivo di ogni angolo	Angoli calcolati dalle costanti di Kokscharow	Angoli calcolati dalle costanti a : b : c = =1.58279:1:1.80576 β=64°34′39″	Differenza positiva in secondi	Differenza negativa in secondi	Quadrato della differenza
25	011.001	58.23	1	2	58.29	58.29.7	—	—	
26	7̄67.1̄01	50.37.30	2	2	—	50.33.44	—	—	
27	1̄11.1̄01*	54.48.28	38	85	54.47	54.48.56	—	28	784
28	8̄ 15 8.1̄11	14.38.00	1	2	—	14.34.40	—	—	
29	1̄21.1̄11	15.43.15	4	8	—	15.45.59	—	—	
30	1̄31.1̄11	21.42.30	2	2	—	21.57.34	—	—	
31	1̄51 1̄11	27.13.48	3	5	—	27.9.30	—	—	
32	3̄ 17 3.010	7.00.15	4	12	—	7.5.30	—	—	
33	1̄61.1̄11*	28.33.55	12	22	—	28.28.58	297	—	88209
34	1̄61.010	6.42.51	4	7	—	6.42.6	—	—	
35	1̄81.1̄11	30.23.00	1	1	—	30.8.53	—	—	
36	1̄ 10 1.010	4.00.00	1	1	—	4.1.57	—	—	
37	1̄ 13 1.010	3.5.40	3	3	—	3.6.14	—	—	
38	1̄ 13 1.1 13 1̄	6.26.00	1	1	—	6.12.28	—	—	
39	1̄10.1̄11*	28.59.43	15	29	29.3	29.3.36	—	233	54289
40	2̄21.1̄10*	14.30.48	6	10	14.33	14.32.57	—	129	16641
41	2̄21.1̄11*	14.31.00	11	21	14.30	14.30.39	21	—	441
42	110.001*	75.45.00	4	7	75.45	75.45.17	—	17	289
43	1̄11.001*	75.10.00	4	7	75.12	75.11.6	—	66	4356
44	1̄10.3̄04	75.43.24	2	5	—	75.50.9	—	—	
45	1̄11.304̄*	75.11.38	5	11	—	75.6.15	323	—	104329
46	111̄.101	85.14.00	1	2	—	85.12.50	—	—	
47	2̄11.101	63.44.00	2	3	—	63.55.10	—	—	
48	7̄32.1̄00	36.8.43	5	7	—	36.11.40	—	—	
49	7̄32.1̄10*	23.35.22	5	11	23.36	23.34.37	45	—	2025
50	7̄32.1̄01	48.21.47	5	9	—	48.41.36	—	—	
51	732̄.101	53.36.00	2	2	—	53.18.15	—	—	
52	7̄32.1̄11	33.25.00	2	4	—	33.34.46	—	—	
53	7̄32.3̄04	57.43.00	1	2	—	58.1.51	—	—	
54	7̄32.2̄11	10.22.00	1	2	—	10.37.00	—	—	
55	7̄32.73̄2̄	107.53.00	1	2	—	107.36.40	—	—	
56	2̄3̄.10 7.1̄01	36.44.30	4	8	—	36.58.22	—	—	
57	2̄3̄ 10 7.1̄11	32.48.40	3	6	—	32.41.23	—	—	
58	2̄3̄ 10 7.2̄21	24.55.00	1	2	—	24.41.45	—	—	
59	2̄6 11 8.1̄11	32.56.00	1	2	—	33.8.41	—	—	
60	2̄6 11 8.1̄01	47.39.00	1	2	—	47.45.31	—	—	
61	2̄6 11 8.1̄10	23.56.00	1	2	—	24.9.20	—	—	
62	2̄8̄ 12 9.1̄00	36.50.00	1	2	—	37.2.27	—	—	
63	2̄8̄ 12 9.1̄10	23.48.00	1	2	—	24.1.23	—	—	
64	2̄8̄ 12 9.3̄04	56.37.00	1	2	—	56.39.14	—	—	
65	8̄33.1̄01	43.45.00	1	1	—	43.32.50	—	—	
66	100.001*	64.34.51	8	14	64.36	64.34.39	12	—	144

Numero Progressivo	Spigoli misurati	Angoli trovati. Medie.	Numero degli spigoli misurati.	Peso complessivo di ogni angolo	Angoli calcolati dalle costanti di Kokscharow	Angoli calcolati dalle costanti a : b : c = =1.58279:1:1.80576 β=64.34.39	Differenza positiva in secondi	Differenza negativa in secondi	Quadrato della differenza
67	1̄02.001	34.31.00	1	1	34.21	34.18.16	—	—	
68	1̄02.1̄00	80.58.00	3	4	—	81.7.4	—	—	
69	1̄02.1̄01	29.9.20	3	3	—	29.21.5	—	—	
70	8̄ 0 11.1̄01	13.49.00	1	2	—	14.19.22	—	—	
71	3̄04.1̄01*	12.51.15	6	12	—	12.57.46	—	391	152881
72	1̄3̄ 0 15.1̄01	6.10.00	1	2	—	6.27.27	—	—	
73	1̄01.1̄00*	51.47.34	18	32	51.42	51.45.59	95	—	9025
74	1̄01.001*	63.36.20	8	15	63.42	63.39.22	—	182	33124
75	1 1̄.1̄01*	76.33.52	8	15	—	76.28.2	350	—	122500
76	7̄04.1̄00	30.00.00	1	1	—	29.57.15	—	—	
77	2̄01.1̄00*	25.50.42	8	10	—	25.59.30	—	528	278784
78	2̄01.1̄01*	25.58.12	10	10	—	25.46.29	703	—	494209
79	2̄5̄ 0 12.1̄01	26.48.00	1	2	—	26.53.12	—	—	
80	403.100	24.48.00	1	2	—	24.50.48	—	—	
81	19 0 14.001	40.21.00	1	1	—	40.1.53	—	—	
82	504.100	25.56.40	2	3	—	25.57.22	—	—	
83	101.001*	34.38.18	9	10	34.42	34.40.11	—	113	12769
84	101.100*	29.48.26	7	7	29.54	29.54.28	—	362	131044
85	22 0 23.100	30.42.00	1	1	—	30.42.33	—	—	

Proprietà ottiche.

Il colore dei cristalli semplici come dei geminati varia dal verde olio al verde bottiglia cupo; per lo più sono trasparenti, non ostante la intensa colorazione, ma se ne osservano pure dei torbidi, e anzi vicino al punto in cui stanno aderenti alla roccia hanno quasi tutti colore più chiaro, ma divengono affatto opachi. — Il pleocroismo è fortissimo.

La lucentezza è vitrea.

Il piano degli assi ottici è parallelo alla (010); la bisettrice acuta, negativa, fa un angolo di circa 3°-5° in avanti, collo spigolo [110.1̄10]. Verificai per intero le difficoltà lamentate dal Des Cloizeaux nello studio ottico di questo minerale, e certo dovei tagliare più di una lamina prima di trovarne una che mi desse risultati veramente attendibili.

Imperocchè per la piccolezza dei cristalli semplici non si può assolutamente tagliare nello stesso cristallo la lamina e il prisma necessarî; e nei geminati poi, fatta una sezione perpendicolarmente allo spigolo [110.1̄10], si vede distinta la geminazione (100), ma più volte ripetuta nell' interno del cristallo, il quale talora alla luce polarizzata si mostra chiaramente formato da tante lamine di geminazione parallele o da tante zone concentriche di diversa densità.

In un bel geminato limpidissimo, di colore verde olio cupo, dopo avere eliminato completamente uno degli individui, tagliai una lamina normale alla bisettrice

ottusa, sulla quale, nell'olio avente per indici di rifrazione

$$1.4713 \quad (Na)$$
$$1.4684 \quad (Li)$$

misurai

$$2Ho = 144^\circ.10' \ (^1).$$

La dispersione inclinata era resa manifesta dalle iperboli i cui apici erano bordati l'una esternamente di verde, internamente di rosso, e l'altra viceversa. Gli anelli erano da ambe le parti in forma di ellissi allungate; non trovai cioè ripetuto qui il fatto osservato una volta dal Des Cloizeaux, che gli anelli da una parte fossero ellissi allungate e dall'altra quasi circolari.

Un prisma tagliato nello stesso cristallo parallelamente all'asse di media elasticità mi diede

$$\beta = 1.7527 \quad (Na) \ (^2).$$

Da questi valori ottenni

$$2Va = 73^\circ.58' \quad (Na).$$

Al solito, do i risultati degli altri autori per facilitare i confronti.

Il Klein ha

$$2Va = 73^\circ.36' \ ; \ \beta = 1.7541 \quad (Li)$$
$$2Va = 73.\,26 \ ; \ \beta = 1.7570 \quad (Na)$$
$$2Va = 73.\,13 \ ; \ \beta = 1.7621 \quad (Tl.),$$

risultati che si accordano bene col mio.

Il Des Cloizeaux fa notare le forti variazioni delle costanti ottiche da cristallo a cristallo, e dà per tre cristalli diversi.

$$2V = 75^\circ.46' \ ; \ \beta = 1.748$$
$$2V = 74.\,00 \ ; \ \beta = 1.753$$
$$2V = 87.\,49 \ ; \ \beta = 1.723.$$

Quest'ultimo risultato, così diverso da tutti gli altri, ottenuto sullo stesso cristallo sovramenzionato in cui gli anelli avevano forma tanto diversa dalle due parti, mi fa sospettare trattarsi di qualche caso di geminazione nascosta. Io pure su una lamina tagliata in un geminato, normalmente alla bisettrice ottusa, dopo avere eliminato accuratamente colla smerigliatura uno degli individui, vidi chiaramente emergere tra i due assi ottici dell' individuo principale, uno di quelli di un altro individuo, asse quasi normale alla lamina, con anelli quindi quasi circolari, di colore un poco più pallido, ma benissimo distinti. È la misura della inclinazione di uno degli assi del primo individuo su quest'asse del secondo, mi diede un angolo naturalmente assai più piccolo del 2Ho misurato, che, portato nei calcoli come il vero 2Ho, mi avrebbe condotto a un 2Va non troppo lontano dall'87.49 del Des Cloizeaux. È chiaro nel mio caso essersi trattato di una geminazione nascosta secondo una faccia della zona [100.001], conservando quindi i due individui il parallelismo dei rispettivi piani degli

(1) Eguale per tutti i raggi dello spettro, nei limiti della esperienza.

(2) Le luci di Li e Tl., meno intense che quella di Na, non davano, per la forte colorazione del cristallo, immagini nette e veramente attendibili.

assi ottici. Ma nel caso del Des Cloizeaux, e tanto più trattandosi di così illustre ed abile sperimentatore, non si può nulla asserire, nessuna ragione teorica escludendo *a priori* la bontà della sua osservazione.

Epidoto di Patresi.

I cristalli di questo giacimento sono pure assai numerosi e frequenti; e quantunque appartengano a una località confinante colla precedente, sono foggiati sopra un tipo essenzialmente diverso. I geminati divengono qui molto meno comuni che nel precedente, e anzi piuttosto rari; gli abbondantissimi cristalli semplici non sono più allungati secondo l'asse [y], ma bensì molto marcatamente secondo [z], cosa che è fuori del comune aspetto di questo minerale. Spariscono le zone [$\bar{1}$00.$\bar{1}$11], [$\bar{1}$01.$\bar{1}$11] tanto importanti in quelli di Mortigliano, e invece acquista importanza la zona [$\bar{1}$10.$\bar{1}$11]; la (010) non si trova affatto, la (100) è molto più stretta, la (001) e la ($\bar{1}$01) sviluppandosi invece ampiamente. Di più compare anche la (011) costantemente con facce spesso molto estese. I geminati hanno gli stessi caratteri e lo stesso aspetto che i semplici. Da ciò viene una differenza tale fra i due tipi, da non potere assolutamente confonderli o ravvicinarli; e questo si vede poi chiaramente anche dalle figure della tavola annessa.

La loro grandezza è assai variabile: per lo più sono della grossezza di poco meno di 1^{mm}, per una lunghezza che va da 1^{mm} a $3\text{-}4^{mm}$ e più; ma se ne trovano di assai più grandi, e anche della grossezza di $5\text{-}6^{mm}$. Sono piantati spesso per una estremità dell'asse [z], o parallelamente alla (001), ma se ne osservano moltissimi attaccati indifferentemente in qualunque maniera.

È caratteristica per questo epidoto la fortissima striatura di quasi tutte le sue facce, e l'abbondanza delle vicinali. Ma siccome è generale la tendenza dei cristalli a mostrarsi formati da un aggregato multiplo di individui in posizione spesso non troppo rigorosamente parallela, e molte facce sono abitualmente ondulate, spezzate, contorte in mille modi, divenne assai difficile la scelta dei cristalli da studiarsi; ne scelsi 10 dei più piccoli e brillanti, e procurai eliminare tutte le cause di errori; ma se per molte forme sono sicurissimo dei miei simboli e delle mie misure, per molte altre non lo sono troppo, e perciò le tenni separate, calcolando un simbolo, non peraltro, come dissi in principio del lavoro, « che per dare un nome purchessia » a quelle facce. Non esporrò qui tutti gli angoli misurati che per le sole forme nuove di cui sono sicuro, non offerendomi tutti gli altri 200 spigoli misurati mole sufficente di angoli buoni per calcolare delle costanti attendibili. Nei calcoli mi servii perciò delle costanti dell'epidoto di Mortigliano.

Elenco delle forme osservate (1).

Numero progressivo	Simboli di Miller	Simboli di Naumann	Simboli di Lévy	Simboli di Weiss	Autore
1	100	$\infty \bar{P} \infty$	h^1	$a:\infty b:\infty c$	Hauy
2	001	0P	p	$\infty a:\infty b:c$	"
3	110	∞P	m	$a:b:\infty c$	"
4	011	$\bar{P} \infty$	e^1	$\infty a:b:c$	"
5	012	$\frac{1}{2} \bar{P} \infty$	e^2	$\infty a:b:\frac{1}{2}c$	"
6	111	$-P$	$d^{\frac{1}{2}}$	$a^1:b:c$	"
7	$\bar{1}11$	P	$b^{\frac{1}{2}}$	$a:b:c$	"
8	$\bar{2}11$	$2 \bar{P} 2$	$b^1 b^{\frac{1}{3}} h^1$	$a:2b:2c$	"
9	$\bar{2}21$	2P	$b^{\frac{1}{4}}$	$a:b:2c$	"
10	$\bar{3}31$*	3P	$b^{\frac{1}{6}}$	$a:b:3c$	Artini
11	$\bar{5}52$*	$\frac{5}{2}P$	$b^{\frac{1}{5}}$	$a:b:\frac{5}{2}c$	"
12	$\bar{9}94$*	$\frac{9}{4}P$	$b^{\frac{2}{9}}$	$a:b:\frac{9}{4}c$	"
13	12.0.1	$-12 \bar{P} \infty$	$o^{\frac{1}{12}}$	$a^1:\infty b:12c$	Bücking
14	10.0.1*	$-10 \bar{P} \infty$	$o^{\frac{1}{10}}$	$a^1:\infty b:10c$	Artini
15	901	$-9 \bar{P} \infty$	$o^{\frac{1}{9}}$	$a^1:\infty b:9c$	Bücking
16	701	$-7 \bar{P} \infty$	$o^{\frac{1}{7}}$	$a^1:\infty b:7c$	Becker
17	905*	$-\frac{9}{5} \bar{P} \infty$	$o^{\frac{5}{9}}$	$a^1:\infty b:\frac{9}{5}c$	Artini
18	13.0.8*	$-\frac{13}{8} \bar{P} \infty$	$o^{\frac{8}{13}}$	$a^1:\infty b:\frac{13}{8}c$	"
19	807	$-\frac{8}{7} \bar{P} \infty$	$o^{\frac{7}{8}}$	$a^1:\infty b:\frac{8}{7}c$	Bücking
20	13.0.12*	$-\frac{13}{12} \bar{P} \infty$	$o^{\frac{12}{13}}$	$a^1:\infty b:\frac{13}{12}c$	Artini
21	101	$-\bar{P} \infty$	o^1	$a^1:\infty b:c$	Haidinger
22	13.0.14*	$-\frac{13}{14} \bar{P} \infty$	$o^{\frac{14}{13}}$	$a^1:\infty b:\frac{13}{14}:c$	Artini
23	$\bar{9}04$	$\frac{9}{4} \bar{P} \infty$	$a^{\frac{4}{9}}$	$a:\infty b:\frac{9}{4}c$	Bücking
24	$\bar{2}01$	$2 \bar{P} \infty$	$a^{\frac{1}{2}}$	$a:\infty b:2c$	Hauy
25	$\bar{1}01$	$\bar{P} \infty$	a^1	$a:\infty b:c$	"
26	$\bar{1}02$	$\frac{1}{2} \bar{P} \infty$	a^2	$a:\infty b:\frac{1}{2}c$	"

Oltre a queste trovai, come dissi, numerose vicinali, corrispondenti approssimativamente ai simboli: (0.15.29)*, ($\bar{1}\bar{8}$.18.1)*, (31.0.1)*, (22.0.1), (11.0.21), ($\bar{2}\bar{5}$.0.12), ($\bar{4}\bar{1}$.0.20)*, ($\bar{4}\bar{5}$.0.46)*, ($\bar{1}\bar{8}$.0.19)*, ($\bar{2}\bar{0}$.0.39)*.

(1) Le forme contrassegnate coll'asterisco sono nuove per l'Epidoto.

Queste forme sono riunite in combinazioni poco variate nell'aspetto, di cui le principali sono

I.ª (100) (001) (110) $(\bar{1}11)$ $(\bar{1}01)$ (101)

II.ª (100) (001) (110) (011) $(\bar{1}11)$ $(\bar{2}21)$ $(\bar{1}01)$ (101)

III.ª (100) (001) (110) (011) (012) (111) $(\bar{1}11)$ $(\bar{2}11)$ $(\bar{2}21)$ $(\bar{1}01)$ (101),

coll'aggiunta in modo variabilissimo di altre facce appartenenti a forme meno frequenti. La combinazione più comune del resto è senza dubbio la II.ª

Zona [100.110].

La forma (100) è presente costantemente, con facce un po' strette, lucenti, striate parallelamente a [100.001], molto spesso spostate, o sostituite da vicinali come (31.0.1), (22.0.1) e simili.

La (110) ha facce belle, ampie, meno ricche di vicinali, ma striate e spesso profondamente solcate parallelamente a $[\bar{1}10.\bar{1}11]$.

Zona $[\bar{1}10.\bar{1}11]$.

Questa zona è assai ricca di forme, le quali hanno qualche volta le facce striate parallelamente all'asse della zona, ma talora sono abbastanza piane e lucenti, e danno una immagine unica e netta. È da notarsi lo sviluppo insolito di questa zona, non esistendo in alcun altro epidoto finora studiato, tra la $\bar{1}10$ e la $\bar{1}11$, che la sola $\bar{2}21$. È spiacevole che solo poche di queste numerose facce si possano misurare esattamente, e riportare qui, col loro simbolo vero; qualche volta però questo è possibile.

(111). Le facce di questa forma, costantemente presenti, sono per lo più splendenti assai; ma frequentemente spostate, ondulate, con parecchie vicinali di cui non si può tener conto per la loro estrema irregolarità.

$(\bar{2}21)$. Forma che ha facce frequentissime, più o meno ampie, splendenti, solcate.

$(\bar{9}94)$*. Facce di questa nuova forma, un po' striate, ma discretamente ampie e belle si trovano con sufficiente frequenza.

$\bar{9}94.\bar{1}11$ = Mis. med. 15°.55′. Calc. 16.9.38. Trovati. 16.7—II; 16.00—II; 15.40—I; 15.38 — I.

$(\bar{5}52)$*, $(\bar{3}31)$*. Furono trovate qualche volta facce di queste due forme nuove, ma una sola volta, insieme, in un bel cristallino, due facce veramente piane e belle, suscettibili di una esatta misura.

$\bar{5}52.\bar{1}11$ = Mis. 17.41 — I. Calc. 17.28.44.

$\bar{3}31.\bar{1}11$ = Mis. 18.49 — I. Calc. 19.27.3.

Zona $[011.\bar{1}11]$.

(011). Quasi sempre è presente con piccole facce triangolari, splendenti, più o meno piane.

(111). Qualche volta si presentano strette facce male misurabili di questa forma. Il simbolo fu calcolato dalle zone [110.001] e $[011.\bar{1}11]$.

$(\bar{2}11)$. Come la precedente; fu verificato il simbolo dalle zone $[\bar{1}01.\bar{1}10]$ e $[011.\bar{1}11]$.

Zona [001.011].

(012). Si presenta di rado, con piccole facce splendenti e piane.

Zona [100.001].

Questa è senza alcun dubbio la zona più ricca e più importante; ma pari all'abbondanza delle forme è la loro bruttezza; sono rarissimi i cristalli in cui si possa essere certi della bontà di una misura; striate, solcate più o meno profondamente secondo l'asse della zona, la più parte di quelle facce danno immagini multiple, spesso vere serie di immagini, anche facendo astrazione da quelle di diffrazione. Studiando questa zona nei cristalli di Patresi, mi formai una chiara idea del come abbia fatto qualche autore a creare tanti nuovi emidomi per questo minerale: basta dare ad ogni immagine un po' netta la significazione di una faccia vera, e calcolarne il simbolo, per ottenere lunghe serie di forme; ma siffatti simboli, come già feci notare, non hanno un reale valore.

Però in qualche cristallino potei osservare delle belle e vere facce visibili ad occhio nudo, con immagini semplici, e così trovai le (12.0.1), (901), (701), (807), ($\bar{9}$04) già trovate da altri, come le nuove forme (10.0.1)*, (905)*, (13.0.8)*, (13.0.12)*, (13.0.14)*, tutte poco frequenti, ma ben sicure. Ecco gli angoli misurati che mi servirono per i calcoli.

10 0 1.100 = Mis. 4°.29′— I. Calc. 4.21.46.
905 . 001 = Mis. 44°.19′ — I. Calc. 44.35.17.
13 0 8.001 = Mis. 43°.12′ — I. Calc. 42.59.42.
13 0 12.100 = Mis. 28°.35′ — II. Calc. 28.28.9.
13 0 14.001 = Mis. 33°.36′ — II. Calc. 33.19.4.

($\bar{1}$02), ($\bar{2}$01), (101) sono forme assai frequenti, quasi costanti, le cui facce fortemente solcate hanno uno sviluppo sufficiente.

($\bar{1}$01). Questa forma, con quella che segue, è la più importante della zona per l'ampiezza delle sue facce; ma queste danno immagini poco nette, anzi sempre multiple, confuse, e talora anche fuori di zona. Quasi costantemente la faccia, grandissima, è divisa in due vicinali di sviluppo all'incirca equivalente, diversamente inclinate l'una sull'altra nei diversi cristalli. Questa inclinazione in cinque cristalli diversi fu misurata di: 1°.26′; 0°.19′; 0°.57′; 2°.6′; 1°.8′.

(001). Le facce di questa forma si distinguono per la loro ampiezza e pure per il loro aspetto; sono raramente striate e solcate come le altre della zona; invece sono splendentissime, ma, salvo rare eccezioni, tutte spezzate, e come ondulate.

Proprietà ottiche.

Il colore è quasi sempre verde erba o verde bottiglia scuro; ma vidi un esemplare unico di epidoto di questo tipo, trovato più verso Mortigliano, con cristalli opachi di un verde pistacchio sporco. La lucentezza è vitrea. Il pleocroismo è abbastanza forte, ma meno spiccato e appariscente che in quelli di Mortigliano.

Il piano degli assi ottici è parallelo a (010); la bisettrice acuta, negativa, è inclinata di 3°-4° in avanti sullo spigolo [110.1$\bar{1}$0].

Anche qui si trovarono le stesse difficoltà che nel precedente, per lo studio ottico, ma in grado minore, non essendo così frequenti i geminati, e i cristalli semplici essendo alquanto più lunghi.

Da una lamina tagliata in un cristallo semplice, normalmente alla bisettrice acuta, nello stesso olio che mi servì per l'epidoto di Mortigliano, ottenni:

$$2H_a = 96.18\ (^1).$$

Gli anelli avevano forma di ellissi pochissimo allungate, quasi di circoli; la dispersione inclinata era molto marcata; gli apici delle iperboli erano bordati l'uno di verde esternamente, internamente di rosso, e l'altro viceversa.

Da un prisma tagliato nello stesso cristallo, parallelamente all'asse di media elasticità, ottenni:

$$\beta = 1.7435\ (Na)\ (^2).$$

Da questi dati si calcola

$$2Va = 77.54\ (Na).$$

Entrambi i due tipi di epidoto ora studiati si trovano in numerosi cristalli che incrostano e tappezzano assai vagamente fessure e cavità spesso molto grandi di una roccia verde diabasica al *M. La Coscia*. Un minerale che li accompagna, ma per lo più nell'interno della roccia, senza mostrarsi all'esterno vicino ai cristalli di epidoto, è la *Magnetite* in grossi noduli di un bel nero splendente, spesso dotati di forte polarità magnetica. A Patresi c'è un posto ove l'epidoto del secondo tipo è sì frequente che basta scavare un poco per levarne grandi e belle croste tutte tappezzate di brillantissimi cristallini.

Epidoto di Monte Orello.

Sono quattro le località epidotiche di *M. Orello* (*Longone*). Dall'una pendice *Campo d' Peri* in basso, sulla destra della strada che va da *Portoferraio* a *Longone*, e *Catenacci* più verso la sommità. Dall'altra pendice, in alto il posto dell'*Acquacalda*, e più in basso *Norsi*. Il giacimento di *Catenacci* corrisponde a quello dell'*Acquacalda*, e il giacimento di *Norsi* a quello di *Campo d' Peri*; i due primi cadono nella zona delle rocce verdi, e i due secondi ne sono fuori, essendo in rocce granatifere molto variabili.

A Catenacci l'epidoto è bello, e si presenta in cristalli di lunghezza molto variabile, grossi da 1 a 3^{mm}, di un verde bottiglia più o meno cupo, che sfuma talora al verde oliva, trasparenti all'estremità libera, torbidi presso il punto in cui stanno aderenti alla roccia. Si trovano sul *Quarzo latteo*, e spesso proprio negli interstizî dei cristalli di quarzo, che presentano la solita combinazione (100) $(20\bar{1})$ $(2\bar{1}\bar{1})$. Questi cristalli di epidoto, molto brillanti, sono allungati secondo l'asse [*y*], e sempre piantati per una estremità di questo asse. Ha un grande sviluppo in essi la zona [100.001], ma con facce così profondamente solcate, da essere spesso impossibile determinare a quale forma appartengano. Scelsi per lo studio due cristallini dei più belli, ma per vero dire constatai non essere molto adatti a misure esatte. Li trovai entrambi della combinazione:

$$(100)\ (010)\ (001)\ (110)\ (\bar{1}11)\ (\bar{2}12)\ (\bar{2}21)\ (011)\ (\bar{1}01)\ (\bar{2}01)\ (^3)$$

(1) Eguale per tutti i raggi dello spettro, nei limiti dell'esperienza.

(2) Vedi nota (2) a pag. 396.

(3) Si osservano spesso vicinali, ma poco belle; ne trovai due rispondenti abbastanza bene ai simboli $(\bar{25}.0.12)$, $(\bar{19}.10.19)$*.

che, con poche variazioni, è quella di tutti i cristalli di questa località. Le facce più ampie sono quelle delle forme (100), (001), (110), ($\bar{1}$11), ($\bar{1}$01). Strette e brillanti quelle di (010), (011), ($\bar{2}$12), ($\bar{2}$21).

Vidi un bell'esemplare della collezione Roster, in cui l'epidoto di *Catenacci* è unito in noduli raggiati tondeggianti, formati da cristalli uniti al centro, liberi in parte alla periferia, sì da rassomigliare assai, per l'apparenza esterna, a certi aggregati di *Stilbite*.

All'*Acquacalda* i cristalli sono dello stesso colore e dello stesso tipo, ma alquanto più brutti, più piccoli e più semplici. Solamente sono riconoscibili talune faccette brillanti di (110) e ($\bar{1}$11). Anche qui l'epidoto è sul *Quarzo latteo*, con *Prehnite* in aggregati rotondeggianti, bianchicci, *Albite* in cristalli sformati, *Malachite* e *Cuprite* in piccola quantità.

Scendendo del tutto al piano, nel posto detto la *Fica sanguigna*, presso *Capo a' Pini*, si trova qualche poco di epidoto verde scuro, in minuti e brutti cristallini, simili a quelli dell'*Acquacalda*, e sullo stesso quarzo.

Al *Campo a' Peri* [1] si trova l'epidoto di colore giallo pallido, o verdiccio chiarissimo, spesso perfettamente incoloro o trasparente, raramente anche roseo, insieme a nitidi cristalli di *Granato ottaedrico*, *Thulite* e *Quarzo*. A questo si applica bene quello che scrisse il vom Rath sull'epidoto dell'Elba. Difatti i cristalli sono di tale bruttezza da essere appena riconoscibili le forme principali (100), (001), (110), ($\bar{1}$11), ($\bar{1}$01). Ne vidi taluno geminato (100).

Lo stesso epidoto si trova a Norsi [2], cogli stessi minerali che lo accompagnano.

Epidoto di Madonna del Buon Consiglio.

Alla *Madonna del Buon Consiglio* (*S. Piero-Marciana*), l'epidoto somiglia molto al precedente di *Campo a' Peri* e *Norsi*. I cristalli, per lo più geminati (100), sono poverissimi di forme, e pochissimo o punto adatti ad osservazioni goniometriche. In due geminati che misurai, osservai le forme

$$(100)\ (001)\ (110)\ (\bar{1}11)\ (\bar{1}01)\ (\bar{3}04)\ (\bar{2}01).$$

La zona [100.001] è composta di facce o profondamente rigate e solcate parallelamente all'asse della zona stessa, o lisce, ma perfettamente opache, come per effetto di una fine smerigliatura; questo carattere presentano pure le facce di (110), mentre quelle di ($\bar{1}$11) sono piane e lucenti. I cristalli sono allungati secondo l'asse [y], spesso schiacciati per il grande sviluppo di (100), e di dimensioni assai variabili; la grossezza per lo più è di 1-2^{mm}, per una lunghezza di 2-6^{mm}. Sono trasparenti, di un verde olio estremamente chiaro, spesso giallicci, talora francamente incolori. Ad un esame superficiale, un osservatore non molto pratico, potrebbe prenderli facilmente per cristalli di *Titanite*.

(1) Questo epidoto di *Campo a' Peri* si trova ordinariamente nelle collezioni colla indicazione inesatta di *Catenacci*.

(2) A Norsi trovasi anche la *Pirolusite*, ma assai più in basso che l'epidoto.

Epidoto di altre località.

Nel posto detto l'*Affaccata*, a metà via tra *La Pila* e *S. Ilario* furono trovati pochissimi cristalli di epidoto, dal colore giallo di colofonia, limpidissimi, grossi anche 5-6^{mm}, dalle forme però poco distinte, insieme con *Granato ottaedrico*. Al *Gombale*, circa 150m. sopra l'*Affaccata*, si trova, sopra una roccia verde diabasica, l'epidoto in nitidi cristalli di colore verde erba scuro, in cui predominano le forme (100), (001), (110), (011), ($\bar{1}$11), ($\bar{1}$01). Se ne trovano anche di geminati (100). In generale questi cristalli rassomigliano assai a quelli di Patresi, ma non sono punto adatti ad osservazioni goniometriche. Ne vidi taluni, in esemplari appartenenti al prof. Roster, grossi 5-6^{mm} e lunghi 10-12^{mm}.

Insieme ai cristalli di epidoto, si osservano discreti cristalli di *Titanite*, della combinazione indicata dal vom Rath, nitidissimi ottaedri di *Magnetite* e di *Spinello*, questi ultimi anche geminati (111), e laminette di *Penninite*.

Cristalli di epidoto identici a quelli del *Gombale*, si trovano pure nel posto sopramenzionato dell'*Affaccata*, ma più in alto di quelli gialli, e nella roccia diabasica. Qui insieme all'epidoto si osservano il *Granato ottaedrico*, nei soliti cristalli, l'*Opale ialite* in minute e graziose perline e la *Penninite*.

Epidoto poi fibroso raggiato o compatto, di colore verde cupo, si trova in molte altre località, delle quali ecco le principali e più sicure:

Capo Stella	(Longone)
Vigna Guano	(Grotta d'Oggi. S. Piero-Marciana)
Il Molino	(» » » »)
Grotta	(S. Piero-Marciana)
La Guardia.	(Pomonte- »)
Coste di Logliera	(» »)

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Fig. 1.	Cristallo semplice	. . . .	Mortigliano
» 2.	» »	. . . .	»
» 3.	» »	. . . .	»
» 4.	» geminato (100) (del tipo più frequente)	. . . .	»
» 5.	» » »	. . . .	»
» 6.	» » »	. . . .	»
» 7.	» » (del tipo meno frequente)	. . . .	»
» 8.	» semplice	. . . .	Patresi
» 9.	» »	. . . .	»
» 10.	» »	. . . .	»
» 11.	» »	. . . .	Catenacci
» 12.	» geminato (100)	. . . .	Madonna del Buon Consiglio

Fig. 1.

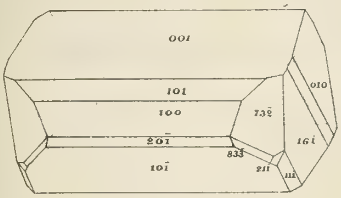


Fig. 2.

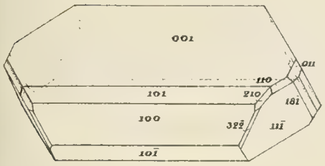


Fig. 3.

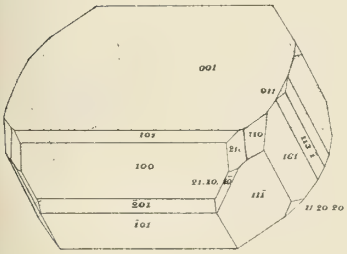


Fig. 4.

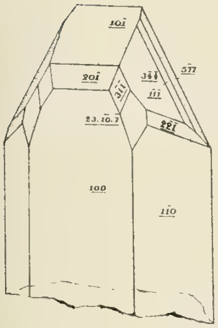


Fig. 5.

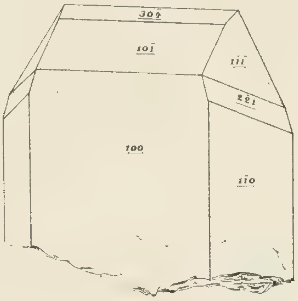


Fig. 6.

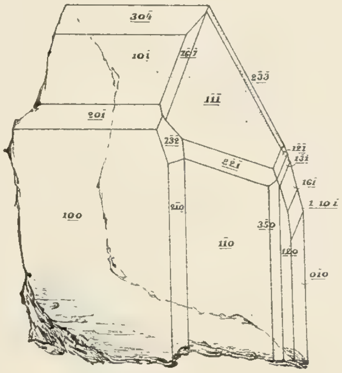


Fig. 7.

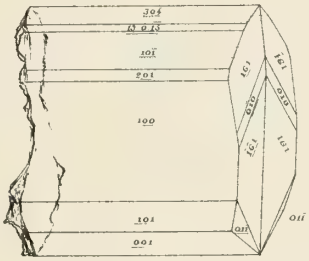


Fig. 8.

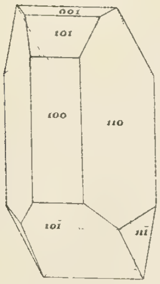


Fig. 9.

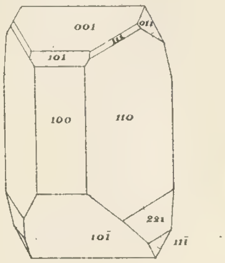


Fig. 10.

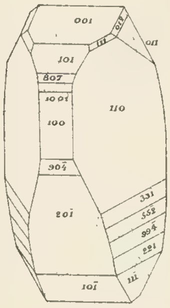


Fig. 11.

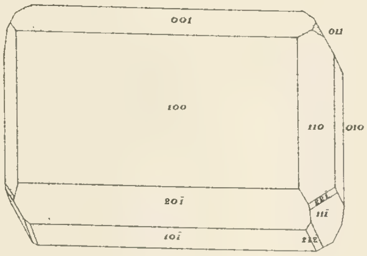
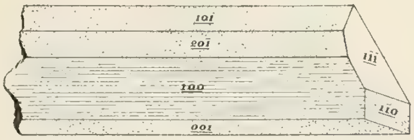


Fig. 12.



E. Artini dis.

Lit. Bruno e Salomone, Roma

RELAZIONE

letta dal Socio Blaserna, relatore, a nome anche del Socio Cantoni nella seduta del 13 novembre 1887, sulla Memoria del prof. M. Ascoli, intitolata: *Ricerche sperimentali sopra alcune relazioni tra l'elasticità e la resistenza elettrica dei metalli.*

« Le numerose ricerche fatte da diversi autori sopra le relazioni tra la resistenza elettrica ed altre proprietà fisiche dei corpi non condussero finora a risultati soddisfacenti. La presente Memoria è diretta a rinnovare il tentativo limitandolo al solo confronto delle resistenze elettriche coi moduli di elasticità, e ciò nei fili, di cui si sia fatto variare lo stato, sottoponendoli ad azioni meccaniche e termiche temporanee.

« I fili sono: due di platino, uno d'argento, uno di ferro. I metodi prescelti permettono di sottoporli a successivi riscaldamenti ed a diverse trazioni, e di misurare con sufficiente esattezza la resistenza elettrica non che il modulo di elasticità. L'autore ne conclude, che ad ogni valore dell'una corrisponde un determinato valore dell'altra; che sottoponendo un filo ripetutamente alla medesima azione, sia meccanica, sia termica, le variazioni vanno facendosi sempre meno sensibili tanto per l'elasticità, quanto per la resistenza elettrica; che per i diversi metalli la grandezza delle variazioni è molto diversa, ma che, dove è maggiore l'una è sempre maggiore anche l'altra; che infine la forma della funzione, che collega le due quantità, è complicata e differente da metallo a metallo, non senza presentare però certe analogie ed una generale tendenza della resistenza elettrica a diminuire col crescere del modulo di elasticità.

« Questi risultati sono resi più evidenti mercè una tavola, che rappresenta l'andamento delle curve nei singoli casi. Merita lode l'autore per aver saputo restringere una indagine tanto difficile, in modo da ottenere risultati abbastanza chiari e sodisfacenti. Epperò i sottoscritti giudicano la presente Memoria meritevole di essere inserita negli Atti accademici, ed esprimono la speranza che l'autore continuerà sempre più in queste nuove indagini ».

Ricerche sperimentali sopra alcune relazioni tra l'elasticità e la resistenza elettrica dei metalli [1].

Memoria del prof. M. ASCOLI.

(Con una tavola)

I.

1. Le variazioni della resistenza elettrica specifica dei metalli, dovute ad azioni meccaniche, termiche od altre, furono recentemente oggetto di numerosi studî sperimentali [2]. Questi, unitamente alle idee generali dominanti oggidì intorno alla costituzione dei corpi ed alla natura dei fenomeni fisici, generarono la persuasione che ogni azione la quale alteri in modo temporaneo o permanente la interna struttura dei metalli, ne alteri insieme nello stesso modo la resistenza elettrica; tanto che ai risultati negativi talvolta ottenuti o che si potranno ottenere, non è lecito attribuire altro valore che quello relativo alla sensibilità degli strumenti o dei metodi di misura. Tale considerazione, a parer mio, rende ormai scarso, dal punto di vista della teoria, l'interesse di esperienze dirette unicamente a scoprire e misurare le citati variazioni, invece che a stabilire relazioni tra i diversi fenomeni osservati. Ora, mentre abbondano gli studî della prima specie, quelli della seconda si riducono a pochi tentativi i quali, spesso in causa del metodo malsicuro seguito, danno incerte o poco importanti conclusioni. E raramente i dati numerici, ottenuti partendo da altro punto di vista, possono venir discussi e confrontati. Per tal modo i molti fatti finora noti, rimasti senza legame, non possono esser fecondi di interessanti conseguenze.

[1] Le esperienze furono eseguite nel laboratorio di fisica della R. Scuola di applicazione di Roma; gli apparecchi costruiti nell'officina della scuola stessa. Debbo qui ringraziare il prof. Pisati il quale mise a mia disposizione tutti i mezzi necessarî per questo studio.

[2] Oltre alle numerose ricerche che si trovano citate e riassunte nel primo volume della ben nota opera del Wiedemann, *Die Lehre von der Elektricität.* Braunschweig 1882. pag. 519 e segg. alla quale rimando il lettore per la bibliografia, tra i lavori comparsi più tardi ed a me noti, hanno maggior attinenza col presente studio i seguenti: Tomlinson, *Sopra l'azione della tensione e la trazione sulle proprietà fisiche dei corpi.* Diverse Memorie nei Proc. Roy. Soc. 1881 e 82 — Chwolson, *Ueb. die Wirkung des Spannes auf den elek. wied. von Kupfer und Messing-Drähten.* Carl' s Rep. 1882 p. 233, Kalischer, *Ueb. die Molekularstructur der Metalle und ihre Beziehung zur elektr. Leitungsfähigkeit.* Carl's Rep. 1882, p. 292. — Gerosa. *Sulla variazione nella resistenza elettrica di un filo metallico in relazione ad alcuni disturbi provocati ne' suoi sistemi molecolari.* (Nuovo Cimento, S. 3. V. XIV-XV, 1883-84).

Scopo delle presenti ricerche è di rinnovare i tentativi, eliminando le cause che possono mascherare leggi realmente esistenti. Lo studio è specialmente diretto a ricercare se si può stabilire qualche relazione tra l'elasticità e la resistenza elettrica dei metalli, o se almeno esiste qualche stretta analogia nel modo di comportarsi di queste due proprietà.

2. Il prof. Poloni [1] trattò la medesima questione senza ottenere alcun sicuro risultato; ed io credo che ciò dipenda dall'aver confrontato direttamente tra loro i moduli di elasticità e le resistenze elettriche alla temperatura ordinaria. Ora da un lato la temperatura produce variazioni grandissime nelle resistenze e non piccole nell'elasticità: dall'altro, per poter mettere a confronto le proprietà dei diversi metalli, sarebbe necessario [2] considerarle, non alla medesima temperatura, ma a temperature *corrispondenti*, cioè aventi costante relazione colle proprietà stesse; alla medesima temperatura, la quale non si può in alcun modo determinare, dovrebbe esser considerata la resistenza elettrica. Inoltre, anche per un medesimo metallo, tanto la elasticità come la resistenza elettrica di un filo, soffrono tali variazioni secondo il modo col quale il filo vien trattato, da non permettere un rigoroso confronto tra le due proprietà se non studiandole sopra corpi nell'identico stato; e di ciò non si può essere sicuri che eseguendo ambedue le misure sopra uno stesso filo, il che, a mia saputa, non fu mai fatto.

È chiaro dunque che il confronto in discorso avrà significato solamente se stabilito tra corpi che abbiano la elasticità e la resistenza differenti, ma uguali o pochissimo differenti tra loro tutte le altre proprietà fisiche o chimiche. Ora, essendo impossibile di procurarsi una serie di metalli sufficientemente estesa per questo scopo, è necessario ricorrere ad un artificio.

3. La interna struttura di un metallo è molto differente secondo che i fili sieno incruditi alla filiera o ricotti, cioè portati temporaneamente a temperatura molto elevata; ma la struttura stessa, con tutte le proprietà che ne dipendono, può pure variare in modo assai sensibile per men forti riscaldamenti. Queste variazioni, notate da parecchi autori, furono diligentemente studiate, per quanto riguarda la elasticità, dal prof. Pisati nella sua Memoria, *Sulla elasticità dei metalli a diverse temperature* [3]. Abbiamo così un mezzo per mutare in modo permanente le proprietà elastiche ed ottenere con successivi riscaldamenti un medesimo filo in diversi stati elastici differenti tra di loro di quanto poco si voglia. Tutti questi stati rappresentano una serie di altrettanti corpi poco diversi e per alcune proprietà identici, come per la natura chimica, la fusibilità ecc.; altre proprietà potranno invece variare insieme all'elasticità, come la durezza, la densità; ma tali variazioni sono spesso molto piccole e di più le proprietà cui si riferiscono sono quelle che determinano la elasticità, la quale, per così dire, le compendia tutte in sè. Ci possiamo pertanto, nel detto modo, accostare molto alle condizioni riconosciute necessarie alla fine del § 2, onde, se tra elasticità e resistenza elettrica esiste realmente una relazione, questa non ci potrà sfuggire quando misureremo l'una e l'altra per ogni particolare stato del filo.

[1] Rendiconti del R. Istituto lombardo di Sc. e lett. 1884.

[2] Analoghe considerazioni sono fatte per lo studio di altre propietà, nella Memoria del prof. Cantoni, *Relazioni tra alcune proprietà termiche ed altre proprietà fisiche dei corpi*. Pavia, 1868.

[3] Gazzetta chimica Italiana, 1876-77. VI-VII.

4. Le medesime misure, condotte come è descritto nella citata Memoria del prof. Pisati, ci permetteranno ad ogni modo di confrontare tra di loro l'andamento delle variazioni della resistenza e dell'elasticità, e di constatare, per esempio, se si verifica quanto ha supposto il prof. Ròiti (1), che cioè esistano, come per la elasticità, degli stati elettrici *normali*.

Nello stesso tempo, indipendentemente dai fenomeni di elasticità, potremo stabilire come varia la resistenza in causa di temporanei riscaldamenti. Questo studio finora fu limitato a poche temperature per lo più estreme; ne riparleremo confrontando i nostri coi risultati di altri sperimentatori.

II.

5. *Idea generale delle esperienze.* Il filo sottoposto a studio deve essere assoggettato ad una serie di riscaldamenti temporanei a diverse temperature ed a misure di elasticità, di lunghezza e di resistenza, fatte tutte alla temperatura dell'ambiente.

La misura del modulo di elasticità di torsione mediante il metodo delle oscillazioni, esige che il filo sia sospeso verticalmente e possa esser reso affatto indipendente dall'apparecchio delle misure elettriche. Per stabilire i contatti è perciò necessario rinunziare a saldare le estremità a grossi pezzi metallici, come si suol fare, e ricorrere ad altri espedienti, i quali, come vedremo, esigono che gli apparecchi di misura si trovino vicino al filo: questo, durante il riscaldamento, dovrà dunque esserne allontanato, senza pregiudizio della precisione.

Ciò posto, le varie operazioni in ogni esperienza si succederanno nell'ordine seguente:

1. Misura di resistenza.
2. Misura di elasticità.
3. Seconda misura di resistenza.
4. Misura di lunghezza.
5. Trasporto del filo all'apparecchio di riscaldamento.
6. Riscaldamento e successivo raffreddamento.
7. Trasporto del filo all'apparecchio di misura.
8. Misura di resistenza.
9. Misura di elasticità.
10. Seconda misura di resistenza.
11. Misura di lunghezza.

Le misure di lunghezza sono fatte allo scopo di valutare la parte, che, nelle variazioni osservate, spetta ai cambiamenti che possono verificarsi nelle dimensioni del filo. La 3^a e 10^a operazione hanno lo scopo di comprendere ciascuna misura di elasticità tra due della resistenza colla quale va confrontata.

Le azioni meccaniche, quando hanno effetto sensibile, vengono spesso esaminate in luogo delle termiche; allora il filo rimane a posto, cioè si omettono le operazioni 5^a e 7^a, ed alla 6^a si sostituisce il lavoro di torsione o di trazione.

(1) *Determinazione delle resistenze elettriche in misura assoluta,* Atti dell'Accademia di Torino. 1883-84.

I risultati più avanti riportati mi sembrano molto soddisfacenti per quanto riguarda i metodi e gli apparecchi di misura, i quali possono adattarsi anche a molte altre ricerche analoghe a queste. Credo perciò non inutile fermarmi alquanto sulla loro descrizione.

6. *Misura delle resistenze. Metodo.* Come si è detto nel § precedente, non ci era possibile di unire il filo agli apparecchi con saldature; d'altra parte ogni altro modo di congiunzione è malsicuro. La difficoltà si supera ricorrendo ad un metodo nel quale la resistenza delle congiunzioni e dei contratti non entri nella misura. Tale è quello da me adoperato per la calibrazione (1), che il prof. Righi aveva già posto in pratica (2) come egli stesso mi fece notare in una recente Nota (3). Non credo però che il metodo sia stato applicato nel modo che ora descrivo (4).

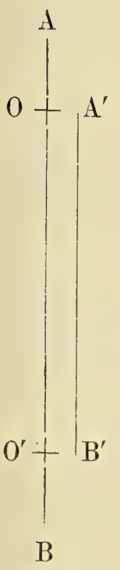


Fig. 1.

Fig. 2.

Sopra un filo AB (fig. 1) che forma parte di una combinazione di Wheatstone, si determina un tratto OO′ di resistenza uguale a quella di un altro filo A′B′, ponendo quest' ultimo in prolungamento di AB successivamente all'estremo A ed all'estremo B, e stabilendo col metodo del ponte, nei due casi, i punti O,O′ in modo che sia

$$\frac{OA + A'B'}{OB} = \frac{O'B + A'B'}{O'A} = q$$

dove q è il rapporto tra le due resistenze che formano gli altri due lati del ponte. Il valore di q è arbitrario e si può quindi variare in modo che uno dei due punti O, O′ occupi sempre una posizione prestabilita.

Il filo AB è quello sottoposto a studio; lo chiameremo *filo di esperienza*. A′B′ è un filo che si tiene in condizioni invariate e serve come *filo di confronto*. Se si altera la resistenza del 1°, e si tien fisso il punto O,′ lo spostamento di O misura immediatamente la variazione avvenuta. I contatti O ed O′ si fanno mediante pinzette metalliche unite ad un reoforo della pila; la loro resistenza, come è noto, non entra affatto nella misura, per la quale basta di poterne stabilire con precisione la posizione.

7. *Apparecchi.* Il filo A′B′ (fig. 1 e 2) che rimane in condizioni e posizione costanti presso gli apparecchi di misura ha i capi saldati a fili di rame del diametro di circa 4 millim., ingrossati fino a 10 alle estremità le quali si immergono in due pozzette di mercurio per l'unione col resto dell'apparecchio. Esso è fissato sopra pezzi

(1) Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1885, pag. 197.

(2) Memorie della R. Accademia dei Lincei, Cl. di sc. fis. ecc. Ser. 3ª, Vol. XIX, 549, 1884.

(3) Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1886, 2° Sem., pag. 8.

(4) Il metodo del galvanometro differenziale è disadatto a simili ricerche, sia perchè il filo e il galvanometro essendo in serie, la resistenza del 1° è spesso una piccola frazione della totale, sia perchè si sentono anche le variazioni cui può esser soggetta la resistenza del galvanometro.

di ebanite ad una tavoletta di legno sospesa al muro. I due fili di esperienza e di confronto, tirati insieme dal medesimo pezzo di metallo, sono collocati parallelamente in direzione verticale a pochi centimetri di distanza, affine di eliminare l'influenza perturbatrice di una irregolare distribuzione della temperatura. Il filo di esperienza ha le sue estremità strette entro due morse speciali, *a* e *b* (fig. 3) preparate dal prof. Pisati per le esperienze sulla elasticità di torsione. Alla morsa inferiore *b*, mediante un'asticina metallica, è unito un dischetto *d* (fig. 3) del diametro di circa 4 cent., il cui orlo porta una graduazione (di 5^0 in 5^0) e che, caricato di pesi, tende il filo. Sotto al dischetto una grossa asticina *r* di rame amalgamato si immerge, durante le misure elettriche, nel mercurio di una vaschetta portata da un sostegno mobile verticalmente, il quale viene abbassato durante le misure di elasticità. Nella stessa vaschetta si immerge il conduttore che collega il filo col resto dell'apparecchio. I contatti alle morse e nel mercurio possono essere imperfetti, ma non entrano affatto nelle misure, purchè la loro resistenza non varî nei pochi minuti necessarî per una misura semplice, durante la quale tutto resta immobile.

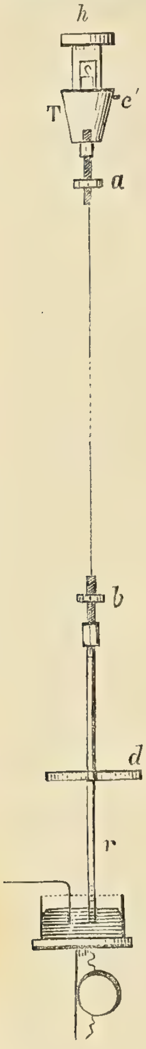


Fig. 3.

8. La morsa superiore (v. fig. 3) è fissata colla vite *a* ad un pezzo di ottone *T* in forma di tronco di cono, che diremo *tappo*; la superficie di questo, finamente lavorata allo smeriglio, si adatta esattamente alla superficie interna, pure conica, di altro pezzo di ottone foggiato ad anello che forma parte del *sostegno*.

Il sostegno, visto in projezione orizzontale nella figura 4, è formato di due strati di ottone *a* e *b* separati da uno strato isolante e collegati tra loro da viti isolate, in modo da formare un sol pezzo che è avvitato alla estremità di un robusto braccio di ferro *d*, fisso nel muro. Le superficie coniche del tappo e del sostegno sono diligentemente lavorate, non tanto per ottenere un buon contatto, giacchè nemmeno questo influisce sulla misura, quanto per poter ricondurre il filo esattamente nella medesima posizione ogni volta ne venga spostato. A fine poi che il filo torni sempre nel medesimo azimut, lo strato interno del sostegno porta una copiglia verticale *c*, contro la quale si arresta una orizzontale *c'* fissa nella parte del tappo che sporge sopra il sostegno. Sopra il medesimo strato interno è avvitato un filo di rame *f*, che comunica colle altre parti dell'apparecchio. Al di sopra del tappo si adatta una chiave quadrata *h* per porre in rotazione la sospensione quando si vogliono produrre le oscillazioni di torsione; e finalmente un piccolo gancio, che serve pel trasporto del filo (fig. 3).

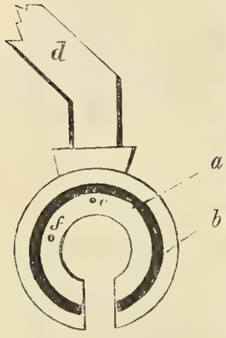


Fig. 4.

9. Accanto al filo di esperienza e parallelamente ad esso sta il *regolo di misura*, lungo circa m. 1,30 e diviso in millimetri, lungo il quale scorre la pinzetta che stabilisce il contatto mobile indicato con O ed O' nella figura 1. Invece di far uso di una sola pinza,

che dovrebbe troppo spesso spostarsi da un estremo all'altro del regolo, ho collocato alla parte inferiore una seconda pinza fissa, in modo che la superiore non abbia a fare che le piccole escursioni dovute alle variazioni da studiare. I movimenti si eseguiscono mediante una vite micrometrica del passo di $\frac{1}{2}$ millim., sulla cui testa graduata si legge facilmente il centesimo di millimetro (fig. 5).

Il regolo misuratore si appoggia sulla punta isolante di una vite verticale v (fig. 6), e passa entro due anelli a, a' a tre viti con punte isolanti, analoghi a quelli dei barometri Fortin, destinati a disporlo verticalmente e in modo che il filo d'esperienza passi entro le due pinze. Tanto i due anelli a, a' come la vite v, sono sostenuti da robusti bracci metallici fissi al muro. Un serrafili s pone in comunicazione il regolo e quindi le pinze con la pila.

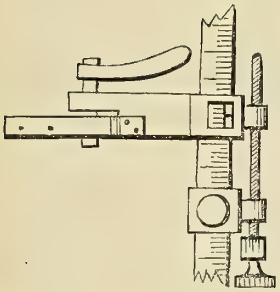


Fig. 5.

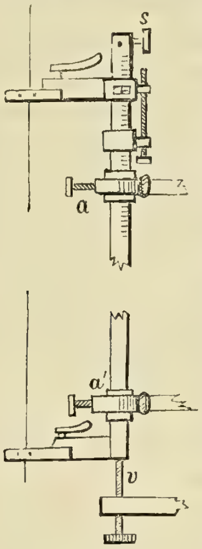


Fig. 6.

Le pinze, formate di due laminette di argentano, vengono aperte e chiuse da perni ellittici; esse stringono il filo tra un cilindretto di platino ed uno di avorio. Quando ambedue le pinze sono aperte ed abbassata la vaschetta inferiore di mercurio, il filo di esperienza, completamente separato dall'apparecchio per le misure elettriche, è pronto per quelle di elasticità.

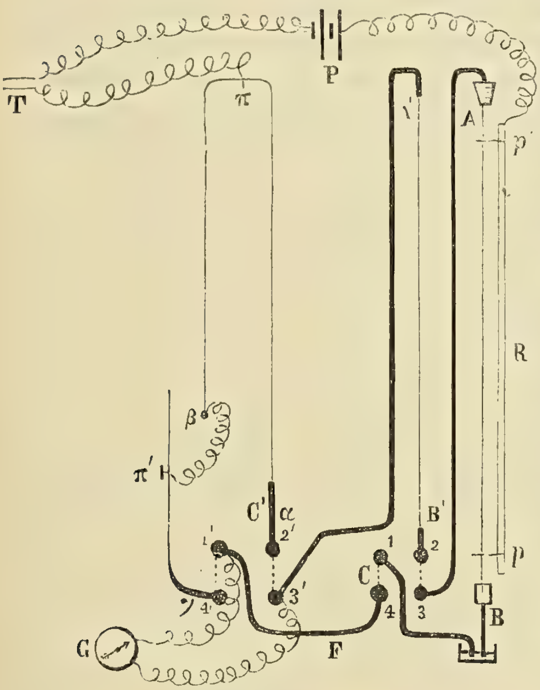


Fig. 7.

10. La *disposizione generale dell'apparecchio* per le misure elettriche è rappresentata in modo schematico dalla fig. 7. Come è indicato nella mia Nota sopra citata (§ 6) il trasporto del filo di confronto dall'una all'altra estremità di quello di esperienza è eseguito mediante due commutatori C e C' a bicchierini di mercurio (1, 2, 3, 4 e 1', 2', 3', 4'). R è il regolo di misura colle due pinze p e p'; AB è il filo di esperienza le cui estremità vanno ai bicchierini opposti 1 e 3; A'B' è il filo di confronto posto tra 2 e 3'; i due bicchierini 4 e 1' sono congiunti mediante un grosso filo di rame F; tra gli altri due, 2 e 4', sta il filo $\alpha\pi\beta\pi'\gamma$, destinato a stabilire il rapporto

che, nel § 6, è indicato con q; il tratto $\alpha\pi\beta$ è di platino, il resto di rame; il rapporto q (tra $\alpha\pi$ e $\pi\beta\pi'\gamma$) si fa variare di grandi quantità spostando π e di piccole spostando π'. Il regolo R è congiunto al punto π', attraverso alla pila P composta di un elemento Daniel e ad un interruttore T posto a portata dell'osservatore, il quale, chiusa la pinza p o la p', secondo il caso, va al cannocchiale per le osservazioni galvanometriche. I bicchierini 1' e 3' sono congiunti con un galvamometro aperiodico Siemens a riflessione (¹), il quale, fermandosi immediatamente nella posizione di equilibrio senza oscillare, permette di far le letture, tenendo chiuso il circuto per pochi istanti, ciò che evita il riscaldamento dei fili. La scala, divisa in millimetri, è a circa 4 metri dallo specchietto del galvamometro.

Colla disposizione dei due commutatori indicata nella figura dalle linee punteggiate, il filo di confronto sta aggiunto all'estremo A di quello d'esperienza; allora evidentemente il contatto deve aver luogo alla pinza p'. Invertendo i due commutatori avrebbe luogo invece in p.

11. L'apparecchio è protetto contro le radiazioni termiche esterne da un riflettore semicilindrico di latta lucida del diametro di circa 35 cent., girevole su due perni fissi al muro. Accanto ai fili è sospeso un termometro sensibile, le cui osservazioni hanno lo scopo di ridurre, se occorre, le determinazioni del modulo di elasticità e di verificare se, come deve essere, le piccole variazioni di temperatura nell'ambiente non hanno influenza sulle misure elettriche.

Operando come si è detto, sul filo di esperienza si determina in realtà un tratto di resistenza uguale alla differenza tra quella di tutto il conduttore 2 B' A' 3' e quella del filo F, ma, essendo il filo F e quelli congiunti con A' B' di rame e grossi, tal differenza è sensibilmente uguale ad A' B'. Se ciò non fosse, la temperatura avrebbe influenza giacchè il coefficiente di temperatura del rame può essere differente da quello del metallo che si studia. Perciò, per maggior sicurezza, le dimensioni di F sono calcolate in modo che la sua resistenza sia eguale a quella dei fili congiunti con A' B'.

12. *Misura della elasticità.* Per mettere in evidenza le variazioni del modulo di elasticità basta conoscere dei numeri a questo proporzionali. Perciò le misure di elasticità si sono sempre limitate alla determinazione della durata delle oscillazioni di torsione. La rotazione del tappo sopra descritto (§ 8) serve a dare al filo la voluta torsione, e la graduazione segnata sull'orlo del dischetto inferiore (fig. 3) a ridurre le oscillazioni sempre approssimativamente entro i medesimi limiti di ampiezza onde renderle meglio paragonabili, evitando le correzioni dipendenti dall'ampiezza. Le oscillazioni, ossia i passaggi dello zero della graduazione per la sua posizione di equilibrio, sono osservate mediante un cannocchiale posto a circa m. 2,50, e gli istanti dei passaggi sono trasmessi mediante un tasto elettrico a mano, ad un cronografo Hipp a svolgimento di carta, il quale sta in relazione con un eccellente orologio astronomico appartenente al Gabinetto di geodesia della R. Università (²).

Per ottenere la durata di un'oscillazione, al principio ed alla fine di un certo

(¹) V. Wiedemann, *Die Lehre von der Elektric.* B. III. p. 301, 1883.

(²) Sono gli strumenti adoperati dai prof. Pisati e Pucci nelle: *Ricerche sulla lunghezza del pendolo a secondi.* V. Memorie della R. Accademia dei Lincei, Cl. di sc. fis. ecc. Ser. 3ª, Vol. XV, 1883.

intervallo di tempo, 40 o 50 minuti primi o più, si trasmettono al cronografo undici segnali corrispondenti ai primi ed ultimi undici passaggi. I venti intervalli dànno la durata approssimativa di un'oscillazione, mediante la quale si calcola il numero di oscillazioni avvenute nell'intero intervallo, e quindi la durata media definitiva di un'oscillazione. Se non basta una sola approssimazione, se ne ha una seconda prendendo una serie di passaggi intermedî.

13. *Misura delle lunghezze.* Questa misura è necessaria per le ragioni esposte al § 5, ed inoltre per verificare se il filo, ogni volta che è riportato all'apparecchio di misura, riprende esattamente la medesima posizione, senza di che, non potendosi ammettere *a priori* che il filo sia perfettamente calibro, sarebbe necessario di determinare sempre le correzioni di calibrazione.

Sul filo di esperienza, verso le estremità, sono tracciati due segni, sia con un leggiero deposito metallico fatto galvanicamente, sia altrimenti. Il regolo misuratore, in corrispondenza di questi segni, porta, fermata mediante due piccoli bracci di ottone due laminette inargentate sopra ciascuna delle quali è incisa una doppia linea orizzontale che rimane a breve distanza dietro ai segni del filo. La lunghezza di questo, compresa tra i due segni, viene confrontata colla distanza costante (C) tra le linee del regolo. A ciò serve un piccolo collimatore consistente in un tubo di ottone, il quale porta due fili incrociati ad un estremo ed uno orizzontale all'altro; quest'ultimo col punto di incontro dei due primi determina un piano orizzontale di collimazione, mobile verticalmente mediante una vite micrometrica che fa scorrere a *coulisse* tutto il sistema (v. fig. 8).

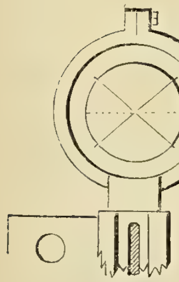


Fig. 8.

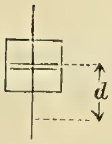


Fig. 9.

Fig. 10.

Con due collimazioni si misura la distanza verticale *d*, sempre piccola, tra il segno del filo e la linea del regolo (fig. 9). Il collimatore può venir fissato a vite al muro in corrispondenza sia del segno inferiore che del superiore. Le due lunghezze *d* misurate, aggiunte o sottratte, secondo i casi, alla costante C, dànno la lunghezza del tratto di filo considerato, che è sempre un po' maggiore di quella misurata elettricamente. La precisione della misura di lunghezza, deve essere evidentemente la stessa di quella elettrica; essa è di circa mm. 0,02.

La misura superiore, che è fatta molto vicino al punto di sospensione avverte anche se il filo torna sempre a posto. L'errore probabile di questa misura, dedotto da 20 determinazioni della prima serie di esperienze, risultò di $0^{mm},025$, cioè pressochè uguale a quello della lettura al collimatore. Sotto questo punto di vista, l'apparecchio soddisfà allo scopo.

14. *Riscaldamento e raffreddamento dei fili.* A circa due metri dall'apparecchio di misura, è collocata, fissa al muro, mediante un anello stretto da bulloni ed uno

munito di tre viti di pressione orizzontali, una stufa ad aria. Essa è cilindrica, di ottone a doppia parete ed alta circa m. 1,40, cioè più del filo di esperienza; lo spazio tra le due pareti, chiuso da ogni parte, contiene uno strato d'aria che modera il riscaldamento. Un coperchio chiude la stufa; esso ha nel centro una tubulatura internamente conica destinata a ricevere il tappo di sostegno, ed è diviso in due parti separabili per dar passaggio al disco *d* (fig. 3) portato dal filo, e tenute insieme da un anello aperto da una parte, che è messo a posto prima che il tappo entri nella tubulatura. Un termometro si colloca, attraverso un foro del coperchio, vicino al filo di esperienza cioè all'asse del cilindro interno; questo ha il diametro un po' maggiore di quello del disco *d*. Un secondo termometro è posto all'estremità inferiore della stufa; ambedue sono divisi in gradi sino a 360°. La stufa è circondata e coperta da un riflettore di latta; tre lampade anulari a gas la circondano a tre diverse altezze; ciascuna può venir regolata indipendentemente dalle altre.

Poca precisione è necessaria, pel nostro scopo, nella valutazione delle temperature; basta che queste si possano tener costanti entro qualche grado lungo tutto il filo per un tempo abbastanza lungo, il che, con qualche fatica, si ottiene abbastanza approssimatamente. Per queste ragioni ho creduto sufficiente il sistema di riscaldamento ora descritto.

Il raffreddamento si fa molto lentamente. Per lo più il periodo di riscaldamento e di temperatura costante è di circa due ore; il raffreddamento dura altrettanto. Durante il primo periodo si fanno frequenti letture ai due termometri, per ottenere che l'uno e l'altro segnino per ugual tempo la massima temperatura raggiunta.

15. *Trasporto del filo*. Un braccio di ferro lungo circa un metro gira a cerniera intorno ad un asse fisso al muro a metà distanza tra l'apparecchio di misura e la stufa; alla sua estremità sta una puleggia che ha il centro verticalmente al di sopra dell'asse della stufa o della linea delle due pinzette di contatto. Un cordoncino, fisso all'estremità del braccio s'avvolge sulla puleggia fissa e sopra una mobile la quale porta un piccolo uncino destinato ad agganciarsi con quello del tappo (v. § 7). Senza la seconda puleggia l'ascesa e la discesa sarebbero accompagnate da movimenti di torsione rapidissimi (fig. 11).

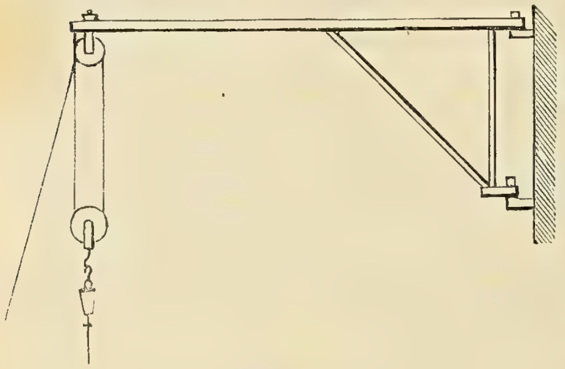


Fig. 11.

Quando si vuol trasportare il filo dall'apparecchio di misura alla stufa, si gira il braccio verso il primo, e, sollevato per mezzo della funicella il tappo tanto che esca tutto dall'anello di sostegno, lo si gira in avanti finchè il filo esca dalla fessura di questo, indi, portato il tutto alla massima altezza, si compie lentamente la rotazione, e si cala poi il filo nella stufa finchè sia entrato tutto il disco col suo carico; allora si ripone il coperchio che era stato tolto, lo si fissa coll'anello, e finalmente si compie la discesa.

III.

16. *Correzioni.* Descritte le parti principali degli apparecchi, veniamo a qualche cenno sopra l'andamento delle misure, sopra la loro sensibilità e precisione e sopra alcune correzioni e verifiche necessarie.

Elasticità. La temperatura fa variare direttamente il modulo di elasticità, ed altera le misure di resistenza indirettamente dilatando il filo ed il regolo di misura. Dobbiamo ora verificare se le correzioni necessarie cadono nei limiti della nostra precisione.

In ciascuna serie di esperienze la temperatura variò tra i limiti seguenti:

Serie	A (platino)	tra	21°,8	e	23°,4	di 1°,6
"	B (platino)	"	22, 6	"	25, 8	" 3, 2
"	C (argento)	"	23, 6	"	27, 5	" 3, 9
"	D (ferro)	"	26, 3	"	27, 2	" 0, 9

A tali variazioni di temperatura corrispondono le seguenti variazioni relative del modulo di torsione, e della durata di un'oscillazione, calcolate coi dati del prof. Pisati (1):

	Variazioni del modulo	Variazioni della durata
Serie A	0,000181	0,000090
" B	0,000362	0,000181
" C	0,001510	0,000755
" D	0,000185	0,000092

Queste, sebbene molto piccole, nella massima parte dei casi sono entro i limiti della precisione delle nostre misure. Abbiamo perciò ridotto i numeri in ciascuna serie ad una temperatura media, prendendo come variazione relativa della durata per 1°:

pel platino	0,000056
" l'argento	0,000193
" il ferro	0,000103

17. Nelle misure di *resistenza* non è sentito l'effetto della dilatazione del filo che nel senso della lunghezza, giacchè quella della sezione è uguale pel filo di esperienza e per quello di confronto; quest'ultimo è sempre interamente compreso nei circuiti, perciò il contatto mobile, non essendovi nessun'altra variazione, deve seguire la dilatazione del primo. Per la dilatazione del filo la lettura al regolo varia dunque come $1+kt$; dove k è il cefficiente di dilatazione lineare. La dilatazione del regolo invece ha effetto opposto, giacchè all'aumentare della temperatura, ad una data lunghezza corrisponde una lettura minore; questa varierà come $1-k't$. La variazione totale

(1) Memoria citata.

sarà $L(k-k')t$, ossia per ridurre a 0° si dovrà eseguir la correzione $-L(k-k')t$, e per ridurre da una temperatura t ad una t_0

$$-L(k-k')(t-t_0).$$

Il coefficiente di dilatazione del regolo di ottone è

$$k' = 0,0000180$$

I valori di k e $k-k'$ sono

	k	$k-k'$
Platino	0,0000088	— 0,0000092
Argento	0,0000188	+ 0,0000008
Ferro	0,0000115	— 0,0000065

Per le variazioni di temperatura citate al § 16, si hanno così le seguenti correzioni *massime* nella lettura:

Serie	A	mm.	+ 0,014
"	B	"	+ 0,029
"	C	"	— 0,003
"	D	"	+ 0,006

Questi numeri mostrano che la temperatura anche nel senso ora discusso non influisce sensibilmente sulle nostre misure. In altri casi però la correzione può entrare nei limiti della precisione.

18. *Verifiche.* Le misure di resistenza sono ridotte a valutazioni di lunghezza; è perciò necessario di verificare la calibricità del filo per quanto importa alla ricerca. La verifica pel tratto superiore, entro il quale si muove il contatto mobile, si fa nel modo seguente. Al filo di confronto, mediante contatti a mercurio, si aggiungono due fili di rame aventi le resistenze ε ed η uguali a quelle di qualche millimetro del filo di esperienza. Per tal modo la misura eseguita su quest' ltimo, dà una lunghezza di resistenza pari a quella del filo di confronto $+\varepsilon+\eta$. Tolto ε si ripete la misura sostituendolo con una resistenza trascurabile, ed il corsojo si sposta di un tratto di resistenza ε. Diversi di questi tratti si ottengono variando comunque il valore di η che non occorre sia noto. Se il filo è perfettamente calibro, tutti quei tratti sono uguali se no si può tener conto della differenza.

Indipendentemente dall'aparepcchio di misura si paragona poi la resistenza ε con quella del filo di confronto, e se ne deduce il valore di un millimetro del filo di esperienza in frazione della resistenza totale di questo. Tali misure furono eseguite con un ponte della casa Siemens.

Riassumiamo i risultati ottenuti [1].

Valori in mm. della resistenza ε in diverse posizioni nella parte superiore del filo:

Serie	A	2,31	2,35	2,34		media	2,33
"	B	1,24	1,21	1,30	1,27	"	1,25
"	D		4,18			"	4,18

La misura non potè esser fatta per la serie C.

(1) Colla lettera ω indico l'*ohm*, unità legale di resistenza.

Tenuto conto degli errori di osservazione, il tratto nel quale scorre il contatto mobile apparisce sufficientemente calibro. Riteniamo perciò la resistenza ε rappresentata nei varî fili dalla lunghezza media.

Resistenza dei fili di confronto e di ε:

$$\begin{aligned} A &= 1^{\omega},745 \\ B &= 3,283 \\ C &= 0,3124 \\ D &= 0,9285 \\ \varepsilon &= 0,00435 \end{aligned}$$

Se ne deduce

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 0,00251\ A \\ &= 0,00132\ B \qquad (1) \\ &= 0,00468\ D \end{aligned}$$

Se invece i fili fossero calibri in tutta la loro lunghezza, i valori di ε in funzione della resistenza totale si otterrebero dividendo le lunghezze medie sopra citate per le lunghezze totali in mm. misurate sui fili durante le esperienze ora in discorso. Otterremo in questo modo.

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 0,00258\ A \\ &= 0,00144\ B \qquad (2) \\ &= 0,00476\ D \end{aligned}$$

I valori (1) confrontati coi valori (2) possono servire per calcolare la correzione relativa alla calibrazione; ma, come si vede, le differenze sono molto piccole e da attribuirsi ad errori di osservazione. D'altra parte la correzione si ridurrebbe ad una piccola variazione nella lunghezza totale del filo, che poco influirebbe sul valore relativo delle variazioni che noi vogliamo calcolare. Perciò, verificato che il difetto di calibrazione è molto piccolo, si è ammessa senz'altro la proporzionalità tra le lunghezze e le resistenze.

19. È pur necessario verificare se le variazioni che si osservano sono dovute unicamente alle azioni che si vogliono studiare, cioè se il trasporto del filo che ripetutamente è collocato nella stufa e nell'apparecchio di misura non disturbi i risultati. Fin dal principio delle esperienze si constatò che il trasporto più volte ripetuto non alterava sensibilmente i numeri dati dal regolo misuratore. Ma per persuadersi che tale condizione di cose si mantiene durante tutta la serie di esperienze, si dispose oltre ai fili di esperienza e di confronto, un 3° filo *di controllo* di platino, il quale lasciato in condizioni invariabili veniva di tanto in tanto portato all'apparecchio di misura e confrontato col filo di confronto che aveva servito per la serie A. Ecco alcuni dei risultati ottenuti a grande intervallo di tempo:

3 giugno 1886	L = cent. 90,361	a	23°,10	L′ = 90,366
25 " "	90,345		22, 40	90,350
4 agosto "	90,360		26, 60	90,368
15 dicembre "	90,386		16, 50	90,386

I valori indicati con L sono quelli direttamente misurati sul regolo, quelli indicati con L′ sono ridotti alla temperatura di 16°,50 nel modo detto al § 17. La concordanza di questi valori e specialmente dei primi tre, che più ci interessano, ci assicura che nessuna causa perturbatrice poteva intervenire nelle esperienze, le quali, in ciascuna serie, si succedevano a breve intervallo.

20. Finalmente si determinò la correzione relativa allo spostamento dello zero della divisione millimetrica del regolo, rispetto alla posizione fissa del contatto inferiore, correzione di + mm. 5,50 che venne applicata a tutte le misure e che è già computata nei numeri dati in seguito.

La divisione millimetrica, fatta con una buona macchina divisoria, può essere ritenuta esatta entro i limiti della precisione raggiunta (circa mm. 0,02).

21. *Sensibilità e precisione.* I numeri sopra citati, oltre a dimostrare il buon funzionamento degli apparecchi, dànno un'idea della sensibilità e della precisione delle misure. Questi elementi vengono meglio valutati dai dati seguenti.

Deviazioni in millimetri della scala galvanometrica, corrispondenti ad uno spostamento di mm. 0,05 del corsoio:

Serie A	mm. 5,7	± 0,64	dedotto da	130	determinazioni
" B	6,0	± 0,69	"	70	"
" C	2,8	± 0,37	"	55	"
" D	4,1	± 0,71	"	20	"

Gli errori probabili scritti accanto alle deviazioni si riferiscono ad una sola determinazione.

Dai valori sopra dati (§ 18) si deduce che a mm. 0,05 di filo corrispondono le resistenze:

	0ω,000085	0,000164	0,000015	0,000046
cioè *microhms*	85	164	15	46

e ad un millimetro di deviazione del galvanomometro:

microhms	14,9	27,3	5,4	11,2

Notiamo che il valore della sensibilità veniva determinato una volta per ogni misura di resistenza.

Gli errori probabili sopra citati corrispondono sempre ad una lunghezza minore di 0,01 e precisamente a

	± mm. 0,007	0,008	0,008	0,006
cioè a				
	± microhms 11,9	26,4	2,4	9,0

Ma meglio si riconoscerà la precisione dal confronto delle misure fatte più volte sopra un filo mantenuto in condizioni invariabili (v. parte IV).

22. Nella misura delle oscillazioni di torsione, la durata può esser determinata facilmente colla precisione di $0^s,0001$, giacchè la lunghezza di un secondo sopra la striscia cronografica (v. § 12) è di circa un centimetro; la durata complessiva di 4 o 500 oscillazioni può dunque esser valutata entro $0^s,04$ e quindi quella di ciascuna entro il limite sopra detto. I risultati delle esperienze, ripetute più volte, hanno sempre confermato questa conclusione.

23. *Procedimento tenuto nell'eseguire le esperienze.* Chiuso il contatto inferiore (v. fig. 7, § 10), si dispone il contatto esterno π' in modo che il galvamometro rimanga approssimativamente in equilibrio entro qualche millimetro della scala; ottenuto questo, l'osservatore si pone al galvamometro e, lasciato scorrere circa mezzo minuto perchè si ristabilisca l'uniformità di temperatura, turbata durante la prima operazione, chiude l'interruttore I e legge la deviazione al cannocchiale; se questa è troppo grande rispetto alla precisione, la riduce spostando π', ripete la lettura più volte ad intervalli di circa trenta secondi per assicurarsi che l'equilibrio di temperatura è ristabilito, e nota la deviazione definitiva α'. Aperta la pinza inferiore e girati i due commutatori, stabilisce il contatto superiore e lo sposta fino ad ottenere l'equilibrio approssimato del galvamometro, procedendo colle stesse cautele e notando la deviazione finale β_1. Se tra questa misura e la prima è trascorso troppo tempo, come puó accadere nel caso che si sien fatti numerosi tentativi, si rifanno le misure di α' e di β_1. Dopo ciò si sposta il corsoio superiore di mm. 0,05 o 0,10 innalzandolo od abbassandolo in modo da ottenere una deviazione β_2 di segno contrario alla precedente; e finalmente si ripete la osservazione col contatto inferiore, notando la deviazione α'' che dovrebbe coincidere con α'. Nel tempo stesso si saranno notate le due letture L_1 L_2 fatte sul regolo, e differenti di mm. 0,05 o 0,10.

Come valore vero delle deviazioni, sempre molto piccole, si prende $\alpha = \frac{\alpha' + \alpha''}{2}$ $\beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$, e come valore della lunghezza letta sul regolo $L' = \frac{L_1 + L_2}{2}$. La differenza $\beta_2 - \beta_1$, deviazione corrispondente alla lunghezza $L_2 - L_1$, dà la sensibilità nel momento della misura, che permette di tradurre in millimetri le deviazioni α e β.

Dalla figura 7 si vede che innalzando p', si aumenta il tratto collegato col filo $\gamma\pi$, e che, tenuto conto della mutata posizione dei commutatori, lo stesso avviene quando si alza p, perciò l'uno e l'altro spostamento daranno al galvamometro deviazioni di ugual segno, p. e. negative; la deviazione negativa indicherà che il contatto è più alto di quant'è necessario per l'equilibio, cioè che la lunghezza corrispondente alla deviazione stessa deve esser tolta alla L'; dovrà invece aggiungersi se la deviazione è positiva. Il valore definitivo della lunghezza sarà

$$L = L' (\pm \alpha \pm \beta) \frac{L_2 - L_1}{\beta_2 - \beta.}$$

dove il segno di α e β coincide con quello delle corrispondenti deviazioni.

L'esperienza così condotta richiede non più di una diecina di minuti; il numero L inoltre è ottenuto mediante due misure, che dànno anche, ad ogni esperienza, la sensibilità. Sul valore di questa influisce la bontà dei contatti giacchè si fanno letture al galvamometro; ma non è a credere che ne venga sensibilmente turbato il risultato. Anzitutto i due contatti, alla distanza per lo più di 0,05, dànno deviazioni contrarie, la posizione giusta del corsoio è perciò necessariamente in un punto intermedio; onde, per quanto grave sia l'incertezza nella sensibilità, quella nella misura deve essere minore di 0,05; ma oltre a ciò al § 21 abbiamo veduto che la sensibilità

ha un errore probabile corrispondente ad una lunghezza inferiore a mm. 0,01. I vantaggi che hanno consigliato la scelta del metodo (§ 6) restano dunque inalterati.

Ecco un esempio tolto dalla prima serie:

					Sensibilità	
1886	$t=23°,20$	$\alpha'=0^p,0$	$\beta_1=-4^p,7$	$L_1=890^{mm},20$	$\beta_2-\beta_1=5^p,9$	$0^{mm},05=5^p,9$
giugno		$\alpha''=+0,4$	$\beta_2=+1,2$	$L_2=890,\ 15$		$1^p=0^{mm},008$
4		$\alpha=+0,2$	$\beta=-1,7$			
		$\alpha+\beta=-1^p,5$		$L'=890,\ 175$		p = parte della scala galvanom.
		$=-0,^{mm}012$				
			$L=890,16$			mm = millim. del regolo di misura.

Al valore di L si devono poi, se occorre, applicare le correzioni indicate ai §§ 19 e 20.

24. Da tutto quanto precede possiamo concludere che gli strumenti ed i metodi soddisfanno alle volute condizioni. Anzi vedremo che la loro precisione è più che sufficiente, se si considera l'indole dei risultati che ora passiamo a riassumere.

IV.

Risultati delle esperienze.

25. Le esperienze, come si è detto, furono eseguite sopra quattro fili: due di platino, uno di argento ed uno di ferro, le cui costanti iniziali precedono ciascuno specchietto riassuntivo. I valori di L sono già corretti per lo spostamento dello zero del regolo (§ 20) e quelli della durata di oscillazione (t) ridotti ad una medesima temperatura mediante i coefficienti stabiliti al § 16.

Sopra ogni filo si sperimentò prima l'azione del lavoro meccanico di torsione e trazione, poi quella delle temporanee elevazioni di temperatura. Per mettere a confronto i diversi valori ottenuti per la resistenza specifica, che è inversamente proporzionale alla lunghezza L corrispondente alla resistenza del filo di confronto, e pel modulo di elasticità, che è inversamente proporzionale al quadrato della durata, si sono presi come unità i valori iniziali di queste due grandezze, onde i numeri dati non sono che i rapporti tra quelli relativi a ciascuna esperienza ed il primo di ciascuna serie; la differenza tra essi e l'unità dà la variazione relativa constatata.

Per rendere il confronto più chiaro si costruì per ogni filo una curva avente per ascisse il modulo di elasticità, e per ordinate le resistenze (posti uguali ad uno i due valori iniziali); l'origine delle coordinate è poi trasportata in un punto conveniente onde risultino più evidenti le variazioni che interessano.

Serie A. — *Filo di Platino grosso.*

26. La tabella I dà i risultati delle esperienze fatte per provare l'azione del lavoro meccanico e insieme quella del trasporto del filo dall'apparecchio di misura alla

stufa. Nella colonna 4 è indicato a qual genere di operazione il filo sia stato sottoposto tra una esperienza e l'altra; il lavoro di torsione e di trazione era sempre continuato per molto tempo.

Nella colonna 3 sono scritte le lunghezze L espresse in centimetri; nella 5 la durata dell'oscillazione cui è già applicata la piccola correzione dipendente dalla temperatura notata alla colonna 2; nella 6 la distanza tra i due punti segnati sul filo, misurata col collimatore sopra descritto (§ 13).

TABELLA I.

1 Data	2 T	3 L	4	5 *t*	6 Lunghezza
Maggio 29	21°.90	89,561			
31	22.10	89,561			
			torsione e trazione	2,3404	1^m,064 51
»	22.15	89,572			
Giugno 1	22.60	89,563			1,064 51
»	22.25		torsione	2,3414	
»	22.25	89,562			1,064 51
			trazione		
»	22.45	89,567			
			torsione	2,3414	
»	22.35	89,565			
» 2	22.86	89,560			1,064 51
			torsione e trazione	2,3406	
»	22.67	89,566			1,064 50
			torsione	2,3409	
»	22.80	89,566			
»	22.60	89,572			
» 3	22.90	89,566			1,064 52
»	23.05	89,557			
			trazione		
»	23.00	89,556			
»	22.95	89,561			1,064 51
			trasporto		
»	23.05	89,564			
» 4	23.00	89,560			
			trasporto		
»	23.10	89,562			1,064 49
»	23.20	89,566			
			trasporto		
»	23.25	89,567			
» 6	23.00	89,564			1,064 46
			trazione		
»	23.20	89,568			1,064 49
			torsione	2,3412	
» 7	23.00	89,561			
»	23.00	89,566			
	Medie	89,564		2,3410	1,064 50

I numeri della colonna 3, ottenuti in un periodo di dieci giorni presentano differenze piccolissime e senza alcun regolare andamento; il che prova che nel platino il lavoro di torsione o di trazione non altera sensibilmente la resistenza; ciò rende questo metallo molto opportuno per la costruzione dei fili di misura. Possiamo dunque ammettere che le dette differenze sien dovute ai soli errori di osservazione. Otteniamo allora come valor medio di L cent. 89,564, come error probabile di una esperienza 0,0030 pari a microhms 51 e come error probabile relativo 0,000 034.

La sola influenza che si può sospettare è quella della trazione, ma non è che temporanea; infatti la L che segue la trazione è, tranne in un caso, sensibilmente maggiore di quella che precede; così nel primo caso si avrebbe un aumento di 0,011, nel 2° di 0,0 05, nel 3° di 0,0 06 e nel 5° di 0,0 04. In ogni caso poi il valore che segue la trazione è maggiore del valore medio. Quest'azione temporanea pare anche decrescente, come se il filo andasse man mano rendendosi meno sensibile ad essa. Escludendo i citati valori l'error probabile relativo diventa

$$\pm 0,000027$$
pari a circa cent. 0,0024

del filo. È questo il numero che possiamo assumere come misura della precsione nella presente serie.

La tabella I prova inoltre che il trasporto non altera affatto i risultati e che le variazioni di temperatura non sono sentite dall'apparecchio, giacchè non hanno nessuna relazione con quelle di L, sebbene giungano sino a 1°,3.

Anche la durata delle oscillazioni (colonna 5) si è mantenuta costante, giacchè si vede che gli ultimi valori coincidono coi primi, e le variazioni non hanno alcuna regolarità, sebbene sieno alquanto maggiori di quelle che si presentano ordinariamente. Il valor medio è 2,3410, e l'error probabile di una osservazione ± 0,0003.

Dopo ciò è naturale che la lunghezza del filo sia rimasta costante come lo indica l'ultima colonna che dà il risultato delle misure fatte col collimatore e corrette per le piccole differenze di temperatura. Il valor medio della lunghezza risulta cent. 106,450 e l'error probabile di una misura cent. 0,0012.

27. Passiamo ora ad esaminare l'azione del riscaldamento temporaneo. Dopo un primo elevamento della temperatura a circa 65°, che non diede nessun effetto sensibile si riscaldò a circa 80°, e le misure, fatte mentre il filo più volte eseguiva diversi lavori di torsione e di trazione, diedero i seguenti risultati:

8 Giugno	L = 89,574	t = 2,3420
" "	89,575	2,3420
" "	89,576	
" "	89,577	2,3422
" "	89,579	
9 Giugno	89,569	
" "	89,563	2,3417

9 Giugno	....	89,568	
„	„	89,568	
„	„	89,573	2,3422
„	„	89,575	
„	„	89,579	
„	„	89,578	2,3419

Il filo si trova forse in uno stato alquanto variabile, ma le variazioni sono troppo piccole per poterne tenere maggior conto. Terremo i valori medii

$$L = 89{,}572\ (\pm\ 0{,}001) \quad t = 2{,}3420\ (\pm\ 0{,}0000)$$

Dai valori sopra dati per L appare ancora quanto abbiamo notato al § 26, cioè un temporaneo aumento di L per effetto dei lavori meccanici; infatti, nel giorno 8 giugno, tra le diverse misure il filo oscillò per torsione 5 volte e fu ripetutamente sottoposto a variazioni di tensione (fino circa 600 grammi), e i valori di L come si vede aumentano regolarmente. Ma lasciato a sè il filo durante la notte, il valore di L si ritrovò diminuito, e andò di nuovo aumentando per i nuovi lavori di torsione e trazione cui il filo fu sottoposto durante il giorno 10 (oscillò 7 volte per torsione facendo 6000 oscillazioni).

L'esperienza successiva diede risultati più regolari ancora. Essa venne fatta in seguito ad un riscaldamento a 160°.

10 Giugno 1886	L = 89,682	t = 2,3364
„	89,679	
„	89,678	2,3362
„	89,679	
„	89,680	
Medie	89,680	2,8363

Queste due medie insieme a quella della tabella I, si prendono come i dati delle prime tre esperienze che sono riuniti alle successive nella seguente tabella.

TABELLA II.

1 Esper.	2 Data	3 T	4 L cent.	5 t	6
1	Giugno 7	22°,8	89,564	2ˢ,3410	Lavoro meccanico
					Riscaldamento a 80°
2	» 8-9	22,5	89,572	2,3421	
					» 160
3	» 10-11	22,7	89,680	2,3364	
					» 155
4	» 11-12	22,1	89,713	2,3346	
		22,3	89,709	2,3345	
					» 160
5	» 12-13	22,4	89,738	2,3339	
		22,2	89,738	2,3335	
					» 170
6	» 14	22,4	89,767	2,3321	
		22,5	89,772	2,3322	
					» 160
7	» 15	22,8	89,777	2,3320	
					» 200
8	» 16	22,8	89,840	2,3292	
		—	89,840	2,3295	
					» 250
9	» 16	23,0	89,749	2,3288	
		22,5	89,746	2,3282	
					» 295
10	» 17	23,0	89,494	2,3245	
		23,0	89,492	2,3247	
					» 295
11	» 18	22,7	89,467	2,3232	
		22,7	89,468	2,3233	
					» 320
12	» 19	22,5	89,514	2,3226	

I valori segnati nelle colonne 4 e 5 per ciascuna esperienza sono sempre molto concordanti, quelli di L sono le medie delle due misure fatte l'una prima e l'altra dopo la determinazione della durata t (v. § 5).

28. La tabella III riassume tutta la serie. Nelle colonne 2 e 3 sono le medie dei numeri dati alla tabella II per le singole esperienze; la 4 dà la resistenza specifica del filo espressa prendendo per unità la resistenza iniziale, cioè $R = \frac{89{,}564}{L}$; la 5 dà il modulo di elasticità espresso in modo analogo $M = \left(\frac{2{,}3410}{t}\right)^2$. La 6 e 7 dànno le ascisse e ordinate in millimetri della curva A (v. tavola I).

Tabella III.

Serie A. — *Filo di Platino grosso.*

Diametro = cent. 0,0415. Resistenza = 1^{ω},745.
Lunghezza iniziale cm. 89,564.

1 Esper.	2 L	3 *t*	4 R	5 M	6 ascisse	7 ordinate
1	c 89,564	s 2,3410	1,00000	1,00000	0,0	40,0
2	89,572	2,3420	0,99991	0,99915	— 8,5	39,1
3	89,680	2,3364	0,99871	1,00394	39,4	27,1
4	89,711	2,3345	0,99836	1,00558	55,8	23,6
5	89,738	2,3337	0,99806	1,00626	62,6	20,6
6	89,769	2,3322	0,99772	1,00756	75,6	17,2
7	89,777	2,3320	0,99763	1,00773	77,3	16,3
8	89,840	2,3293	0,99693	1,01007	100,7	9,3
9	89,747	2,3285	0,99796	1,01077	107,7	19,6
10	89,493	2,3246	1,00079	1,01416	141,6	47,9
11	89,487	2,3232	1,00086	1,01538	153,8	48,6
12	89,514	2,3226	1,00056	1,01591	159,1	45,6

All'origine delle coordinate della curva corrispondono i valori M = 1,000 00 R = 0,99600.

La scala è per le ascisse di un millimetro per 0,000 1
per le ordinate di " " " 0,000 1

La tabella III e meglio la curva A mostra che, mentre i moduli di elasticità vanno aumentando, la resistenza specifica diminuisce, e, raggiunto un minimo, aumenta per toccare poi un massimo. Rimandiamo a più tardi la discussione di questi risultati.

Serie B. — *Filo di Platino sottile.*

29. Questa seconda serie ha principalmente lo scopo di constatare se l'andamento, alquanto singolare, della serie precedente non sia effetto di qualche causa d'indole accidentale, o non abbia realmente significato fisico. Per tale scopo si è ripetuta la serie di esperienze sopra un filo tratto dalla medesima massa di platino, ma di diametro molto minore, in modo che le misure vengan fatte in condizioni molto differenti tanto per la resistenza che per la elasticità.

Si cominciò anche in questo caso a far eseguire al filo ripetutamente lavori di torsione e di trazione e si ebbero irregolarità anche minori che non pel filo A; tantochè, per questa serie, l'error probabile di una misura si può ritenere inferiore a 0,0 02.

Ecco, per esempio i numeri della 6ª esperienza, per la quale si fece il maggior numero di misure:

L	T
89,988	4,3174
89,994	
89,995	4,3172
89,996	
89,997	
89,998	4,3174

Anche qui, sopra 5 esperienze di trazione, 4 presentarono il temporaneo aumento nel valore di L, sopra notato.

Senza entrare in altri particolari, riassumo le esperienze nella tabella IV, analoga alla III.

Tabella IV.

Serie B. — *Filo di Platino sottile.*

Diametro = cent. 0,0304. Resistenza = 3^{ω},283.
Lunghezza » 89,836.

1 Esper.	2 L	3 T	4 R	5 M	6 ascisse	7 ordinate	8
1	89,836	4,3309	1,000 00	1,000 00	0,0	40,0	95°
2	89,865	4,3304	0,999 68	1,000 23	2,3	36,8	112
3	89,880	4,3275	0,999 51	1,001 57	15,7	35,1	161
4	89,923	4,3219	0,999 03	1,004 17	41,7	30,3	160
5	89,961	4,3196	0,998 61	1,005 24	52,4	26,1	179
6	89,991	4,3174	0,998 28	1,006 26	62,6	22,8	200
7	90,117	4,3114	0,996 88	1,009 07	90,7	8,8	216
8	90,119	4,3070	0,996 86	1,011 13	111,3	8,6	234
9	90,067	4,3039	0,997 44	1,012 59	125,9	14,4	261
10	89,957	4,3011	0,998 65	1,013 91	139,1	26,5	292
11	89,859	4,2988	0,999 74	1,014 99	149,9	37,4	312
12	89,871	4,2966	0,999 61	1,016 03	160,3	36,1	330
13	89,909	4,2995	0,999 19	1,014 71	147,1	31,9	350
14	89,927	4,2989	0,998 99	1,014 95	149,5	29,9	

All'origine delle coordinate della curva corrispondono i valori M = 1,000 00 R = 0,996 00

La scala è per le ascisse di un millim. per 0,000 1
per le ordinate » » » 0,000 1

Nella colonna 8 sono registrate le temperature alle quali veniva portato il filo tra un'esperienza e l'altra. Sebbene le condizioni delle misure sieno affatto diverse, e le variazioni nella temperatura seguano tutt'altra legge che nella serie A, la curva B

ha un andamento identico a quello della A, ciò che ci conferma nella fiducia che si può avere nei risultati.

Serie C. — *Filo di argento.*

30. Le grandi variazioni che, secondo le citate esperienze del prof. Pisati, si verificano nell'elasticità dell'argento sia per le variazioni temporanee di temperatura sia anche per il lavoro meccanico, facevano prevedere per questa serie un maggiore interesse. Si trovò infatti che le variazioni nella resistenza elettrica, confrontate con quelle del platino, sono di gran lunga maggiori, e la differenza è molto prossimamente dello stesso ordine come la differenza tra le variazioni dell'elasticità nei due casi.

Inoltre, anche le azioni meccaniche di torsione e trazione producono effetti molto più sensibili che non nel platino, sopra la resistenza come sopra l'elasticità. Ciò risulta da una lunga serie di esperienze fatte in principio dello studio di questo filo; esperienze che sono riassunte nella tabella V.

TABELLA V.

Esper.	Data	L	T	Azione meccanica
1	14 luglio 1886	99,801	3,6462	
				oscilla per torsione 4 volte [1]
2	14 »	99,808	3,6449	
				» » 2 »
3	15 »	99,806	3,6401	
				» » 4 »
4	15 »	99,807	3,6401	
				» » 5 »
5	15 »	99,815	3,6391	
				» » 4 »
6	16 »	99,801	3,6374	
				» » 4 »
7	16 »	99,815	3,6371	
				» » 3 »
8	16 »	99,818	3,6369	
				» » 3 »
9	17 »	99,822	3,6366	
				» » 3 »
10	17 »	99,820	3,6350	
				» » 3 »
11	17 »	99,822	3,6352	
				trazione (200 grammi)
12	18 »	99,828	3,6338	
				oscilla per torsione 1 »
13	18 »	99,828	3,6338	
				» » 4 »
14	18 »	99,831	3,6339	

Il lavoro di torsione, conformemente alle esperienze del prof. Pisati, fa diminuire la durata dell'oscillazione cioè aumentare il modulo di elasticità, finchè si raggiunge uno stato normale (esperienze 10 e 11), il quale viene di nuovo turbato quando il lavoro cambia natura (esperienze 12, 13 e 14). Nel tempo stesso variano i valori di L sebbene in minor misura; queste variazioni non sono tanto regolari quanto quelle di T, tuttavia è manifesta la tendenza all'aumento (fa eccezione solo l'esperienza 6) ed allo stabilirsi di uno stato normale simultaneo allo stato normale elastico (esperienze 10 e 11), e che insieme a questo viene turbato quando muta la natura del lavoro meccanico.

[1] Ogni volta il filo faceva circa 500 oscillazioni: in tutto il numero di oscillazioni fatte è dunque di circa 20000.

Dai dati della tabella V si possono ricavare tre numeri quali risultati di tre esperienze corrispondenti allo stato iniziale e ai due stati normali raggiunti poi. Pel primo prendiamo le medie tra le esperienze 3 e 4, pel 2° tra le 10 ed 11, pel 3° tra le 12, 13 e 14. Otteniamo così le tre coppie di valori:

T	L
3,6401	99,806
3,6351	99,821
3,6338	99,830

Vedremo ora che queste prime variazioni dovute alle azioni meccaniche rientrano perfettamente nella legge di quelle dovute alle termiche, che ora passiamo a studiare.

31. I risultati delle esperienze, eseguite nel modo descritto per gli altri fili, sono raccolti, insieme ai tre citati, nella tabella VI. Ai valori di L sono applicate le volute correzioni.

TABELLA VI.

Serie C. — *Filo di argento.*

Diametro cent. 0,0300. Resistenza 0^{ω},3124.
Lunghezza » 100,356.

	L	T	M	R	ascisse	ordinate	
1	100,356	3,6401	1,00000	1,00000	0,0	132,5	
2	100,372	3,6351	1,00165	0,99984	4,1	132,1	torsione
3	100,380	3,6338	1,00242	0,99976	6,0	131,9	trazione
4	100,479	3,6152	1,01276	0,99878	31,9	129,4	100°
5	100,555	3,6085	1,01653	0,99802	41,3	127,6	100
6	100,555	3,6067	1,01754	0,99802	43,8	127,6	100
7	100,655	3,5976	1,02170	0,99689	54,2	124,7	150
8	100,735	3,5925	1,02560	0,99624	64,0	123,1	150
9	101,538	3,5723	1,03724	0,98846	93,1	103,6	200
10	102,150	3,5601	1,04439	0,98244	111,0	88,6	199
11	102,489	3,5532	1,04842	0,97919	121,0	80,5	199
12	102,669	3,5500	1,05030	0,97749	125,7	76,2	199
13	102,994	3,5420	1,05507	0,97439	137,7	68,5	230
14	104,717	3,4871	1,08855	0,95835	221,4	28,4	249
15	105,484	3,4607	1,10521	0,95139	263,0	11,0	250
16	105,941	3,4446	1,11559	0,94728	289,0	0,7	261

All'origine delle coordinate corrispondono i valori

$$M = 1,000\,00 \quad R = 0,94700$$

La scala è per le ascisse e per le ordinate di 1^{mm} per 0,0004 cioè quattro volte più piccola di quella delle curve A e B.

Come si vede, le variazioni dovute alle azioni termiche temporanee sono molto maggiori di quelle dovute alle meccaniche; ma ciò si verifica tanto per l'elasticità che per la resistenza, per modo che i punti ricavati dalle prime esperienze e dalle seconde si seguono

con legge continua sulla curva. L'andamento di questa, nel primo tratto, è analogo a quello della curva del platino; però nei limiti delle nostre esperienze, non si osserva nessun minimo, ma solo una meno rapida diminuzione delle ordinate negli ultimi punti.

Dopo i diversi riscaldamenti temporanei, che turbano lo stato normale del filo, si sarebbe potuto esaminare ancora l'effetto del lavoro di torsione; ma ciò non si è fatto in modo speciale, giacchè tale effetto è estremamente piccolo rispetto a quello dei riscaldamenti. Tuttavia si è potuto constatare che piccole variazioni avevano luogo ogni volta che il filo lavorava per torsione, quando cioè si misurava la durata delle oscillazioni; tale misura, come si è detto, era sempre compresa tra due elettriche, ed i risultati di queste, sebbene sempre pochissimo diversi tra di loro, furono molto meno concordanti che non per i fili prima studiati, e per il filo stesso in riposo. Credo inutile riportare i numeri che mettono in evidenza tali variazioni, le quali sarebbero affatto insensibili sulla curva.

La sensibilità che la resistenza dell'argento ha alle azioni meccaniche e termiche, rende questo metallo pochissimo adatto per la costruzione di tipi di resistenza.

Serie D. — *Filo di Ferro.*

32. Le esperienze sono condotte sempre allo stesso modo. Le azioni meccaniche non hanno sulla resistenza di questo filo effetto sensibile; perciò le due misure elettriche eseguite prima e dopo di quella della durata dell'oscillazione, sono sempre molto concordanti tra di loro; la differenza non superando mai i 2 o 3 centesimi di millimetro, la si può ritenere dovuta agli errori di osservazione. La tabella VII riassume senz'altro i risultati.

Tabella VII.

Serie D. — *Filo di ferro.*

Diametro cent. 0,0406. Resistenza $0^{\omega},9285$.
Lunghezza " 87,886.

	L	T	M	R	ascisse	ordinate	
1	87,886	2,4348	1,00000	1,00000	0,0	100,0	
							93°
2	87,912	2,4325	1,00192	0,99971	19,2	97,1	
							149
3	88,058	2,4308	1,00348	0,99805	34,8	80,5	
							190
4	88,290	2,4272	1,00629	0,99542	62,9	54,2	
							235
5	88,404	2,4254	1,00772	0,99414	77,2	41,4	
							290
6	88,605	2,4196	1,01261	0,99189	126,1	18,9	
							347
7	88,772	2,4161	1,01555	0,99002	155,5	0,2	

All'origine delle coordinate corrispondono i valori

$$M = 1,000\,00 \qquad R = 0,99000$$

La scala è per le ascisse e per le ordinate di 1^{mm} per 0,0001

I punti tracciati si trovano sopra una curva di andamento molto regolare, specialmente se si esclude l'ultima esperienza dopo la quale si constatò che il filo era fortemente ossidato in varî punti. Le variazioni avvenute nel ferro sono maggiori di

quelle del platino ma molto minori di quelle dell'argento. La forma della curva è molto analoga alla C.

V.

33. Le diverse azioni temporanee alle quali vennero sottoposti i fili sperimentati, cioè le azioni meccaniche e termiche, furono esercitate in diverso modo. Se osserviamo le temperature notate nell'ultima colonna delle tabelle riassuntive, vediamo che talvolta tra una esperienza e l'altra si hanno valori molto differenti, tal'altra il medesimo valore si ripete più volte di seguito; oltre a ciò, molto variabile era la durata del periodo di riscaldamento. In causa di tutte queste differenze ed irregolarità sarebbe impossibile stabilire una relazione tra le dette azioni e le variazioni da esse prodotte nella resistenza elettrica e nell'elasticità; al contrario risulta manifesta una relazione tra queste due variazioni, tantochè i punti segnati sulle tavole, che hanno i moduli di torsione per ascisse e le resistenze per ordinate, si seguono con continuità formando una curva regolare; per modo che le variazioni della resistenza sembrano direttamente dipendere da quelle dell'elasticità.

Questo risultato è confermato dall'esame più attento delle singole esperienze, il quale dimostra non solamente che esiste uno *stato normale* per le resistenze come per l'elasticità, ma ancora che i due stati normali vanno raggiungendosi simultaneamente per modo che ancora vien provato che ad ogni stato elastico corrisponde un determinato stato elettrico. Le considerazioni già fatte intorno all'effetto delle azioni meccaniche lo dimostrano; ma il fatto viene ancor meglio posto in evidenza dalle azioni termiche. Nella serie A i punti 2, 3, 4 e 5 sono ottenuti da 3 uguali riscaldamenti a 160°; i punti 9, 10, 11 da due a 195.° Nella serie B due riscaldamenti a 160° dánno i punti 3, 4, 5; nella C con 3 riscaldamenti a 100° si sono ottenuti i punti 3, 4, 5 e 6, con 2 a 150 i punti 6, 7, 8, con 4 a 200° i punti 8, 9, 10, 11, 12, e con 2 a 250° i punti 13, 14, 15. Nell'ultima serie (D), non furono mai ripetute prove con uguali temperature. Ora in tutti questi 8 casi, senza eccezione, gli intervalli fra i successivi punti vennero gradatamente diminuendo, mentre i punti stessi si mantengono sempre sulla medesima curva; ciò significa che il riscaldamento va producendo sempre minor effetto, finchè la resistenza insieme all'elasticità abbiano raggiunto quello stato che diciamo normale. Le successive operazioni disturbano poi nel tempo stesso lo stato normale elettrico e l'elastico.

34. Le nostre esperienze non si sono spinte che a temperature prossime ai 300°, ma sarebbe interessante seguire i fenomeni studiati fino a quelle temperature elevatissime che dánno luogo allo stato di ricocimento. È noto però che il modulo di elasticità non continua ad aumentare, ma soffre invece una diminuzione tale da renderlo in generale inferiore a quello iniziale dello stato di incrudimento (per il platino la diminuzione è di circa 0,090, per l'argento 0,053, per il ferro 0,0036); le ascisse delle nostre curve ritornerebbero dunque sopra i valori prima posseduti, e, se in realtà è vera la relazione in parola, lo stesso dovrebbe accadere per le ordinate (resistenze); senonchè il ricocimento produce sì profonda modificazione in tutte le proprietà del filo, che tale ritorno delle ordinate ai primitivi valori, cioè tale ritorno della linea sopra sè stessa, non potrebbe verificarsi che approssimatamente. Ora le esperienze fatte

da varî autori sopra fili incruditi e ricotti (1) si accordano con questo fatto, giacchè si trova in generale che la resistenza pei fili ricotti è maggiore che per gli incruditi, ciò che accenna appunto al detto ritorno. Di questo abbiamo inoltre una prova diretta nella serie B, nella quale il modulo cominciò a diminuire dopo il punto 12, i due punti successivi (13, 14) tendono evidentemente a tornare sulla curva tracciata.

35. Nella tavola II sono riportate le tre curve ottenute pel platino, l'argento ed il ferro, tutte colla medesima scala, cioè di 1^{mm} per 0,0010. Appare evidente come nei diversi metalli esaminati si presentino in diversa misura i fenomeni che abbiamo studiato, e tanto maggiore quanto minore è la resistenza elettrica specifica. Quanto però alla forma delle curve vediamo una perfetta analogia tra quelle del ferro e quelle dell'argento, e, pel primo tratto, anche per quella del platino; questo primo tratto ha sempre press' a poco la forma di una parabola di second'ordine avente per asse l'asse delle ordinate; sarebbe perciò facile rappresentarlo con una formola empirica, ma tale rappresentazione avrebbe poco interesse per il troppo ristretto numero di metalli esaminati e per l'ignoranza della loro composizione chimica. La presenza di piccole impurità altera così fortemente, come è noto, le resistenze elettriche e le loro modificazioni, che non è possibile fare un confronto tra i diversi metalli se non sono tutti chimicamente puri. Per le stesse ragioni sarebbe ora prematuro considerare alcune altre interessanti conseguenze cui potrebbero condurre i risultati ottenuti, e perciò mi limito a riassumere qui quelle conclusioni che sembrano potersi stabilire con qualche sicurezza.

1. Ogni causa che modifica l'elasticità modifica anche la resistenza elettrica dei metalli.

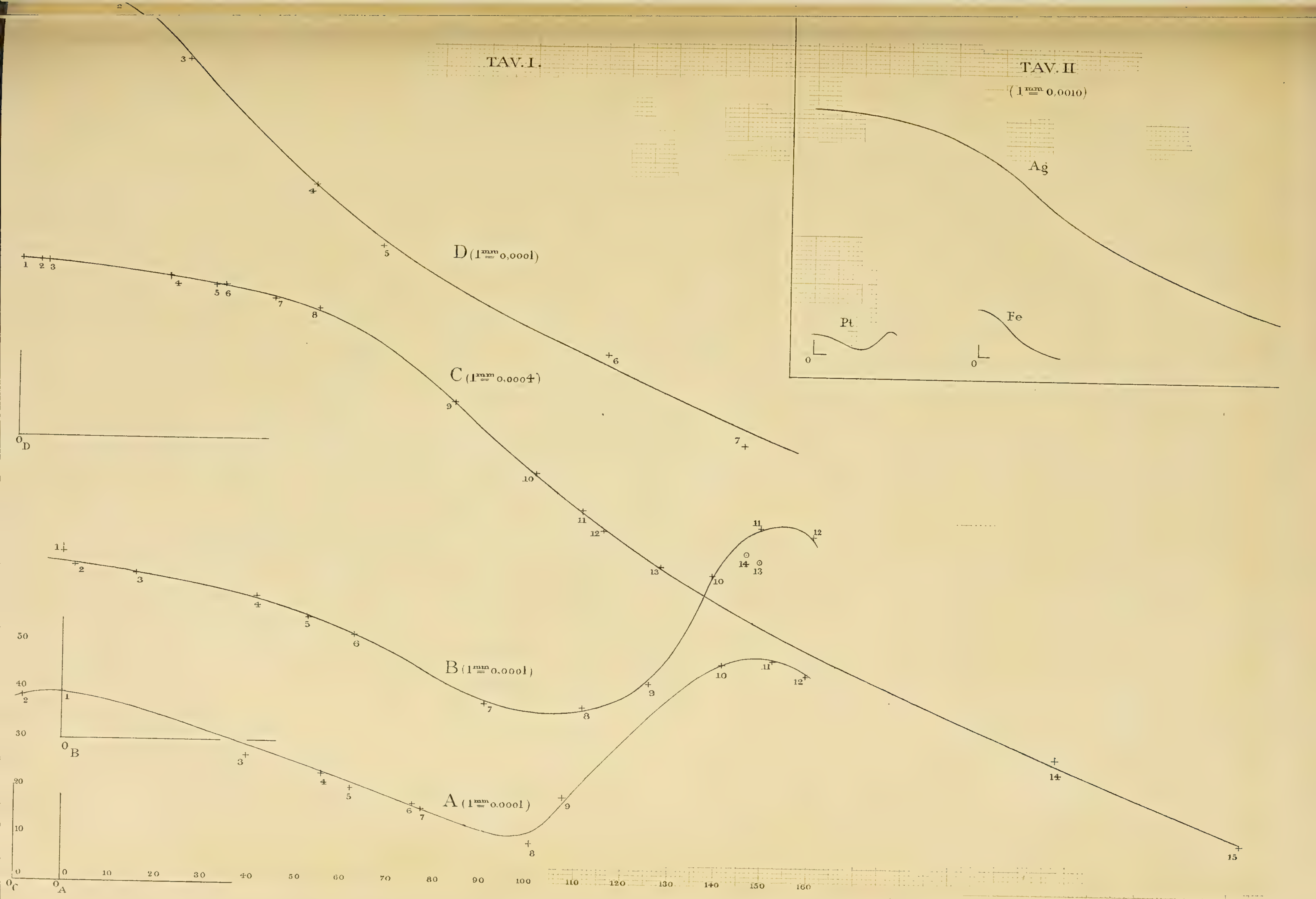
2. Ad ogni stato elastico normale corrisponde uno stato normale per la resistenza elettrica.

3. Le variazioni della resistenza sono legate a quelle dell'elasticità da relazioni semplici.

4. In generale la resistenza diminuisce all'aumentare della elasticità (2).

(1) Secondo Mousson tutti i metalli ricotti hanno resistenza maggiore degli incruditi. Secondo Chwolson (Beiblätt. di Wiedemann I p. 363) un debole ricocimento produce una diminuzione, un forte un aumento nella resistenza. Questo si accorda coi nostri risultati, e conferma il fatto che la variazione nella resistenza è dovuta alla modificazione nello stato elastico del metallo e non alla temperatura, giacchè la differenza tra il debole ed il forte ricocimento, più che nella temperatura sta nella durata dell'operazione. Tali risultati spiegano come altri sperimentatori (Matthiessen, Siemens, Becquerel) abbiano trovato una diminuzione della resistenza pel ricocimento (V. Wiedem., *Die Lehre von der Electricität* B. I. p. 522). Dopo ciò è chiaro che nello stato di incrudimento non vi è un minimo di resistenza, come alcuni autori hanno creduto (v. Gerosa, Memoria citata in principio); anzi dalla forma delle nostre curve apparirebbe, rispetto alle variazioni dell'elasticità, che allo stato di incrudimento la resistenza presenti un massimo.

(2) Nelle esperienze di Chwolson (V. nota al § 1) sono fatte alcune misure di elasticità, al solo scopo di dedurre dagli allungamenti le variazioni di sezione. Tuttavia si può vedere per un filo di rame, che, anche in questo caso, ad una diminuzione nella elasticità corrisponde un aumento nella resistenza elettrica.



Lit. Bruno e Salomone, Roma

Sulla conducibilità calorifica del bismuto posto in un campo magnetico.

Memoria del Socio AUGUSTO RIGHI

letta nella seduta dell' 8 gennaio 1888.

CAPO I.

Cenno su lavori che hanno attinenza colla presente Memoria.

Era naturale che, dimostrata la grande variazione di resistenza elettrica che subisce il bismuto portandolo in un campo magnetico, dovessi ricercare se anche la conducibilità termica presentava un'analoga variazione.

Solo in quest'anno però ebbi agio di fare questa ricerca. Il presente scritto è consacrato all'esposizione dei metodi da me impiegati e dei risultati ottenuti, dei quali ultimi un cenno fu già pubblicato (1).

È bene però, prima d'entrare nell'argomento, l'esaminare alcuni fenomeni che di recente si ottennero col bismuto posto nel campo magnetico, giacchè questi fenomeni hanno con quelli dei quali dovrò trattare, una certa relazione.

Ripetendo le mie esperienze sul fenomeno di Hall in lamine di bismuto, i signori Ettingshausen e Nernst osservarono certe apparenti irregolarità, che li condussero a sostituire un flusso calorifico stazionario alla corrente elettrica che percorre longitudinalmente la lastra, mantenendo però in comunicazione con un galvanometro gli elettrodi trasversali della medesima (2).

Se in tali condizioni si rende attiva la elettrocalamita fra i poli della quale è posta la lamina di bismuto, il galvanometro è percorso da una corrente elettrica permanente, che i signori v. Ettingshausen e Nernst chiamano *corrente termomagnetica trasversale*, e che s' inverte tanto invertendo la direzione del flusso calorifico, come invertendo la direzione del campo. Essa si presenta immediatamente quando si crea il campo, ed ha direzione tale, che si va dal punto in cui il calore entra nella lamina, al punto in cui vi entra la corrente elettrica, con una rotazione di 90° fatta in senso contrario della corrente magnetizzante.

La corrente termomagnetica è dunque precisamente di direzione contraria a quella della corrente termoelettrica che si genererebbe nel circuito del galvanometro in seguito alle variazioni di temperatura degli elettrodi, prodotte dalla rotazione delle isoterme,

(1) Rend. della R. Acc. dei Lincei, 12 giugno e 3 luglio 1887. C. R. 18 juillet 1887. — *La lumière éléctrique*, t. XXV, n. 30 (1887).

(2) V. Ettingshausen und Nernst, Wied. Ann. 1886, 10, p. 343. — W. Nernst, Wied. Ann. 1887, 8b, p. 760.

che dimostro nel cap. VII (¹). A torto dunque avanzai altra volta la congettura, che la corrente termomagnetica sia dovuta alla rotazione delle isoterme, ed a torto il Goldhammer volle sostenere questa stessa spiegazione del fenomeno in discorso (²). I signori v. Ettingshausen e Nernst hanno poi asserito che con coppie termoelettriche, nel cui circuito non entra la lamina di bismuto, non si può constatare variazione sensibile di temperatura fra le saldature degli elettrodi trasversali. Ciò non contraddice a quanto è stato da me stabilito (vedi cap. VII). Infatti le differenze di temperatura che si formano in seguito alla rotazione delle isoterme, richiedono un tempo assai lungo prima di assumere il loro massimo valore, dovendo il flusso calorifico assumere nella lamina un nuovo stato stazionario. Ora, i due fisici menzionati hanno sempre fatto le loro osservazioni subito dopo la chiusura o l'inversione della corrente che genera il campo magnetico, ed è naturale che non abbiano riscontrata una sensibile variazione di temperatura.

La corrente termomagnetica fu ottenuta da v. Ettingshausen e Nernst anche coll'antimonio, col nichel, col cobalto e col ferro; essa ha con quest'ultimo metallo una direzione inversa che cogli altri. Il Nernst poi ha ottenuto traccie del medesimo fenomeno col carbone, col rame, collo zinco e coll'argento.

I due fisici citati ottennero pure un *effetto termomagnetico longitudinale*, cioè una corrente elettrica che dura quanto il campo magnetico in cui è posta la lastra, e che si raccoglie da due elettrodi saldati sulla lamina lungo la direzione del flusso calorifico, la qual corrente non s' inverte invertendo il campo ed ha con diversi campioni di bismuto direzioni diverse. Ma di questo fenomeno, forse di natura complessa e ben distinto dall'effetto trasversale, non è duopo di qui occuparci.

Il prof. Boltzmann (³) ha ottenuto risultati interessanti, sostituendo nella esperienza che serve a mostrare la corrente di Hall, un tubo di Geissler di forma piatta, alla lamina di metallo. Questo tubo, che ha la figura di un rombo, porta ai vertici

(¹) Che la direzione della corrente termomagnetica sia inversa a quella della corrente generata per la rotazione delle isoterme, risulta chiaro esaminando la fig. 1, nella quale ABCD è la lamina di bismuto, mantenuta col lato AD alla temperatura più alta, per esempio 100° e col lato BC alla temperatura inferiore, per esempio 20°. La freccia *a* indica quindi il senso in cui si propaga il calore. Se le freccie *b* indicano la direzione della corrente magnetizzante, la corrente che si produce fra gli elettrodi applicati in E, F, attraversa la lamina nella direzione della freccia *c*, secondo l'enunciato di v. Ettingshausen e Nernst. Supponiamo ora che, come risulta dalle mie esperienze, l'isoterma EF per azione del campo ruoti in verso contrario a quello della freccia *b*. Il punto E diventerà più freddo ed il punto F più caldo di prima, e si genererà una corrente termoelettrica. E siccome in una coppia termoelettrica formata da bismuto e da un altro metallo, la corrente va attraverso la saldatura più calda dal bismuto all'altro metallo, così questa corrente avrà nel bismuto la direzione che va da E verso F, cioè precisamente opposta a quella indicata dalla freccia *c*.

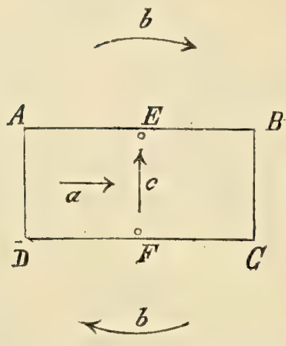


Fig. 1.

(²) Wied. Ann. 1887, p. 370.
(³) Wied. Ann. 1887, 8ᵇ, p. 789.

quattro elettrodi; i due dei vertici acuti servono a far percorrere il tubo dalle scariche d'un piccolo rocchetto d'induzione, mentre gli altri due comunicano con un galvanometro. Questo istrumento, quando si crei il campo magnetico, è percorso da una corrente, che ha la stessa direzione di quella che si otterrebbe col bismuto, sia che il tubo contenga aria od anidride carbonica.

Adoperando solo tre elettrodi, e facendo entrare per uno di essi la corrente indotta ed uscire biforcata per gli altri due, che comunicano coi due circuiti di un galvanometro differenziale, cioè adoperando la disposizione da me ideata per constatare in una lamina di forma qualunque il fenomeno di Hall, ottenne il Boltzmann fenomeni, che egli dichiara in tutto simili a quelli da me ottenuti col bismuto.

Col gas rarefatto, oltre di questi fenomêni si osservava naturalmente anche il noto spostamento della colonna luminosa, secondo le leggi elettrodinamiche. Colla disposizione a tre elettrodi aveva luogo corrispondentemente un aumento d'intensità della corrente che usciva dall'elettrodo verso il quale vedevasi spostato il fenomeno luminoso. Questo effetto si sovrapponeva a quello dovuto alla corrente di Hall.

Notò infine il Boltzmann, che in seguito alla deviazione che subisce la scarica entro il tubo, aumenta la resistenza che questo ad essa oppone, tanto è vero che biforcando la scarica fra due tubi di Geissler, uno solo dei quali è fra i poli, cresce lo splendore nell'altro tubo al momento in cui si crea il campo. Il gas presenta così un fenomeno analogo all'aumento di resistenza del bismuto posto nelle stesse condizioni.

Da queste esperienze, e da quelle già eseguite intorno all'effetto termomagnetico, il prof. v. Ettingshausen (¹) fu condotto di recente a scoprire col bismuto posto nel campo magnetico, un nuovo fenomeno che egli denomina: *differenza di temperatura galvanomagnetica.* Una lamina rettangolare di bismuto posta fra i poli di una elettrocalamita nella solita posizione (cioè col suo piano perpendicolare alle linee di forza), è percorsa longitudinalmente da una corrente elettrica piuttosto intensa, che la riscalda secondo le leggi di Joule. Due coppie termoelettriche in opposizione occupano il posto degli elettrodi trasversali di Hall (essendo poi ben isolate elettricamente dalla lamina). Il galvanometro con esse comunicante accusa, quando il campo magnetico viene eccitato, l'esistenza di una differenza di temperatura fra le due coppie, come se il calore sviluppato dalla corrente si spostasse nel seno della lastra nello stesso senso in cui si sposta la colonna di gas luminoso nel caso della esperienza di Boltzmann. Questo nuovo fenomeno sarebbe forse del genere dell'effetto Thomson, se non che qui il calore è trasportato trasversalmente alla corrente, per opera del magnetismo.

Secondo un'ultima comunicazione di v. Ettingshausen (²) l'effetto galvanomagnetico si può ritenere un fenomeno reciproco al fenomeno termomagnetico, press'a poco come il fenomeno di Peltier è reciproco della corrente termoelettrica. Basta perciò considerare che, formatasi nella lamina di bismuto, percorsa longitudinalmente dalla corrente, una differenza di temperatura fra i lembi laterali in virtù del fenomeno galvanomagnetico, deve passare fra questi attraverso la lamina un flusso calorifico. L'azione del campo magnetico su questo flusso, genererà il fenomeno termomagnetico,

(¹) Wied. Ann. 1887, 8^b, p. 737.
(²) Anz. d. k. Acad. d. Wiss. in Wien; seduta del 23 giugno 1887.

cioè una corrente elettrica, e la direzione di questa è precisamente inversa della corrente elettrica che realmente percorre la lamina.

Questa relazione persuade sempre più che il fenomeno termo-magnetico sia un fenomeno indipendente dalla rotazione delle isoterme, di cui si tratterà nel cap. VII. Anche per questa ragione era necessario che rendessi conto brevemente, come ho fatto, delle recenti esperienze dei signori v. Ettingshausen, Nernst e Boltzmann.

In tutti questi fenomeni, il bismuto dà sempre effetti di gran lunga superiori a quelli degli altri metalli, come appunto succede (ad eccezione di certe qualità di tellurio) anche nella produzione del fenomeno di Hall, e nella variazione di resistenza dovuta al magnetismo.

Passando ora ad esperienze che più da vicino hanno attinenza con questo lavoro, farò notare che nel corso delle sue ricerche sul fenomeno galvanomagnetico il sig. v. Ettingshausen fu condotto ad esaminare se, quando la lamina di bismuto è percorsa da un flusso calorifico, il campo magnetico fa deviare le sue isoterme, ma non ottenne la minima differenza di temperatura fra due punti d'una isoterma, nell'atto di eccitare l'elettrocalamita (1). Se però avesse aspettato un tempo sufficiente, dopo la produzione del campo magnetico, avrebbe certo constatata la rotazione delle isoterme, che sarà dimostrata nel cap. VII.

Anche il sig. Nernst ha dovuto per incidenza toccare la quistione della variazione di conducibilità termica del bismuto. Considerando che l'effetto termomagnetico trasversale è reciproco del fenomeno galvano-magnetico giunge, come v. Ettingshausen, alla conclusione, che l'intensità della corrente che percorre la lamina di bismuto deve diminuire nel campo magnetico. Questa diminuzione spiega, secondo lui, quelle mie esperienze dalle quali io dedussi che la resistenza del bismuto aumenta per azione del magnetismo.

Per sostenere questa singolare idea asserisce che non esiste variazione di conducibilità termica, analoga a quella di conducibilità elettrica da me constatata nel bismuto, poichè egli inutilmente tentò di ottenerla in un campo magnetico di circa 6000 unità (2). È probabile che se non ottenne il fenomeno, ciò sia dovuto ancora alla circostanza del tempo che si richiede onde muti lo stato permanente termico della lastra.

Mi resta ora ad accennare ad una recente pubblicazione del sig. Leduc (3), nella quale rende conto di ricerche simili a quelle da me eseguite ed all'esposizione delle quali è destinato questo scritto.

Egli pure ha dimostrato che la conducibilità calorifica del bismuto diminuisce notevolmente allorchè è posto trasversalmente nel campo magnetico, e che, se il bismuto è in forma di lamina rettangolare perpendicolare alle linee di forza magnetiche e percorsa longitudinalmente da un flusso permanente di calore, le linee isoterme sono girate in senso contrario della corrente magnetizzante, o, in altri termini, si ottiene sul flusso di calore un fenomeno analogo a quello scoperto da Hall sul flusso di elettricità. La comunicazione del sig. Leduc fu fatta all'Acc. di Parigi il 20 giugno

(1) Wied. Ann. 1887, 8^b, p. 741, linea 35 e seg.
(2) Wied. Ann. 1887, 8^b, p. 783.
(3) C. R. séance du 20 juin 1887.

scorso, mentre nella seduta del 12 giugno della R. Acc. dei Lincei io avevo già dato un cenno dei miei resultati, che più oltre esporrò dettagliatamente; per cui le ricerche mie e quelle del sig. Leduc, sono state fatte quasi simultaneamente (1).

Per mostrare la variazione di conducibilità calorifica del bismuto nel campo magnetico, il Leduc si serve anch'esso d'una sbarra di bismuto, mantenuta con un estremo a 100° e coll'altro alla temperatura ambiente; ma il suo metodo per misurare le temperature di vari punti della sbarra è diverso dal mio, poichè quello consiste nel misurare la corrente termoelettrica sviluppatasi al contatto dello stesso bismuto con fili di platino saldati in diversi punti della sbarra, allorquando due di questi fili sono posti in comunicazione con un galvanometro. Ottiene così il Leduc una misura relativa della differenza di temperatura fra i due punti della sbarra in cui i fili di platino sono saldati. Con tre fili equidistanti si hanno quindi le differenze di temperatura di tre punti equidistanti presi due a due, ed applicando la nota formola relativa alla propagazione del calore *in una sbarra di lunghezza infinita*, si può calcolarne il coefficiente di conducibilità. Ripetute le prove quando il campo magnetico agisce, si avrà del pari la conducibilità calorifica propria al bismuto esposto all'azione del magnetismo.

I risultati collimano se non quantitativamente, almeno qualitativamente, con quelli da me ottenuti.

Non era del resto ad aspettarsi un accordo completo. Infatti, come si vedrà nei capitoli seguenti, le condizioni delle mie esperienze sono differenti. Prima di tutto la sbarra da me adoperata era sempre racchiusa in un ambiente le cui pareti erano mantenute a temperatura costante, e per tal modo sottratta a varie cause evidenti di errore. Poi, il metodo da me impiegato per misurare le temperature di tre punti equidistanti della sbarra, è tale, che mentre fornisce i valori separati delle tre temperature, non fa intervenire il bismuto nel circuito termoelettrico. Consegue dalla prima di queste circostanze, che per calcolare il coefficiente di conducibilità calorifica, si può adoperare la formola a due esponenziali che vale nel caso d'una sbarra di lunghezza finita, d'onde un risultato più esatto. Anche la seconda circostanza poi, cioè il non essere il bismuto incluso nel circuito termoelettrico, è vantagiosissima. Infatti, colla disposizione adoperata dal sig. Leduc, i risultati devono essere in parte alterati in seguito alla variazione del potere termoelettrico del bismuto nel campo magnetico, dimostrata di recente dal dott. Grimaldi, come pure dal presentarsi del fenomeno termo-magnetico longitudinale scoperto da v. Ettingshausen. Infine il Leduc non pare abbia avuto riguardo al tempo assai lungo che si richiede, affinchè una volta creato il campo magnetico, la distribuzione delle temperature nella nuova condizione, divenga nuovamente stazionaria, d'onde un'altra probabile alterazione nei risultati.

Ad ogni modo è notevole sempre l'accordarsi in complesso dei risultati del sig. Leduc coi miei, in ricerche per le quali si hanno molte e gravi difficoltà da superare.

(1) Ho saputo ora (ottobre 1887) che il sig. Leduc nella seduta del 25 luglio ha fatto aprire un suo plico suggellato, in cui descrive esperienze destinate a verificare se esiste o no il fenomeno della variazione di conducibilità termica del bismuto. Già a quell'epoca il fenomeno era dunque per lui se non certo, almeno verosimile, per cui si può proprio dire che le nostre ricerche sperimentali sono state simultanee.

CAPO II.

Descrizione dell'apparecchio. Riscaldamento e campo magnetico.

La sbarretta di bismuto AB (fig. 2) è mantenuta con un suo estremo A alla temperatura di 100°. A questo scopo l'estremità A penetra, passando per il foro di un tappo C, entro una stufa cubica di rame DE, dove viene investita dal vapor d'acqua che sbocca nella stufa dal tubo F, e che proviene da una caldaia non rappresentata nella figura. Adattai anzi al tubo suddetto la caldaia dell'apparato di Regnault per la determinazione del calor specifico. Il vapore esce poi da un tubo E che lo porta in un gran vaso pieno d'acqua fredda, che lo condensa. Un termometro G permette di constatare la costanza di temperatura della stufa.

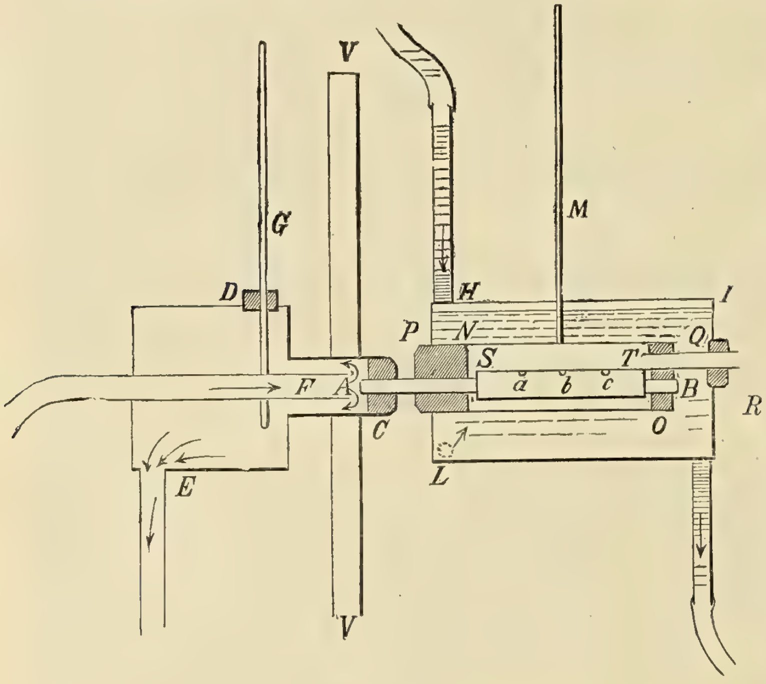


Fig. 2.

Il resto della sbarra di bismuto AB, penetra in una vaschetta di rame HIL, lunga, secondo HI, circa 11 centimetri, alta 5,5 e grossa quasi 3. Un tubo H, comunicante con un grande serbatoio d'acqua alla temperatura ambiente, e che si apre in L presso il fondo della vaschetta, vi immette continuamente dell'acqua, la quale poi l'abbandona per un tubo che parte da I. Un termometro M fa conoscere la temperatura dell'acqua nella vaschetta.

La sbarra AB non è però in contatto col liquido, poichè è circondata da un tubo cilindrico NO, generalmente di vetro a sottili pareti. Un medesimo tappo di sughero attraversato dalla sbarra, serve a fissarla nella tubulatura P della vaschetta, ed a reggere il tubo NO introducendovisi per l'estremità N. L'altra estremità O del tubo è chiusa con un altro tappo avente due fori. Per uno esce l'estremo B della sbarra; per l'altro passa un tubo Q, aperto alle due estremità, e che esce dalla vaschetta passando attraverso un tappo fissato in una tubulatura R. Di tal guisa, quando nella stufa circola il vapore, e nella vaschetta l'acqua fredda, l'estremità A della sbarra è mantenuta alla temperatura di 100°, mentre l'estremità B trovasi

alla temperatura della vaschetta. La sbarra inoltre trovasi in un ambiente mantenuto ad una nota temperatura costante.

Ho adoperato successivamente diverse sbarrette, di bismuto puro o commerciale, e di dimensioni diverse; ma più generalmente le ho preparate nel modo e colle dimensioni seguenti.

Quattro striscie rettangolari di ferro sono riunite con morsetti in modo da formare un tubo a sezione quadrata. Un prisma di ferro di egual sezione ne chiude una estremità. Dopo aver fortemente riscaldato questa specie di stampo, lo riempio con bismuto fuso, e lo abbandono ad un lento raffreddamento. Ottengo così un prisma di bismuto a sezione quadrata di circa 0,6 cent. di lato, lungo 11 cent. Colla lima riduco a sezione circolare e leggermente conico il tratto AS, di circa 3,5 cent. di lunghezza, ed il tratto TB di 1,5, lasciando prismatica la parte ST lunga 6 cent. Sulla faccia superiore poi pratico tre piccole cavità equidistanti *a*, *b*, *c*, profonde circa un millimetro e larghe poco più di mezzo, destinate a ricevere una o più coppie termoelettriche i cui fili escono pel tubo Q dall'apparecchio. Dopo molti tentativi adottai, come la più conveniente, una distanza di 2 cent. fra *a* e *b* e fra *b* e *c*.

È necessario, per la buona riuscita delle esperienze, che i tappi che chiudono il tubo NO, sieno a perfettissima tenuta. Perciò, oltre che essere fatti con gran cura, li ho sempre fissati a caldo dopo averli coperti di gomma lacca fusa.

Infine, una tavoletta forata VV difende la vaschetta dalla irradiazione della stufa. Lo spazio che resta fra la tavoletta e la vaschetta è riempito di bambagia, e la vaschetta stessa è avvolta con ovatta, onde non tocchi direttamente i poli dell'elettrocalamita, che si scaldano fortemente quando il filo di questa è a lungo percorso da un' intensa corrente.

L'apparecchio fin qui descritto mi ha servito per la maggior parte delle mie esperienze, senza subire variazioni degne di rimarco, all' infuori delle seguenti. Il tappo C che è a lungo esposto all'azione del vapor d'acqua, si altera al punto da doverlo rinnovare ogni giorno, e forse da non essere ogni giorno sino all'ultimo, a tenuta perfetta. Tentai di saldare a stagno il bismuto alla stufa; ma, come altravolta ebbi occasione di notare, formasi colla saldatura una lega assai fusibile, che qualche volta si rammollisce o fonde a 100°. Girai la difficoltà in questo modo. La parte AS della sbarra viene rivestita da un tubo d'ottone, ed è su questo che si salda un disco di rame forato, che, dopo montato l'apparecchio, si salda alla sua volta al contorno della tubulatura C. Il rivestimento d'ottone della porzione AS della sbarra, si ottiene facilmente mettendo il tubetto d'ottone entro lo stampo, prima di versarvi il metallo liquefatto.

Un'altra variazione introdotta è stata questa, che qualche volta al tubo di vetro NO ne ho sostituito uno d'ottone, di eguali dimensioni, la qual cosa però non ha prodotto nessuna differenza nei risultati.

L'elettrocalamita ordinaria di Ruhmkorff mi ha servito ad ottenere il campo magnetico intorno alla sbarra di bismuto. I suoi poli piani trovansi l'uno davanti l'altro di dietro dalla vaschetta, in corrispondenza al tratto ST della sbarra, e distano fra loro circa 3 cent., cioè appunto quanto basta perchè possa collocarsi fra essi la vaschetta e l'ovatta che la avvolge. Il bismuto trovasi così collocato nel campo magnetico in direzione equatoriale.

Per sottrarlo poi all'azione del campo, quando ciò è necessario, oltre che interrompere la corrente magnetizzante, spesso ho allontanati i rocchetti dalla vaschetta, temendo una qualche azione anche per opera del magnetismo rimanente.

Nelle prime esperienze la corrente magnetizzante era fornita da due macchine dinamoelettriche di Edelmann riunite in superficie, e messe in moto da un motore a gas di quattro cavalli. Potevo così ottenere nel filo dell'elettrocalamita una corrente di oltre 22 ampère, che produceva un campo magnetico intensissimo, e quindi effetti notevolissimi quanto alle modificazioni che si provocavano nel bismuto. Ma ho dovuto bentosto limitarmi a correnti di 9 ad 11 ampère, fornite da una sola macchina, e con resistenze introdotte appositamente nel circuito, specialmente dopo aver riconosciuto essere necessario che la corrente resti chiusa molto tempo. Forse farò nuove misure con nuovi rocchetti applicati all'apparato di Ruhmkorff, fatti con filo di sezione meglio proporzionata a quella del filo della dinamo, e così potrò avere senza un maggior riscaldamento dei rocchetti, un campo magnetico d'intensità maggiore.

Nel circuito dell'elettrocalamita, oltre del solito interruttore-inversore, trovansi un amperometro ed una bussola delle tangenti, quest'ultima messa in derivazione, e collocata in un locale molto lontano. Il primo strumento serve a fornire una misura assoluta approssimativa della corrente adoperata; la bussola serve a misurarla in unità arbitrarie ma con precisione, onde in esperienze di confronto essere in grado di dare più volte al campo magnetico una intensità determinata.

La necessità di dare a più riprese al campo magnetico una stessa intensità, si presenta in particolare, volendo confrontare la variazione di conducibilità calorifica alla variazione di resistenza elettrica, come si dirà più oltre.

CAPO III.

Disposizioni adottate per la misura delle temperature.

Per misurare le temperature nei tre punti *a*, *b*, *c* della sbarra di bismuto, ho dovuto ricorrere naturalmente a coppie termoelettriche introdotte nei detti fori. Ma anzichè misurare al galvanometro l'intensità della corrente generata, onde dedurne poi la temperatura della saldatura, ho preferito introdurre nel circuito una seconda coppia identica alla prima ma disposta in opposizione, e collocata in un bagno d'acqua di cui si fa variare lentamente la temperatura sino a ricondurre il galvanometro allo zero. Un termometro che sia nel bagno fa allora conoscere direttamente la temperatura del foro nel quale la prima coppia è introdotta.

Praticamente ho dovuto però rendere assai più complessa la disposizione delle esperienze, onde evitare diverse cause di errore, delle quali alcune non erano state scorte, per quanto io so, dagli sperimentatori che ebbero occasione di adoperare le coppie termoelettriche per la misura di temperature.

Non è facile costruire il circuito che comprende le due coppie ed il galvanometro, semplicemente con due pezzi soli di fili metallici. Se anche uno dei metalli delle coppie è rame, identico a quello che forma il rocchetto del galvanometro, si è costretti ad introdurre nel circuito nuovi contatti, fatti con saldature o con serrafili, onde congiungere le coppie all'istrumento. Nel circuito i contatti sono dunque in

numero maggiore di due. Succede allora che quando, per non essere ancora identiche le temperature delle saldature delle due coppie, il circuito è percorso da una corrente, si generano negli altri contatti, in seguito al fenomeno di Peltier, delle forze elettromotrici inverse. In causa di queste la misura che si vuol fare riesce falsata, giacchè al momento in cui le temperature delle due coppie sono identiche, restano le altre forze elettromotrici a produrre una corrente.

Ho ripetutamente constatata la presenza di questa corrente, immergendo le due coppie in un medesimo bagno, dopo che per qualche tempo furono esposte a temperature diverse.

Contrariamente a quanto potrebbe credere qualcuno, queste forze elettromotrici inverse sono sensibili e dannose, anche allorquando due fili identici, per esempio di rame, sono fra loro saldati a stagno. Ogni corrente proveniente da forze elettromotrici che esistano in altre parti del circuito, produce riscaldamento nella superficie di separazione dal rame allo stagno, e raffreddamento passando dallo stagno al rame, e quand' anche lo strato di saldatura sia sottile, non permette un istantaneo equilibrio delle temperature. Si sviluppa quindi una corrente inversa a quella che ha provocati i detti fenomeni termici. Lo stesso si dica se i due fili sono congiunti con un serrafilo. Anzi l'effetto è sensibile anche se i due fili da congiungere sono introdotti in un medesimo foro del serrafilo.

Vi è però un mezzo di effettuare la congiunzione fra due fili identici, col quale la detta corrente inversa non si produce in modo percettibile, ed ho ricorso a questo mezzo quando sono stato costretto a fare nel circuito una congiunzione fra due fili dello stesso metallo. Le estremità dei due fili, colla superficie ben netta, sono fissati nelle faccie interne di una specie di morsa di legno o di ebanite orizzontale, tenuta chiusa da un peso. I dui fili sono così premuti l'uno sull'altro, ed in croce, senza che tocchino verun pezzo metallico.

Se uno dei metalli delle coppie da me adoperate fosse stato il rame, avrei potuto adottare questo sistema per congiungere le coppie al galvanometro. Ma nessuno dei metalli che trovansi in commercio in forma di fili dà, accoppiato al rame, effetti termoelettrici abbastanza intensi, ad eccezione del ferro, che non volli adoperare, temendo l'azione che esercita il campo magnetico sulle proprietà termoelettriche di questo metallo. Ho dovuto dunque adottare altri metalli, ed ho scelto il packfong e lo zinco, dopo avere constatato che una coppia formata con questi metalli non subisce nessuna sensibile azione per opera del magnetismo. Non avendo quindi, nè sarebbe stato conveniente l'averlo, un galvanometro col filo di zinco o di packfong, le congiunzioni delle coppie al galvanometro dovevano dar luogo a nuovi contatti, nei quali dovevano originarsi in causa del fenomeno di Peltier delle forze elettromotrici inverse. Si aggiunga che ogni casuale variazione di temperatura in questi contatti, doveva pure generare delle correnti nel circuito, ed infatti mettendo le saldature delle due coppie, congiunte al galvanometro, in un medesimo bagno, quasi mai vidi il galvanometro restare allo zero.

Dopo una lunga serie di tentativi, che trovo inutile riferire, ho disposto il circuito termoelettrico nel modo seguente.

Due fili di zinco ABC, DEF (fig. 3), lunghi circa 80 cent., grossi 0,03 e

rivestiti di seta sino quasi alle estremità, sono saldati a tre fili di packfong MA, CGD, FN, di egual grossezza, e coperti pure di seta, in modo da formare quattro coppie termoelettriche identiche in A, C, D, F. I fili estremi si uniscono in M ed N alle estremità P, Q del filo del galvanometro. La coppia A sia quella che si introduce in uno dei forellini del bismuto; le altre tre C, D, F sono immerse nel bagno. Un commutatore mette a volontà in contatto col punto G del filo di packfong centrale, o il punto M o il punto N, e queste comunicazioni sono fatte nel modo indicato dianzi. Perciò il filo M oppure il filo N è premuto sul filo G senza toccare altri metalli. Se M tocca G le coppie A e C possono considerarsi escluse dal circuito. Se N tocca G sono escluse le due D ed F. Nella posizione di riposo del commutatore M tocca G, cioè trovansi attive nel circuito le coppie D ed F soltanto. Il circuito poi in ogni caso resta chiuso.

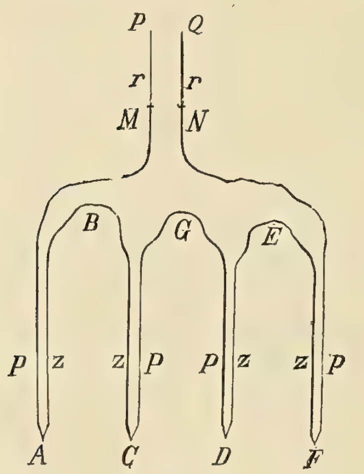


Fig. 3.

Con questa disposizione il galvanometro indica in generale una corrente, che non è dovuta ai contatti D ed F che sono alla stessa temperatura, ma a differenze di temperatura negli altri contatti del circuito, per esempio M ed N, o casuali, o provenienti dal fenomeno di Peltier provocato da correnti che percorsero poco prima il circuito. Non bisogna occuparsi di questa corrente, ed osservare solo la posizione di fermata del galvanometro, per mezzo del solito cannocchiale e scala.

Facendo agire il commutatore, e cioè introducendo nel circuito le coppie A e C, se la temperatura di A non è identica a quella del bagno nel quale stanno le tre coppie C, D, F, il galvanometro devia. Si lascia allora ricadere il commutatore nella prima posizione, e si modifica la temperatura del bagno.

È chiaro intanto, che essendosi messe di nuovo nel circuito le coppie D ed F, il galvanometro non potrà conservare la stessa deviazione che mostrava prima di muovere il commutatore. Infatti la corrente che percorre il circuito subì una variazione d' intensità quando si mosse il commutatore; variò perciò la temperatura dei contatti M ed N e di altri se per caso ne esistono fra M, N ed il galvanometro, donde una variazione nelle forze elettromotrici che ivi hanno sede. Ma di ciò non si deve tener conto, e solo si deve tener d'occhio la nuova posizione di fermata.

Si ripete il tentativo dopo aver variato nel senso dovuto la temperatura del bagno, e così si seguita finchè col movimento del commutatore non si vegga più il minimo spostamento nel galvanometro. In questo caso è certo che la temperatura di A è identica a quella di C, D ed F, poichè evidentemente le forze elettromotrici che risiedono in M ed N, e casualmente nelle altre parti del circuito, agiscono egualmente nelle due posizioni del commutatore. Basterà dunque leggere sulla scala del termometro che sta immerso nel bagno, per avere la temperatura di A.

Questa serie di tentativi si eseguisce, dopo presa un poco di pratica, in un tempo

molto minore di quello che si impiega a descriverla. La precisione che si raggiunge è assai grande, giacchè rifacendo più volte una stessa misura non ho avuto differenze che di qualche centesimo di grado, ed il più delle volte di meno di un centesimo.

Naturalmente mentre il commutatore deve trovarsi vicino assai all'apparecchio della fig. 2, onde non dover impiegare fili di zinco e di packfong di soverchia lunghezza, e quindi troppo resistenti, è necessario però che lo possa muovere chi siede al galvanometro, e quindi si trova a grande distanza dall'elettrocalamita. Un congegno di un filo e di una carrucola serve a questo scopo. Stimo inutile descrivere questo congegno, come pure lo stesso commutatore, essendo facile l' immaginarli entrambi.

È invece utile l' indicare le disposizioni prese per rendere facile e sicuro l'ottenere l'uniformità di temperatura delle saldature C, D, F, ed il variare a piacere la temperatura stessa.

Il bagno è stato formato in questo modo. Un grande vaso di vetro V_1 (fig. 4) contenente acqua, è introdotto entro un secondo più grande V_2. Lo spazio interposto è riempito con segatura di legno onde difendere l'acqua da un troppo rapido raffreddamento. Il vaso V_1 è chiuso da un grande coperchio di sughero che ha molti fori, destinati a lasciar passare:

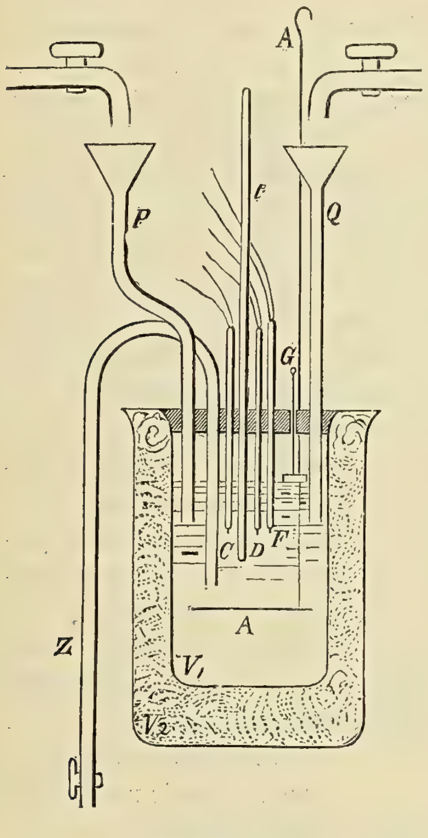


Fig. 4.

1° le tre coppie C, D, F, contenute in cannelli di vetro e fissatevi nel modo che dirò fra poco.

2° il termometro *t*, vicinissimo e quasi riunito in fascio colle tre coppie.

3° l'agitatore AA continuamente tenuto in rapido movimento d'alto in basso.

4° il galleggiante G che fa conoscere all'esterno il livello dell'acqua.

5° il tubo P terminato in alto da un piccolo imbuto, destinato ad introdurre nel bagno dell'acqua calda, che si fa uscire da un sovrapposto rubinetto annesso ad un recipiente dove dell'acqua è mantenuta in ebollizione.

6° il Tubo Q analogo al precedente, e nel quale si può lasciar cadere acqua alla temperatura ordinaria.

7° il sifone Z col quale si toglie di tanto in tanto dal bagno l'acqua eccedente.

L'osservatore addetto al bagno aggiunge, spesso a semplici goccioline, acqua calda o fredda, secondo gli ordini che riceve dall'osservatore che sta al galvanometro.

Non appena quest'ultimo giudica di aver raggiunto il momento opportuno, un terzo osservatore legge a distanza e con cannocchiali la temperatura segnata dal termometro *t*, e subito dopo quella indicata dal termometro immerso nella vaschetta IL

della fig. 2. La prima temperatura sarà quella di quello dei tre fori del bismuto nel quale è introdotta la coppia A della fig. 3; la seconda sarà la temperatura dell'ambiente in cui si trova il bismuto.

Le quattro coppie A, C, D, F sono contenute in cannelli di vetro, dei quali i tre delle coppie C, D, F sono diritti, mentre quello della A è piegato ad angolo retto presso l'estremità ove trovasi la saldatura della coppia. Introdotte le tre coppie C, D, F nei rispettivi tubi, vi si fissano con gomma lacca fusa, la quale deve non solo chiudere il cannello, ma rivestire affatto la saldatura. Quando poi la gomma lacca è solidificata, si passa su di essa una lima sino a scoprire appena la saldatura. La coppia A è montata in modo simile, se non che la gomma lacca viene levata sino a scoprire l'intera parte saldata dei due fili BA, MA (fig. 3), e questa poi si lima in giro a poco a poco in modo da dargli la forma di un piccolissimo tappo leggermente conico. Introdotto il cannello della coppia A pel tubo Q (fig. 2), si fa penetrare la saldatura in uno dei tre fori del bismuto; la saldatura della coppia entra per intero nel foro e lo chiude esattamente.

Solo a questo patto la coppia introdotta nel bismuto, ne assume esattamente la temperatura. Ho constatato nel modo più sicuro, che applicando semplicemente la coppia sul bismuto, essa non assume in ogni sua parte la temperatura del metallo, e perciò operando in tal modo si ottengono letture che peccano per difetto. Basta poi che il foro in cui la coppia è introdotta sia un poco troppo largo, per avere pure risultati inesatti. Infatti nel corso delle mie esperienze mi sono accorto, che mentre le prime misure fatte ripetutamente con una data sbarra di bismuto dànno risultati concordanti, le ultime invece dànno per le temperature valori un poco minori ed incerti. Ho riconosciuto che la causa di questo inconveniente consiste nel logorarsi ed allargarsi dei fori praticati nel bismuto, di modo che la coppia che vi si introduce finisce col non toccare più abbastanza bene il metallo per assumerne la temperatura.

Per ovviare a questo inconveniente nelle ultime misure da me fatte, ho fissato stabilmente con saldatura tre identiche coppie nei punti *a*, *b*, *c* del bismuto. La figura schematica 3 resta allora cambiata nella 5. Invece della coppia A, si hanno le tre coppie A_1, A_2, A_3 identiche fra loro ed alle tre C, D, F. Esse sono successivamente riunite a queste ultime. Per esempio, quando si vuol determinare la temperatura del punto *c*, il filo di packfong P_3 della coppia A_3, viene unito al filo di packfong AM, ed il filo di zinco z_3 al filo di zinco BC. Queste unioni si fanno sovrapponendo in croce i fili entro un morsetto non metallico, tenuto chiuso da un peso, come ho detto più sopra.

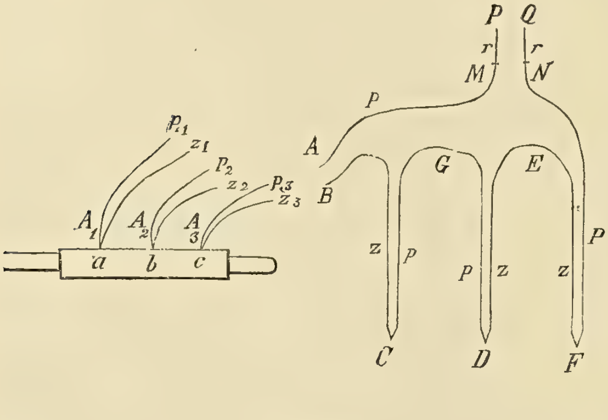


Fig. 5.

Colle tre coppie stabili, cioè saldate al bismuto e successivamente messe nel circuito delle coppie C, D, F, ho ottenuto risultati d'una regolarità superiore alle mie speranze, e saranno questi i risultati che più specialmente riporterò.

Il galvanometro posto nel circuito delle coppie è del modello Wiedemann, e lo si è reso estremamente sensibile con una calamita in posizione appropriata. Esso trovasi nello stesso laboratorio ove sono collocati il bagno e l'elettrocalamita, ma quest'ultima è stata orientata in guisa da non agire quasi affatto sul galvanometro.

Infine, i termometri adoperati nelle misure, cioè quello posto nel bagno e quello della vaschetta in cui sta il bismuto, sono stati confrontati accuratamente a varie temperature con un buonissimo termometro, che in addietro fu campionato col termometro ad aria. Ho potuto così avere le temperature espresse esattamente in gradi del termometro ad aria. I detti due termometri, benchè aventi il bulbo assai piccolo, sono divisi in decimi di grado. Leggendone le indicazioni con un cannocchiale da catetometro possono con facilità ed esattezza apprezzarsi i decimi di divisione, e cioè i centesimi di grado.

CAPO IV.

Andamento delle esperienze e calcoli relativi.

Descritti così gli apparecchi ecco in qual modo le esperienze sono state condottte.

Messa in ebollizione fin dal mattino la caldaia destinata a fornire vapore alla stufa, colla cura di regolare il calore in modo che il vapore esca lentamente ed uniformemente da essa, ed attivata subito dopo la circolazione d'acqua fredda nella vaschetta, non si procede che dopo almeno due ore alle misure, onde avere la certezza che lo stato permanente nella sbarra di bismuto è raggiunto. Un osservatore si siede allora al cannocchiale del galvanometro, un altro muove continuamente l'agitatore A del bagno (fig. 4), ed un terzo sta pronto agli ordini del primo, aggiungendo nel bagno acqua calda o fredda. Quando il primo osservatore vede, che muovendo il commutatore descritto nel capitolo precedente, cioè escludendo dal circuito le saldature D, F (fig. 3) per introdurre in loro vece le A e C, la deviazione galvanometrica resta inalterata, e cioè *non varia neppure di un decimo di particella*, dà l'ordine di leggere i due termometri. La differenza delle due letture, debitamente corrette, dà l'eccesso, sulla temperatura dell'ambiente, della temperatura di quello dei tre fori praticati nel bismuto, entro cui trovasi la coppia comunicante colle tre poste nel bagno. In meno di un' ora si possono fare nove di simili misure, e cioè determinare i tre eccessi di temperatura t_1, t_2, t_3 nei punti equidistanti a, b, c, del bismuto, ciascuno come media di tre misure.

Fatta questa prima serie di determinazioni, si mette in moto la macchina dinamoelettrica, e si mantiene costante la corrente nell'elettrocalamita per due ore almeno prima di riprendere le misure. Ho ripetutamente constatato che dopo mezz'ora soltanto di passaggio della corrente magnetizzante, le temperature della sbarra sono anche in via di modificarsi.

Durante questo lungo intervallo di tempo, l'elettrocalamita si riscalda assai, e benchè la vaschetta di rame sia continuamente attraversata dall'acqua, e sia separata

con ovatta dal ferro della elettrocalamita, pur tuttavia la temperatura di quest'acqua aumenta qualche poco. Ciò non produceva però alcun inconveniente.

Trascorse le due ore, si fanno, durante il passaggio della corrente, delle misure analoghe a quelle fatte prima, e così si ottengono i nuovi eccessi di temperatura nei punti a, b, c. Interrotta poi la corrente, si aspetta ancora per due ore prima di ripetere le misure a circuito aperto.

Le tre serie di misure richiedono dunque un'intera giornata, al termine della quale si preparano a nuovo gli apparecchi pel mattino successivo.

I coefficienti di conducibilità sono stati calcolati colla nota formola

$$t = \mathrm{A}e^{ax} + \mathrm{B}e^{-ax},$$

nella quale t indica l'eccesso, sulla temperatura dell'ambiente, della temperatura del punto di una sbarra, che dista x dalla estremità riscaldata, A e B sono delle costanti, ed a è l'espressione:

$$a = \frac{\sqrt{hp}}{\sqrt{ks}}.$$

In questa espressione p è il perimetro della sezione della sbarra, s l'area di questa sezione, h *il coefficiente di conducibilità esterna* della sbarra, k il *coefficiente di conducibilità* cercato.

È notissimo il metodo con cui si determina k senz'avere bisogno di conoscere le costanti A e B, quando si misurino gli eccessi di temperatura t_1, t_2, t_3 di tre punti equidistanti, per esempio, che distano dall'estremo riscaldato della sbarra, di x, $x+d$, $x+2d$. Infatti si ha facilmente:

$$\frac{t_1+t_3}{t_2} = e^{ad} + e^{-ad}.$$

Se chiamiamo n l'espressione

$$\frac{t_1+t_3}{2t_2},$$

si ha

$$e^{ad} = n + \sqrt{n^2-1},$$

e quindi:

$$k = \frac{hp}{s}\frac{d^2}{\left[\log\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)\right]^2}.$$

Analogamente, dicendo k' il coefficiente di conducibilità dopo che la sbarra è nel campo magnetico, ed n' il nuovo valore di n, e cioè la somma degli eccessi di temperatura in a e c (fig. 2), divisa pel doppio dell'eccesso di temperatura in b, sempre durante l'azione del magnetismo sul bismuto, si ha

$$k' = \frac{hp}{s}\frac{d^2}{\left[\log\left(n'+\sqrt{n'^2-1}\right)\right]^2}.$$

Per conseguenza:

$$\frac{k'}{k} = \left\{\frac{\log\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)}{\log\left(n'+\sqrt{n'^2-1}\right)}\right\}^2.$$

Il rapporto fra la conducibilità termica del bismuto nel campo magnetico, e quella del bismuto nelle condizioni ordinarie, si calcola dunque con una formola la quale contiene solo n ed n', cioè la espressione $\frac{t_1+t_3}{2\,t_2}$ formata coi tre eccessi di

temperatara t_1, t_2, t_3, misurati senza corrente magnetizzante, e l'espressione analoga formata cogli eccessi di temperatura misurati sotto l'azione del campo magnetico.

Ecco i risultati che ho ottenuti con un gran numero di misure, fatte tutte per un solo valore del campo magnetico.

CAPO V.

Risultati delle esperienze.

Riporto prima, come esempio, le letture fatte in due delle ultime giornate di lavoro, allorquando gli sperimentatori, ed io fra questi, avevano acquistata una grande pratica, che fruttava la maggior certezza nei risultati.

Misure del 20 giugno 1887. — Sbarra di bismuto quasi puro.

Bismuto fuori del campo magnetico.			Bismuto in un campo mag. di circa 2328 unità.		
t_3	t_2	t_1	t_3	t_2	t_1
3°,35	7°,36	15°,77			
3, 32	7 37	15, 76			
3, 36	7, 41	15, 71			
			3°,23	7°,18	15°,43
			3, 25	7, 15	14, 46
			3, 25	7, 16	15, 38
3, 34	7, 36	15, 75			
3, 35	7, 40	15, 80			
3, 32	7, 38	15, 77			
	Medie			Medie	
3, 34	7, 38	15, 76	3, 24	7, 16	15, 42

$n = 1{,}294 \qquad n' = 1{,}303$

$$\frac{k'}{k} = 0{,}972 .$$

Misure del 28 giugno.

Bismuto non esposto all'azione del campo mag.			Bismuto nel campo mag. di circa 2328 unità.		
t_3	t_2	t_1	t_3	t_2	t_1
9°,74	20°,20	42°,58	9°,37	19°,51	41°,49
9, 74	20, 23	42, 63	9, 38	19, 55	41, 43
9, 71	20, 23	42, 60	9, 36	19, 53	41, 43
	Medie			Medie	
9, 73	20, 22	42, 60	9, 37	19, 53	41, 45

$n = 1{,}294 \qquad n = 1{,}301$

$$\frac{k'}{k} = 0{,}978 .$$

La sbarra adoperata il 28 giugno è delle stesse dimensioni di quella del 20 giugno, ma è rivestita dalla parte della stufa con un tubo d'ottone. Per la maggior conducibilità di questo metallo, in confronto al bismuto, le temperature misurate sono tutte assai più elevate.

I valori di $\frac{k'}{k}$ sono calcolati colla formola data più sopra.

Altre serie di misure fatte nel mese di giugno hanno dato per $\frac{k'}{k}$ valori poco diversi. In tutte si è mantenuto sensibilmente di egual valore il campo magnetico, ma ora la corrente magnetizzante ha avuto una direzione ora la direzione contraria. La direzione del campo pare influisca leggermente sul risultato, in causa forse del fenomeno della rotazione delle isoterme, di cui nel cap. VII, e ciò per essere stati scelti sempre i tre punti a, b, c, sulla faccia superiore della sbarra di bismuto. I valori ottenuti colle sbarre di bismuto puro o quasi puro, sono i seguenti:

$$\frac{k'}{k} = 0{,}972\,;\quad 0{,}978\,;\quad 0{,}980\,;\quad 0{,}981\,;\quad 0{,}980\,;$$

la cui media è

$$\frac{k'}{k} = 0{,}978\,.$$

Il valore dato nella mia comunicazione preventiva, che già indicai come solo approssimativo, fu ottenuto con un campo magnetico più intenso, ma senza tutte le cure che la pratica ha suggerito dopo. Non avendo potuto mettere in opera nuovamente, colla dovuta durata di azione del magnetismo, un campo tanto intenso, non sono in grado di dare il valore esatto del rapporto $\frac{k'}{k}$ da sostituirsi a quello approssimativo della nota suddetta.

CAPO VI.

Misura del campo magnetico, e della variazione di resistenza elettrica.

Non era facile combinare l'apparecchio in modo da potere alternativamente misurare le due conducibilità termiche del bismuto, e l'intensità assoluta del campo magnetico adoperato. Perciò la misura del campo magnetico si è fatta dopo, ricorrendo, per ragioni di comodità, alla misura della rotazione delle vibrazioni luminose che produce il solfuro di carbonio puro.

Siccome poi la rotazione varia colla temperatura del liquido, così bisogna ridurla a quella che si sarebbe ottenuta col liquido a zero. Perciò mi sono valso della formola empirica

$$\alpha_t = \alpha_0\,(1 - 0{,}00104\,t - 0{,}000014\,t^2)$$

data dal Bichat (1) e trovata esatta anche da H. Becquerel (2), nella quale α_0 è la rotazione a 0° ed α_t quella alla temperatura t.

(1) Journal de Physique 1879, pag. 204.
(2) Journal de Physique 1885, pag. 444.

Secondo poi le misure accurate del sig. H. Becquerel, la rotazione prodotta da un centimetro di solfuro di carbonio puro a 0° sulle vibrazioni gialle del sodio, in un campo magnetico d'intensità uno C. G. S. è, in minuti di grado, eguale a

0,04341.

Per calcolare l'intensità del campo magnetico da me adoperato bastava dunque che misurassi la rotazione prodotta da uno strato di solfuro di carbonio puro, di noto spessore e di nota temperatura, servendomi come sorgente luminosa della luce del sodio.

Il liquido è stato posto in una vaschetta formata da un anello piano di vetro al quale sono applicate a perfetta tenuta due lastre a faccie parallele. La grossezza dell'anello, che costituisce poi la grossezza dello strato liquido, accuratamente misurata allo sferometro, si è trovata essere $1^c,0427$. La temperatura del liquido è stata di $23°,18$ durante le misure.

La misura della rotazione si è fatta con un polarimetro a penombra, e si è trovato come media di molte letture una doppia rotazione di $3°,25'$, ossia in minuti, di $205'$. Questo numero si è ottenuto come differenza fra la doppia rotazione misurata a vaschetta piena, e quella ottenuta a vaschetta vuota per effetto delle lastre di vetro.

La rotazione semplice dovuta al solfuro di carbonio è dunque di $102',5$, cioè di $98',3$ per centimetro. Per la rotazione a 0°, applicando la formola di Bichat, si trova $101',5$. Perciò l'intensità cercata del campo magnetico risulta essere $101,51:0,04341$, ossia:

2338,4 (C. G. S).

Questo è dunque il valore del campo col quale la conducibilità termica del bismuto diminuisce nel rapporto 0,978, cioè di circa il 2 per cento.

Viene ora naturale il desiderio di confrontare questa variazione di conducibilità termica, alla variazione di resistenza elettrica.

Nelle misure che feci altra volta della resistenza del bismuto nel campo magnetico [1], determinai la quantità $\delta = \frac{r' - r}{r}$ (r resistenza ordinaria del bismuto, r' nel campo), per vari valori del campo magnetico, espresso però quest'ultimo non in valore assoluto, ma solo in rapporto alla componente orizzontale del magnetismo terrestre. Il quarto dei valori di δ nella tabella XXXI della citata Memoria è 0,021493, cioè $\frac{r' - r}{r} = 0,021493$, da cui $\frac{r}{r'} = 0,979$, od anche $\frac{k'_e}{k_e} = 0,979$, dicendo k e k'_e le due conducibilità elettriche del bismuto. Questo numero è quasi identico al rapporto da me trovato per le due conducibilità termiche. Ora il suddetto valore di $\frac{k'_e}{k_e}$ corrisponde ad un campo magnetico la cui intensità, divisa per quella della componente orizzontale terrestre, dà 9824. Non so qual fosse a Palermo l'intensità magnetica orizzontale all'epoca di quelle mie esperienze, ma se si prende il valore 0,2376 trovato il 24 novembre 1881 a Palermo dal dott. Chistoni, si trova come valore assoluto del detto campo magnetico il numero 2334,2, che è effettivamente poco diverso da quello del campo magnetico adoperato nelle mie esperienze sulla conducibilità termica.

[1] Mem. della R. Acc. dei Lincei, v. XIX, 1884.

Risulterebbe da questo confronto, che la conducibilità termica del bismuto, varia in causa dell'azione magnetica nello stesso rapporto in cui varia la conducibilità elettrica.

Questa conseguenza non ha però sufficiente fondamento in una sola coincidenza numerica che potrebbe essere, e forse è in parte, fortuita. Perciò ho voluto misurare direttamente la variazione di conducibilità elettrica di una delle sbarrette di bismuto già adoperate nelle esperienze relative alla conducibilità calorifica.

A questo scopo la sbarra è stata tagliata in modo da serbarne solo la parte media coi suoi tre fori a, b, c (fig. 6), e saldata per le sue faccie estreme ben piane, a due grossi pezzi di rame M, N, in ciascuno dei quali trovasi un foro ed una vite, a foggia di serrafilo. Torna facile in tal modo l'inserire il bismuto nel circuito del ponte galvanico.

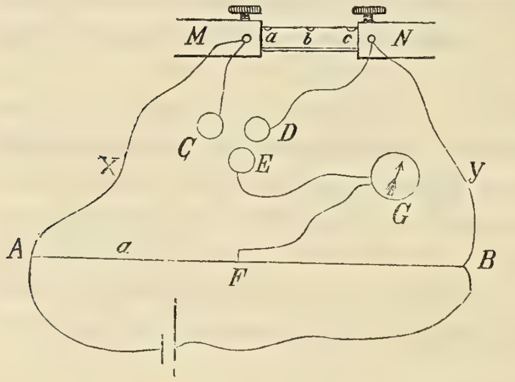


Fig. 6.

Da M partono due fili MC, MA, il primo dei quali mette ad un pozzetto a mercurio C, ed il secondo ad un capo del filo teso AB, ben calibrato e di nota lunghezza. Da N partono gli analoghi fili ND, NB. Il galvanometro G, estremamente sensibile, comunica da una parte col corsoio F, dall'altra col pozzetto E, che si può far comunicare a volontà con C o con D.

Mettendo a zero il galvanometro, collo spostamento del corsoio, mentre E comunica con C, e poi di nuovo mentre E comunica con D, tanto quando il bismuto è nel campo magnetico, come quando ne è allontanato, si ha modo di calcolare il rapporto delle resistenze r, r' del bismuto, senza conoscere le resistenze x, y dei fili MA, NB.

Infatti se a è la lunghezza AF quando G è a zero ed E comunica con D, e se l è la lunghezza totale AB del reocordo, si ha

$$\frac{x+r}{a}=\frac{y}{l-a},$$

e quando E comunica con C, dicendo b la nuova lettura:

$$\frac{x}{b}=\frac{y+r}{l-b}.$$

Se ne ricava:

$$r=y\,\frac{a-b}{l-a}.$$

Analogamente dicendo a', b' le due analoghe letture fatte mentre E comunica prima con D poi con C, e mentre il bismuto è nel campo magnetico, si ha

$$r'=y\,\frac{a'-b'}{l-a'}.$$

Perciò $$\frac{r}{r'} = \frac{(a-b)(l-a')}{(a'-b')(l-a)}.$$

Quattro misure bastano dunque per determinare $\frac{r}{r'}$.

Le misure sono state eseguite mantenendo al campo magnetico il solito valore costante, e ripetute molte volte. Ogni volta che il circuito dell'elettrocalamita è stato aperto, si è sollevato il bismuto in modo che più non si trovasse fra i poli, per timore di una azione da parte del magnetismo rimanente. La media finale è stata:

$$\frac{r}{r'} = \frac{k'_e}{k_e} = 0{,}98\,,$$

numero quasi identico a quello che esprime il rapporto $\frac{k'}{k}$ delle due conducibilità termiche.

È dunque certo che, almeno per un campo magnetico dell' intensità da me adoperata, la conducibilità termica del bismuto viene diminuita nello stesso rapporto in cui viene diminuita la conducibilità elettrica. È da aspettarsi che l' identità delle due variazioni relative si mantenga per ogni altro valore del campo; non ho però verificato questa induzione, giacchè per ragioni dette altrove non mi è stato possibile fare le misure con intensità maggiori del campo magnetico.

Chi si accingesse a fare esperienze per istituire questo confronto fra i due ordini di fenomeni, non dovrebbe dimenticare però, che mentre nelle misure elettriche il bismuto ha una temperatura uniforme, così non è in quelle calorifiche, e che la diversa temperatura, mentre influisce sulla conducibilità termica e sull'elettrica (e forse in modo differente), influisce pure sulla variazione di resistenza elettrica (e forse in modo probabilmente diverso sulla variazione di conducibilità termica) che il magnetismo provoca nel bismuto.

CAPO VII.

Rotazione delle isoterme per effetto del magnetismo.

Appena constatata la variazione di conducibilità calorifica del bismuto prodotta dal magnetismo, ho fatto qualche esperienza per riconoscere se il magnetismo determina pure una rotazione delle linee isoterme, analoga alla rotazione delle linee equipotenziali, alla quale è dovuto il fenomeno di Hall.

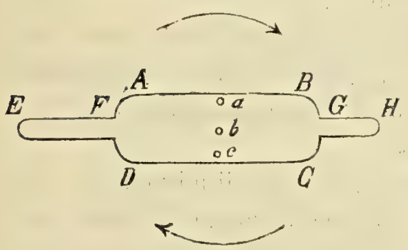


Fig. 7.

A questo effetto ho preparato per fusione una piastra rettangolare di bismuto puro ABCD (fig. 7), larga circa 2^c, lunga 4^c e grossa $0^c,3$, raccordata a due porzioni cilindriche EF, GH destinate a passare in appositi fori dei tappi del tubo NO (fig. 2). Tre piccole cavità *a*, *b*, *c*, sono praticate in una delle faccie maggiori della lamina, secondo una retta perpendicolare ai lati maggiori, destinate a ricevere le solite tre coppie termoelettriche, le quali successivamente riunite alle tre C, C, F (fig. 5) servono a misurare le temperature in *a*, *b*, *c*. I punti *a*, *c*, come mostra la fig. 7, sono prossimi ai lembi della lamina, mentre *b* è nel mezzo.

Mantenuto per due ore almeno l'estremo E a 100° e l'estremo H alla temperatura dell'acqua che circola nella vaschetta HIL (fig. 2), e mantenuta durante lo stesso intervallo di tempo una corrente della solita intensità nel filo dell'elettrocalamita, ho misurato col metodo già descritto le temperature della lamina nei punti *a*, *b*, *c*, insieme alla temperatura quasi invariabile dell'acqua circolante nella vaschetta, e ne ho dedotto gli eccessi t_1, t_2, t_3 delle temperature in *a*, *b*, *c*, su quelle dell'ambiente. Una seconda serie di misure analoghe è stata fatta due ore dopo avere interrotta la corrente, ed una terza quando già da due ore una corrente della solita intensità, ma di direzione contraria a quella di prima, percorre il filo della elettrocalamita. I risultati ottenuti il primo giorno in cui ho fatto tali misure sono registrati nel quadro seguente:

Corrente magnetizzante nella direzione delle freccie della fig. 7.			Senza corrente			Corrente magnetizzante in direzione opposta a quella delle freccie (f. 7)		
t_1	t_2	t_3	t_1	t_2	t_3	t_1	t_2	t_3
8°,97	9°,58	9°,09	9°,09	9°,62	9°,06	8°,99	9°,52	8°,90
8, 98	9, 57	9, 04	9, 10	9, 63	9, 08	8, 98	9, 56	8, 90
8, 96	9, 57	9, 06	9, 08	9, 60	9, 06	8, 97	9, 54	8, 90
8, 97	9, 58					9		
	Medie			Medie			Medie	
8, 97	9,575	9,063	9, 09	9,617	9,067	8,985	9, 54	8, 90

Nei tre casi la temperatura in *b* è notevolmente maggiore di quelle in *a* e c, il che è naturale stante la posizione che occupano questi due punti, maggiormente esposta al raffreddamento. Di più, sotto l'azione del magnetismo le tre temperature sono diminuite. Anche ciò era da prevedersi come conseguenza della diminuzione di conducibilità termica già dimostrata.

Ma le temperature t_1, t_3 in *a* e *c* non sono scemate egualmente quando la corrente ha avuto l'una o l'altra direzione. Infatti, colla corrente destrogira la temperatura t_1 in *a* è stata trovata minore di quella in *c*, mentre colla direzione opposta della corrente magnetizzante si è avuto t_1 maggiore di t_3.

Queste differenze nelle temperature dei punti *a* e *c*, secondo la direzione del campo magnetico, costituiscono un fenomeno analogo a quello di Hall, e sembranmi dimostrare che le linee isoterme sono girate, per azione del campo magnetico, in direzione contraria a quella della corrente magnetizzante.

Le variazioni di temperetura ottenute in questa prima serie di misure, non sono state, come si vede, molto grandi, non essendo del resto molto intenso il campo magnetico (circa 2340 C. G. S.). Ma per il grado di precisione con cui le temperature sono state determinate, il risultato ha non minor valore. D'altronde l'esperienza è stata ripetuta per altri giorni, anche con una nuova lamina, ed il risultato è stato sempre lo stesso.

Non ho creduto necessario di fare misure assolute trattandosi, almeno per ora, soltanto di mettere in evidenza un nuovo fenomeno.

Conclusioni.

1. La conducibilità termica del bismuto è diminuita quando viene posto in un campo magnetico, trasversalmente alle linee di forza. Esiste dunque nel bismuto quel fenomeno che il Maggi credè di scoprire nel ferro, e che poi fu successivamente ammesso e negato da vari sperimentatori.

2. La variazione relativa di conducibilità termica è, a parità d' intensità del campo magnetico, eguale alla variazione di conducibilità elettrica. Almeno questo avviene col campo magnetico dell' intensità di 2338 unità C. G. S., pel quale il rapporto fra il nuovo ed il primitivo coefficiente di conducibilità, è eguale a 0,978.

3. Le isoterme in una lamina di bismuto percorsa longitudinalmente da un flusso permanente di calore, vengono girate, allorquando si crea un campo magnetico diretto perpendicolarmente alla lamina, in direzione contraria a quella della corrente che genera il campo. Questo fenomeno, analogo a quello di Hall, ribadisce l'opinione, già da me con altri argomenti sostenuta (1), che il fenomeno di Hall sia dovuto a modificazioni di struttura prodotte dal magnetismo, anzichè ad una azione elettromagnetica di nuovo genere.

NOTA

Compiuta la redazione di questa Memoria, ho ricevuto una Nota del prof. v. Ettingshausen (letta all'Acc. di Vienna il 13 ottobre 1887) nella quale dice di avere ripetute le esperienze descritte da me (nella Nota preventiva citata nella prima pagina) e dal Leduc, e di avere verificato il fenomeno che prima non aveva potuto riscontrare, e cioè la diminuzione di conducibilità termica del bismuto nel campo magnetico, come pure la rotazione delle linee isotermiche in senso contrario della corrente magnetizzante.

Quanto al primo di questi fenomeni, egli trova però una diminuzione relativa di conducibilità termica, minore della diminuzione di conducibilità elettrica. Infatti ottiene una diminuzione di circa 3 per cento nella conducibilità termica, con un campo magnetico di circa 9600 unità. Ma le misure furono sempre fatte dopo un minuto e mezzo soltanto dall'apertura o dalla chiusura della corrente magnetizzante, e potrebbe darsi che per questa ragione il risultato sia inferiore al vero. Il sig. v. Ettingshausen fa poi diverse critiche al metodo adoperato dal Leduc, che in parte corrispondono alle osservazioni fatte da me nel cap. I di questa Memoria, nessuna delle quali si può applicare al metodo da me seguito e più sopra descritto.

Quanto alla rotazione delle isoterme, dopo avere confermata l'esistenza di questo fenomeno, insiste, come ho fatto nel cap. I di questa Memoria, sulla circostanza che il detto fenomeno non può spiegare il fenomeno termomagnetico trasversale, tendendo anzi a produrre una corrente precisamente di direzione opposta.

(1) N. Cimento 1884, t. XV, pag. 130 e seg.

RELAZIONE

letta dal Socio A. Cossa, relatore, a nome anche del Socio G. Struever nella seduta del 13 novembre 1887, sulla Memoria del dott. Alfonso Sella, intitolata: *Ricerche sulla Sellaite e sui minerali che l'accompagnano.*

« Il giovane dott. Alfonso Sella presentò all'Accademia uno Studio completo del minerale scoperto or sono molti anni da uno di noi.

« L'autore accenna al giacimento di questo minerale da lui ritrovato in seguito a molte e pazienti indagini. Poscia descrive le ricerche da lui eseguite sulle proprietà fisiche e chimiche, ed accenna i risultati delle determinazioni goniometriche delle svariate forme da lui osservate nella Sellaite. Come appendice l'autore espone le osservazioni fatte sulla roccia che racchiude la Sellaite e sui minerali che l'accompagnano, fermandosi specialmente sulla dolomite che gli fornì argomento ad interessanti misure cristallografiche. Finalmente l'autore descrive le ricerche fatte per ottenere cristallizzato il fluoruro di magnesio amorfo.

« Il lavoro del Sella è importante per fatti nuovi, accuratamente constatati e coscienziosamente descritti.

« Il giovane autore ha perfettamente compreso e seguito il nuovo indirizzo sperimentale degli studî mineralogici, nei quali ha felicemente esordito con uno studio che richiama a lui la memoria dell'illustre suo padre ed a noi quella del valente mineralista e benemerito Presidente della nostra Accademia.

« La Commissione conclude col proporre che la Memoria di Alfonso Sella sia stampata per esteso negli Atti dell'Accademia ».

Sulla Sellaite e sui minerali che l'accompagnano.

Memoria del dott. ALFONSO SELLA.

(Con una tavola)

In una mia Nota preliminare presentata dal prof. Alfonso Cossa all'Accademia dei Lincei nella seduta del 12 giugno 1887, fatte poche parole sulla storia della Sellaite, io annunziava di averla trovata in posto e mi riservava di seguitare i miei studî sull'interessante minerale. Recatomi nuovamente nell'estate scorsa in Savoia mi procurai altro materiale, in grazie al quale posso ora presentare il risultato delle mie ricerche.

Esporrò prima lo studio delle proprietà della Sellaite; poi aggiungerò alcuni dati sui minerali, che l'accompagnano; tra cui segnalo come degna di nota la Dolomite, e terminerò con poche parole sulla natura della roccia, sul modo di formazione probabile della Sellaite e su alcuni tentativi per fare cristallizzare il fluoruro di magnesio amorfo.

Sulla Sellaite.

Località. — Il ghiacciaio di Gebroulaz fa parte di un assembramento abbastanza vasto di ghiacciai posti parte in Moriana e parte in Tarantasia al nord di Modane. Il sopradetto ghiacchiaio finisce nel Vallon du Saut, che diventa poi il Vallon des Allues e versa le sue acque nel Doron, il quale alla sua volta si getta nell'Isère presso Moutiers.

L'anidrite comincia ad affiorare molto prima del ghiacciaio e propriamente sopra al Châlet du Saut e poi qua e là, sinchè al principio delle morene forma un cacume piuttosto elevato. Questo è l'unico punto, in cui ho trovato la Sellaite, benchè abbia percorso tutto il giacimento per molti e molti giorni. L'anidrite comincia poi di nuovo al piede del ghiacciaio e forma una cresta non interrotta, che lo fiancheggia sino all'altezza di 2925 m. (1).

Analisi chimica —. Il materiale per l'analisi chimica fu scelto con grandissima cura. Servendomi della proprietà della Sellaite di presentare facili e pronunziate le sfaldature lungo le forme (100) e (110), scelsi solo quei cristallini naturali o di sfaldatura, i quali presentassero al goniometro di riflessione ben netta una zona di faccie

(1) La cresta non finisce quindi nella Moriana, come asseriva lo Strüver, ma all'altezza sopradetta forma un piccolo colle, dopo il quale incominciano le quarziti; la cresta continua poi, ora coperta dal ghiacciaio, ora emergente, sino all'altezza quasi dell'Aiguille de Polset (3558 m.) e dà allora solo nella Moriana; nella predetta cresta dal punto, in cui cessa l'anidrite, al confine con la Moriana si ha la distanza orizzontale di 2800 m. all'incirca.

facenti fra loro angoli di 45°. Questo lavoro piuttosto lungo, stante la piccolezza dei cristalli, non apparirà per fermo eccessiva precauzione.

Constatata con un'analisi qualitativa preliminare la sola presenza di fluore e magnesio, i cristallini lavati prima con acqua e solfuro di carbonio, per togliere loro le particelle di ganga (anidrite o gesso e zolfo), furono polverizzati, poi calcinati per eliminare lo zolfo talora incluso nella Sellaite e posti infine in un bicchiere con molta acqua, alla quale portata un istante all'ebollizione ho aggiunte alcune goccie di acido cloridrico. Lasciata parecchie ore la polvere nell'acqua, che sciolse ancora traccie di solfati, e lavatola, procedetti ad una completa porfirizzazione del minerale.

Gr. 0,4823 del materiale così preparato trattati a parecchie riprese con acido solforico lasciarono gr. 0,9271 di residuo. Il quale si sciolse nell'acqua lasciando un debolissimo residuo nerastro non apprezzabile; filtrai e nella soluzione perfettamente neutra una goccia di ossalato ammonico, previa aggiunta di cloruro ammonico, non produsse alcun precipitato. Esclusa così la presenza di traccie anche di calcio, determinai il magnesio pesandolo allo stato di pirofosfato, di cui ottenni gr. 0,8536. Ora gr. 0,9271 di $MgSO_4$ contengono gr. 0,1853 di Mg, mentre gr. 0,8536 di $Mg_2P_2O_7$ ne contengono gr. 0,1845. Il che prova che il residuo era costituito da solfato di magnesio puro.

Per calcolare il magnesio contenuto nel minerale partii dal peso trovato di solfato di magnesio e non dal pirofosfato a causa degli errori dovuti alla solubilità del fosfato ammonico magnesiaco. Ho così trovato il 38,42 °/₀ di magnesio, invece del 38,54 °/₀ contenuto in $MgFl_2$. Il valore ottenuto è perfettamente soddisfacente e mi autorizza a ritenere la Sellaite costituita da fluoruro di magnesio puro.

Densità e proprietà varie. — I cristallini di Sellaite scelti accuratamente e possibilmente liberi da ogni inclusione furono immersi nell'acqua acidulata leggerissimamente con acido cloridrico, portando un istante all'ebollizione e poi lasciando il tutto a sè per circa 12 ore. L'acqua acidula sciolse traccie di carbonati e di solfati.

La densità fu misurata al picnometro a + 16° con gr. 4,4 circa di sostanza. La media di tre esperienze concordanti risultò di 3,153 ed assegno il valore 3,15 ai cristalli da me cimentati.

La Sellaite trovasi sotto la forma di prismi allungati con apparenza sovente piuttosto fibrosa. Talora un individuo è stato rotto da forze esterne normalmente all'asse e poi piegato, mentre dell'anidrite o dello zolfo si interponeva fra i pezzi, i quali formano così una linea spezzata molto caratteristica. Non esito ad attribuire la causa di queste rotture posteriori alla formazione della Sellaite all'aumentare di volume, che fa l'anidrite, la quale assorbe acqua e passa al gesso.

La Sellaite trovasi ordinariamente nell'anidrite, ma talora anche nello zolfo; così ho potuto avere dei cristalli isolati trattando la roccia con solfuro di carbonio. I cristalli sono trasparenti con splendore vitreo; contengono però talora inclusioni di zolfo e anche di solfato di calcio; talora sono opachi, ma in tale caso non sono omogenei.

La Sellaite scaldata, nell'istante in cui si sfalda, manda una leggiera luce violacea, proprietà che perde dopo calcinata [1]. Scaldando la Sellaite si nota talora di

[1] Il Cossa nella sua Memoria, *Sulla produzione artificiale della Sellaite*, (*Ricerche chimiche e microscopiche su roccie e minerali d'Italia*, Torino, 1881) discorre a lungo di questa proprietà.

leggieri la presenza delle inclusioni di zolfo, che a freddo non appare così evidente: i frammenti prendono allora un colore giallo torbido molto sensibile.

Misure cristallografiche. — La Sellaite è dimetrica, come era stato provato dal prof. Strüver. Ho adottata l'orientazione da lui scelta colle correzioni naturalmente da lui stesso fatte nella opera sopracitata del Cossa alla sua prima Nota del 1868. Le misure furono fatte col goniometro Fuess, modello II (Websky).

Per calcolare il rapporto degl'assi, mi sono servito della misura di due angoli; cioè dell'angolo (100, 101) e dell'angolo (110, 111). Per il primo ho scelto il cristallino n. 3 molto piccolo (mm. 0,4 × 0,4 × 0,8 nelle direzioni delle x, y, z), ma che presentava due delle faccie 100 e 101 piane e molto brillanti. Se il cristallo fosse stato uguale e simmetricamente sviluppato, avrei presa la media dei 4 valori (100, 101), (010, 011), ($0\bar{1}0$, $0\bar{1}1$), ($\bar{1}00$, $\bar{1}01$); ma siccome tre di questi valori non avevano per nulla un'esattezza paragonabile con quella del quarto, non ho ritenuto che questo. Altrettanto dicasi della misura dell'angolo (110, 111) fatta col cristallo n. 4. In tutti i cristalli misurati è questa l'unica volta, che mi si presentò l'ottaedro (111) con una faccia tale da permettere una misura precisa.

Do qui le misure fatte:

(100, 101)		56°	35′	10″
			34	45
			35	10
			35	5
			34	50
	Media	56	35	0
(110, 111)		46°	59′	45″
			59	40
			59	50
			59	40
			59	55
	Media	46	59	46

Ora c:a = cot (100,101) = 0,65979
c:a = cot (110,111) cos 45° = 0,65948
c:a = 0,65963

Adotto $\frac{c}{a} = 0{,}6596$; log $\frac{c}{a} = 9{,}8192806$ (¹), da cui si deduce:

100, 101 = 56° 35′ 28″
110, 111 = 46 59 27

Seguirò ora presentando un elenco delle forme osservate.

(100), (110). Si trovano in tutti i cristalli indistintamente; conferiscono la forma prismatica alla Sellaite; forme lungo le quali avviene sfaldatura netta. Talora striate verticalmente.

(¹) Lo Strüver diede $\frac{c}{a} = 0{,}66189$, il che fa (100, 101) = 56° 30′; (110,111) = 46° 53,5′.

(210). Trovata nei cristalli n. 1, 2, 4, 11, 15 17, 19 e molto di frequente nella scelta del materiale per l'analisi chimica. La media delle misure dell'angolo (110, 210) risulta eguale a 18° 26′ colla massima deviazione di 3′; il calcolo dà 18° 26′.

(320). Nel solo cristallo n. 1. Molto piccola

	Oss.	Calcolo
110, 320	11°21′	11°19′

(101). Si trova in tutti i 20 cristalli terminati misurati. Angolo assunto di (100,101) = 56° 35′ 28″. Massima deviazione in tutte le misure 3′. Di solito bene sviluppato e piano.

(111). Si trova pure in tutti i 20 cristalli terminati misurati. Angolo assunto di (110, 111) = 46° 59′ 27″. Massima deviazione 8′. In generale è imperfetto e meno sviluppato rispetto a (101); raramente come nel n. 4 diventa predominante.

Le forme, che seguono, sono sempre piccole, relativamente poco sviluppate e rappresentano minute troncature, che non alterano il tipo del cristallo. Nella prima colonna dò il simbolo della forma; nella seconda il numero del cristallo, in cui fu osservata; nella terza la zona, cui appartiene la faccia misurata; nella quarta l'angolo misurato; nella quinta la media delle misure; nella sesta il risultato del calcolo.

(301)	1	[010]	100,301	26° 52′	26° 49′
(502)	4	[010]	100,502	31 18	31 14
(605)	4	[010]	101,605	5° circa	4 57
(112)	4	[$\bar{1}$10]	110,112	65° circa	65°
(334)	3,4	[$\bar{1}$10]	111,334	8° 1′	8 2
(551)	3	[$\bar{1}$10]	111,551	34 59	34 53
(558)	3,4	[$\bar{1}$10]	111,558	12 50	12 46
(212)	4,	[$\bar{1}$01]	111,212	13 31	13 27
(323)	3	[$\bar{1}$01]	111,323	8 40	8 41
(525)	5	[$\bar{1}$01]	111,525	16 30	16 25
(733)	4	[0$\bar{1}$1]	100,733	37 50	37 54
(944)	6	[0$\bar{1}$1]	100,944	39°	38 54
(972)	2	[1$\bar{1}\bar{1}$]	110,972	16 25	16 28

Oltre queste forme, che vengono determinate in modo certo dalla zona, in cui furono osservate e dalle misure fatte, la Sellaite presenta sovente sui vertici dei prismi, delle smussature triangolari arrotondate vicinissime alla zona del prisma; così ne trovai facenti angoli di 17° con 100 e di 29° con 110, altre volte di 18° con 100 e di 28° con 110 e poi ancora di 38° con 100, 11° con 110. La prima faccia potrebbe essere 17.5.1 in cui

17.5.1 , 100 = 17° 5′ , 17.5.1 , 110 = 28° 59′

La seconda 16.5.1 in cui

16.5.1 , 100 = 18° 5′ , 16.5.1 , 110 = 28° 5′

La terza 971 in cui

971,100 = 38° 31′ ; 971,110 = 10° 23′

Ma avendo trovato parecchie altre volte valori vicini a questi, i quali adottati complicherebbero troppo i simboli e nello stesso tempo tolgono la certezza alle forme scritte sopra e considerato il loro arrotondamento, che in alcuni cristalli parte dalle faccie del prisma, concludo essere proprietà caratteristica della Sellaite il presentare questi smussamenti arrotondati dei vertici dei prismi, che non si lasciano riferire a nessuna forma possibile.

Le forme certe della Sellaite sarebbero dunque 20, cioè:

Prismi	quadrati	(110) (100)
"	ottagoni	(210) (320)
Ottaedri		(111) (112) (221) (334) (551) (558)
"		(101) (301) (502) (605)
Diottaedri		(212) (323) (525) (733) (944) (972)

Le 14 forme (320) (112) (334) (551) (558) (301) (502) (605) (212) (323) (525) (733) (944) (972) furono da me osservate per la prima volta. La combinazione costante dei cristalli non terminati è (100) (110) a cui si aggiunge spesso (210). La combinazione caratteristica dei cristalli terminati è (100), (110), (101), (111) con predominio di (101) su (111).

Le altre combinazioni osservate furono:

Cristallo	n. 1.	(100) (110) (210) (320) ; (101) (301) (111)
"	n. 2.	(100) (110) (210) (101) (111) (972)
"	n. 3.	(100) (110) (101) (111) (551) (334) (558) (323)
"	n. 4.	(100) (110) (210) (101) (605) (502) (111) (112) (334) (558) (212) (733)
"	n. 5.	(100) (110) (101) (111) (525)
"	n. 6.	(100) (110) (101) (111) (944)
"	n.i 11, 15, 17, 19.	(100) (110) (210) (101) (111)

Talora parecchi piccoli individui lunghi terminati sembrano essere riuniti insieme, in modo molto regolare però, talchè le forme (100) (110), che racchiudono il fascio, sono continue e belle; i vari individui ora hanno tutti la stessa lunghezza ed ora no; in quest'ultimo caso il prisma termina a guisa di scala [1].

Indici di rifrazione. — Per la misura degli indici di rifrazione mi sono servito del metodo della misura della minima deviazione di un raggio luminoso attraverso un prisma al goniometro Websky. Per prisma mi servii di un cristallino, che presentava due faccie del prisma ottagono facenti fra loro un angolo vero di 45° molto sviluppato; piccolissime le due situate nello spigolo. L'angolo del prisma fu ritenuto di 45° gradi esatti; ipotesi giustificata dalle misure e dall'essere le due faccie bellissime e naturali. Constatato che il raggio meno deviato è polarizzato nella sezione principale, che cioè la Sellaite è otticamente positiva, come aveva già osservato lo Strüver,

[1] Non ho creduto necessario di pubblicare disegni di cristalli di Sellaite, essendo il loro aspetto tipico quasi costante ed identico a quello già dato dallo Strüver nella sua Nota.

procedetti alle misure. I valori che seguono rappresentano le medie di parecchie misure fatte alla linea D.

$$n_e = 1,3897$$
$$n_o = 1,3780$$

Potere rifrangente definito da $\frac{(c - a^2)}{c^2} = 0,00071$

La Sellaite dei minerali uniassi è il meno rifrangente, ove non si voglia tener conto del ghiaccio ($n_o = 1,3095$ giallo) o del nitrato di sodio, poichè in quest'ultimo, mentre $n_e = 1,336$ $n_o = 1,586$ (Descloizeaux). L'indice di rifrazione della fluorite è 1,43. In generale l'indice di rifrazione dei fluoruri è molto basso; osservazione che era già stata fatta fin da Berzelius.

Calore specifico. — Ho operato su fluoruro di magnesio cristallizzato artificialmente secondo il metodo Cossa. Del carbonato di magnesio cristallizzato da una soluzione in acqua satura di acido carbonico, fu sciolto in una soluzione di acido fluoridrico (purissimum Trommsdorff, ma ridistillato in recipienti di platino). Il fluoruro di magnesio fu poi messo in un crogiuolo di porcellana non verniciato e portato in un forno Perrot per parecchie ore alla temperatura della fusione della ghisa e poi lasciato lentamente raffreddare. Mi accertai con un'analisi quantitiva regolare, che la massa cristallina era costituita da fluoruro di magnesio puro.

Le determinazioni vennero fatte con un apparecchio di Regnault nel laboratorio fisico della R. Università di Torino, grazie alla squisita gentilezza del prof. Naccari.

Feci parecchie esperienze cambiando anche il calorimetro su gr. 30 circa della sostanza. L'aumento di temperatura del calorimetro variò intorno ai 2 gradi. La media dei valori ottenuti è espressa dalla cifra 0,246.

Sui minerali che accompagnano la Sellaite.

Dolomite. — Verso la metà della cresta di anidrite la roccia cambia natura e forma, poichè diventa costituita da dolomite nera fortemente inquinata da materie carboniose e solcata da vene di dolomite bianca. La dolomite nera si sgretola assai facilmente e forma una sabbia, in mezzo a cui si trovano romboedri di sfaldatura di dolomite bianca, le cui dimensioni raggiungono talora alcuni centimetri. Nelle vene di dolomite bianca si trovano talora bellissimi cristallini della medesima sostanza, il cui studio ho intrapreso.

La densità misurata al picnometro a $+16°$ con gr. 0,5 circa risultò eguale a 2,83.

L'analisi condotta coi metodi ordinari fornì i seguenti risultati. Gr. 0,730 del minerale perdettero calcinati gr. 0,348; diedero gr. 0,229 di CaO e gr. 0,429 di $Mg_2 P_2 O_7$. L'analisi si riassume così

CO_2	47 , 67
CaO	31 , 37
MgO	21 , 23
	100 , 27

Calcolando questi risultati col metodo proposto dal prof. Cossa nel suo opuscolo *Sulla determinazione delle formole mineralogiche di alcuni carbonati romboedrici misti* (Torino 1869) e ponendoli a raffronto colla composizione della dolomite normale

	Dolomite Gebroulaz	Dolomite normale
$Ca\,CO_3$	55 , 76	54 , 35
$Mg\,CO_3$	44 , 24	45 , 65
	100 , 00	100 , 00

si vede che la dolomite di Gebroulaz appartiene al tipo *normale*, in cui cioè le molecole del carbonato magnesico e del carbonato calcico stanno nel rapporto 1 : 1.

I cristallini sono tabulari, incolori, trasparenti ed impiantati di solito in modo che il pinakoide è normale alla superficie della roccia; hanno faccie molto perfette. I cristalli di massime dimensioni hanno le dimensioni mm. 2, 3, 4 nel senso delle rette

$[111]$ $[11\bar{2}]$ $[01\bar{1}]$

Ho misurati accuratamente alcuni di questi cristalli e di 17 fra essi do qui le forme. Tutti 17 presentano le forme seguenti: pinakoide (111), romboedri diretti (100) $(3\bar{1}\bar{1})$ $(11.\bar{5}.\bar{5})$. Le faccie delle forme $(3\bar{1}\bar{1})$ (111) si prestano a misure esatte al goniometro, le quali dimostrano evidentemente trattarsi di dolomite. Dalle misure dei 9 cristalli migliori risultò per angolo $(111, 31\bar{1})$ in media 75° 25′ colla massima variazione di 5′; (100) che si presta meno bene alle misure diede per l'angolo (111, 100) angoli variabili da 43° 47′ a 44° ed in media 43° 55′.

Ora nella serie Calcite, Dolomite, Magnesite si ha

	Calcite	Dolomite	Magnesite	oss.
$(111, 3\bar{1}\bar{1})$	75° 47′	75° 25′	75° 2′	75° 25′
(111, 100)	44 37	43 52	43 4	43 55

Adotto qui col Descloizeaux e col Goldschmidt per la dolomite il valore $a:c = 1:0{,}8322$, che dà per angolo fondamentale $111, 100 = 43° 51′ 32″$.

Si vede che la dolomite di Gebroulaz presenta angoli che coincidono con quelli della dolomite normale. Così l'osservazione cristallografica conferma in modo mirabile l'analisi chimica.

Segue ora la serie di tutte le forme osservate.

(111) Come ho già detto, è la forma dominante in tutti i cristalli, perchè è quella che ne determina l'aspetto tabulare. Ordinariamente è senza strie; solo in due cristallini ho notato delle strie parallele agli spigoli d'intersezione di (111) con il prisma esagono $(2\bar{1}\bar{1})$; la faccia allora è leggermente incavata.

$(10\bar{1})$ Questa forma già nota nella dolomite venne osservata nei cristalli n. 1, 2, 9, 10, 11, 12, 13, 14 in cui

	Media oss.	var. mass.	calc.
$(10\bar{1}\ ,\ 111)$	89° 58′	4′	90° 0′
$(10\bar{1}\ ,\ 3\bar{1}\bar{1})$	33 7	8′	33 3

$(2\bar{1}\bar{1})$ Si trova nei cristalli n. 1, 9, 10, 11, 12, 13, 14 e si presenta molto nettamente, benchè piccolissima, stretta, allungata nella zona [111, 100] con strie

parallale alla zona stessa. Nel cristallo n. 9 si trovò $(111, 2\bar{1}\bar{1}) = 89^\circ 55'$ invece di 90°. Nel cristallo n. 1 ebbi 90° osservando il massimo splendore colla lente, poichè per le strie la faccia non dava riflessioni abbastanza nette; ma misurando in esso la zona [111] ebbi in media $(10\bar{1}, 2\bar{1}\bar{1}) = 60^\circ 2'$ (calcolo 60°). Negli altri cristalli ebbi sempre circa $(111, 2\bar{1}\bar{1}) = 90^\circ$; ma la larghezza della riflessione dà misure, che possono variare fino di $30'$, il che però non porta alcun dubbio sull'esistenza della faccia. Il Goldschmidt nel suo *Index der Krystallformen der Mineralien*, (Berlin 1882), enumera le ragioni, per cui, per un errore di trascrizione del Haussmann dal Mohs, la forma $(2\bar{1}\bar{1})$ si sia introdotta nel numero delle forme credute note, tanto da essere registrata nel trattato elementare di mineralogia di Naumann e Zirkel. Però essa non venne accolta dal Descloizeaux nel suo *Manuel de Minéralogie*. Questa forma è dunque nuova per la dolomite (nota nella calcite).

(100) Si trova in tutti i 17 cristalli ed è piccolissima, se si tratta di faccia naturale; può diventare grande se di sfaldatura.

	media oss.	var. mas.	calc.
(111 , 100)	$43^\circ 55'$	$8'$	$43^\circ 52'$

$(3\bar{1}\bar{1})$ Si trova in tutti i 17 cristalli: è il romboedro il più importante per sviluppo di tutti quelli trovati. È molto interessante l'osservare che l'associazione predominante $(111)(3\bar{1}\bar{1})$ è pure caratteristica dei cristalli di dolomite che si trovano nel gesso di Hall in Tirolo. Come dissi sopra

	oss.	var. mass.	calc.
$(111, 3\bar{1}\bar{1})$	$75^\circ 25'$	$5'$	$75^\circ 25'$

$(11.\bar{5}.\bar{5})$. Come già dissi, questo romboedro si trova bene sviluppato in tutti i 17 cristalli esaminati: in alcuni lo è anzi più di $(3\bar{1}\bar{1})$ ed è generalmente senza strie. E una forma finora non stata osservata nella dolomite (nota nella calcite) e che trovandosi sempre presente, possiamo dire *caratteristica* della dolomite di Gebroulaz.

	media oss.	var. mass.	calc.
$(111, 11.\bar{5}.\bar{5})$	$86^\circ 18'$	$10'$	$86^\circ 17'$

$(11\bar{1})$ Questo romboedro fu osservato in 14 cristalli, cioè nei n. 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16 ed è poco sviluppato. Forma già nota. Le misure diedero

	media oss.	mass. var.	calc.
$(111, 11\bar{1})$	$62^\circ 33'$	$10'$	$62^\circ 31'$

$(33\bar{5})$ Questo romboedro fu osservato in 13 cristalli cioè nei n. 1, 2, 3, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16. Abbastanza sviluppato, ma spesso arrotondato nel senso della zona [111, 100]. Forma nota. Le misure diedero

	media oss.	mass. var.	calc.
$(111, 33\bar{5})$	$82^\circ 33'$	$15'$	$82^\circ 35'$

$(33\bar{1})$ Questo romboedro fu trovato nel solo cristallo n. 2 e si presta male alle misure pel suo arrotondamento. Forma nota.

Si trovò $(111, 33\bar{1}) = 37^\circ$ circa. Calcolo $37^\circ 33'$.

$(51\bar{3})$ Questa bipiramide esagona fu osservata nei cristalli n. 1, 12, 13, 14 ed è piccolissima. Forma ancora ignota per la dolomite (nota nella calcite)

	media oss.	var. mass.	calc.
$(111\ ,\ 51\bar{3})$	65° 39′	3′	65° 45′

Fu verificato trovarsi pure nella zona $[1\bar{1}0\ ,\ 3\bar{1}\bar{1}]$.

$(10.1.\bar{8})$ Bipiramide che si trovò solo nel cristallo n. 1 ed è piccolissima. Questa forma fu già notata da Descloizeaux nell'opera sopra citata; però a causa di alcune incertezze da lui stesso segnalate fu dal Goldschmidt esclusa dall'elenco delle forme certe. Le mie osservazioni ne confermano l'esistenza

	media oss.	var. mass.	calc.
$(111\ ,\ 10.1.\bar{8})$	78° 35′	4′	78° 41′

$(11.3.\bar{9})$ Scalenoedro stato trovato solo nel cristallo n. 1. È forma piccolissima nettamente determinata da

	oss.	calc.
$(01\bar{1}\ ,\ 3.11.\bar{9})$	17°47′	17°40′
$(111\ ,\ 3.11.\bar{9})$	73°27′	73°23′

Inoltre trovasi nella zona $[11\bar{1}\ ,\ 3\bar{5}3]$, la quale comprende pure $5\bar{3}1$ ed in cui

	oss.	calc.
$(11\bar{1}\ ,\ 3.11.\bar{9})$	24°14′	24°13′

Questo scalenoedro è nuovo sia per la dolomite, sia per la calcite.

Riassumendo si hanno nella dolomite di Gebroulaz le seguenti forme:

Pinakoide (111)
Prismi esagoni $(10\bar{1})$, $(2\bar{1}\bar{1})$
Romboedri diretti (100) $(3\bar{1}\bar{1})$ $(11.\bar{5}.\bar{5})$
" inversi $(11\bar{1})$ $(33\bar{5})$ $(33\bar{1})$
Bipiramidi esagone $(51\bar{3})$ $(10.1.\bar{8})$
Scalenoedri $(11.3.\bar{9})$

Di queste le forme $(2\bar{1}\bar{1})$, $(11.\bar{5}.\bar{5})$, $(51\bar{3})$, $(11.3.\bar{9})$ sono, per quanto mi consta, nuove per la dolomite. Della forma $(10.1.\bar{8})$ reputata incerta viene accertata l'esistenza. Insisto sulla presenza costante del romboedro $(11.\bar{5}.\bar{5})$, che forma della dolomite in questione un tipo a sè. Il cristallo n. 1 di cui do il disegno (fig. 3) ha le forme (111) $(10\bar{1})$ $(2\bar{1}\bar{1})$ (100) $(3\bar{1}\bar{1})$ $(11.\bar{5}.\bar{5})$ $(11\bar{1})$ $(33\bar{5})$ $(51\bar{3})$ $(10.1.\bar{8})$ $(11.3.\bar{9})$.

Dalla proiezione stereografica (fig. 1), in cui sono solo segnate le faccie esistenti e dalla figura si vede che questa dolomite presenta l'emiedria a faccie parallele. Giova però aggiungere che delle due bipiramidi le faccie conservate sono rispettivamente girate di 60°, cosicchè esistono propriamente parlando

l'emibipiramide π $(3.11.\bar{9})$
" π $(1.5.\bar{3})$
l'emiscalenoedro π $(10.1.\bar{8})$

Magnesite. — In mezzo alla massa dell'anidrite ho trovato due piccoli cristallini foggiati a prisma esagono sormontato da un romboedro aventi le dimensioni di mm. 1

lungo l'asse e normalmente di mm. 0,5; sottoposti a misure goniometriche mi diedero i seguenti risultati:

Cristallo n. 1	$(10\bar{1} , 01\bar{1})$	60°
	$(100 , 111)$	43 16′
Cristallo n. 2	$(10\bar{1} , 01\bar{1})$	60
	$(10\bar{1} , 100)$	53 39′
	$(10\bar{1} , 20\bar{1})$	24 circa
	$(01\bar{1} , \bar{1}11)$	40 1′

Se ora io pongo a confronto i valori trovati con quelli corrispondenti della calcite, dolomite, magnesite come si vede dalla seguente tabella

	calcite	dolomite	magnesite	oss.
$(100 , 111)$	44° 37′	43° 52′	43° 4′	43° 16′
$(10\bar{1} , 100)$	52 33	53 8	53 45	53 39
$(01\bar{1} , 11\bar{1})$	39 26	39 48	40 13	40 01

si vede che i valori osservati coincidono così esattamente con quelli della magnesite da farli ritenere cristallograficamente identici. Quei cristallini sono rarissimi; se riescirò a trovarne pochi altri, una semplice analisi qualitativa potrà confermare le misure cristallografiche.

La forma $20\bar{1}$ è perfettamente determinata dalla misura fatta e dal trovarsi nella zona $[10\bar{1} , 100]$; il calcolo darebbe 24° 27′, mentre notando il riflesso con una lente ebbi 24°. Se il minerale è magnesite, le forme $(11\bar{1})$ $(20\bar{1})$ sono nuove: nella magnesite non si osservò finora altro che la forma (100) e molto rara la combinazione (111) $(10\bar{1})$; talchè i cristallini, oltre al presentare forme nuove, costituerebbero anche un tipo nuovo. Il cristallo n. 2 avente le forme $(10\bar{1})$ (100) $(11\bar{1})$ $(20\bar{1})$ (111) fu disegnato nella fig. 2ª.

Albite. — L'albite segnalata già dallo Strüver è abbastanza rara; benchè di solito offra i caratteri di una decomposizione avanzata, pure mi venne fatto di trovare ancora alcuni cristallini trasparenti con bei riflessi. In due cristalli presentanti geminazione di sovrapposizione coll'asse di geminazione normale a (010) ho osservato i seguenti pinakoidi (010) (120) (130) (150) $(1\bar{1}0)$ $(1\bar{3}0)$ (110) (001) $(11\bar{1})$ $(1\bar{1}\bar{1})$ $(10\bar{1})$ così determinati, assumendo col Groth per costanti i valori $a : b : c = 0,6333 : 1 : 0,5575$; $\alpha = 94° 4'$; $\beta = 116° 28'$; $\gamma = 88° 8'$.

		oss.	calcolo
Nella zona [001]	$010 , 110$	60° 19′	60° 26′
	$010 , 120$	40	41 22
	$010 , 130$	30 32	30 24
	$010 , 150$	18 40	19 24
	$0\bar{1}0 , 1\bar{1}0$	60	60 20
	$0\bar{1}0 , 1\bar{3}0$	30 6	30 23
Nella zona [100]	$010 , 001$	86 28	86 23
Nella zona [101]	$010 , 11\bar{1}$	66 27	66 20
	$010 , \bar{1}11$	60 7	60 26
	$010 , \bar{1}01$	86	86 19

Non so se la forma (120) sia già stata osservata; nella albite in questione ha faccie nette con buoni riflessi. La forma predominante è (010) e conferisce ai cristalli aspetto tabulare.

Fluorite. — La fluorite fu trovata in parecchi punti del banco di anidrite; ora ha un colore violaceo più o meno carico ed ora è bianca. Vicinissimo al luogo in cui ho rinvenuto la Sellaite ho raccolto degli splendidi cubi da 7 ad 8 mm. di lato colle faccie dell'ottaedro, di colore violetto chiaro, posti iu mezzo a gesso molto lamellare. Il Bischof (1) parla di fluorite trovata nel gesso con zolfo in roccia identica cioè petrograficamente a quella di Gebroulaz.

Zolfo. — Lo zolfo è frequente assai, ma non è quasi mai cristallizzato in modo distinto. Talora conferisce alla roccia un colore giallo chiaro, essendo uniformemente diffuso in piccolissimi frammenti; altrove riempie delle specie di geodi; considero come una rarità un campione, che presenta traccie di faccie piane, la cui natura però non ho determinata.

Quarzo. — Si trova abbastanza frequentemente sopratutto nelle parti più basse della cresta di anidrite. Contiene talora inclusioni di zolfo, entro cui si trova talora; raggiunge anche 1 cm. di lunghezza, ma di solito è in minuti cristallini presentanti al solito il prisma e la piramide esagona.

Celestina. — Grazie alle ricerche fatte nell'estate del 1887 sono in grado di aggiungere questo altro alla serie dei minerali del giacimento di anidrite di Gebroulaz. Verso il principio della cresta l'anidrite forma un bel salto verticale di circa 50 metri di altezza dall'altra parte del ghiacciaio. Al piede del salto, in una specie di bacino, trovai in un masso alcuni cristallini trasparenti posti ora nell' anidrite e ora tra lo zolfo, proprio come la Sellaite; la natura dei quali restò dimostrata da un'analisi qualitativa e dalle misure goniometriche. Di un bel cristallo (mm. $15 \times 3 \times 4$) do qui le forme per ordine di sviluppo (011) (110) (001) (102) (111) (122) (100) (104). (L'orientazione è quella del Goldschmidt). I cristalli sono fortemente allungati nel senso dell'asse delle x, e si presentano come la Sellaite rotti a più riprese e contorti con anidrite o gesso tra i pezzi. Le dimensioni massime sono quelle del cristallo misurato; si presenta anche in cristalli molto piccoli, come pure commista all'anidrite senza presentare faccie naturali. La separazione del minerale riesce però agevole stante la sua grande densità.

Natura della roccia.

La roccia è costituita da anidrite, la quale contiene commista nella sua massa dolomite nerastra ora in grossi ed ora in piccoli frammenti: più raramente si trova della dolomite bianca, la quale si sfalda nettamente in romboedri: qua e là nella roccia si vede dello zolfo; proprietà, che valse alla cresta il nome locale datole di *Roc du Soufre.*

Alla superficie l'anidrite si idrata e passa al gesso. Da un piccolo masso staccato, eroso dalle pioggie senza traccia di zolfo e privo di dolomite, ho estratto un campione di roccia omogeneo, di cui ho determinata l'acqua. Gr. 0,663 della roccia diedero calcinati una perdita di gr. 0,139 corrispondenti al 20,97 °/₀ di acqua in luogo

(1) *Lehrbuch der chemischen und physikalischen Geologie.* Bonn. 1864.

di 20,95 % teorico, contenuto nel gesso. Ciò prova che la roccia era costituita da gesso puro. In generale per stabilire a che punto di idratazione si trovi l'anidrite, non serve una determinazione pura e semplice dell'acqua contenuta nella roccia, trovandosi spesso lo zolfo e la dolomite bianca così intimamente commisti all'anidrite da non poterne essere separati. Come ho già osservato nella mia Nota preliminare, al microscopio il processo di idratazione appare evidente; l'acqua si introduce nelle linee di sfaldatura microscopiche della anidrite e ne cambia le pareti in gesso.

La roccia compatta è talora finamente granulare e se ne staccano tanti piccoli parallelepipedi retti di aspetto zuccherino. I parallelepipedi idratandosi prendono uno splendore matto, ma conservano approssimativamente le loro faccie ad angolo retto, offrendo così un esempio di pseudomorfosi.

L'aumento di volume dell'anidrite, che passa al gesso, e lo sciogliersi del gesso nell'acqua conferisce un carattere tutto locale alla roccia, che forma talune guglie alte più di 30 metri, forate, stranamente foggiate, che pare si sorreggono appena; come pure cavità interne che vengono poi ricoperte dalle frane.

In una parete verticale di 50 metri d'altezza si nota l'alternarsi di strati di anidrite e di gesso; mescolanza caratteristica in simili giacimenti. In generale la roccia quando non contiene nè dolomite, nè zolfo, è più dura e compatta e meno alterabile; l'acqua sciogliendo all'intorno la roccia più alterabile e smussando i vertici e gli spigoli della compatta lascia grossi sferoidi, i quali emergono talora in gran numero dalla superficie, e poggiando appena sul pendio rotolano facilmente in basso con una semplice spinta.

Modo di formazione della Sellaite.

Dopo di aver detto così della Sellaite, dei minerali che l'accompagnano e della natura della roccia, in cui si trova, sarebbe logico fare qualche parola sul modo e sulle condizioni di formazione di essa roccia e della Sellaite, ma a questo punto incominciano le maggiori difficoltà. Ipotesi se ne possono fare parecchie; poche avranno un fondamento qualsiasi.

L'anidrite proviene probabilmente da calcari magnesiaci, che furono convertiti da acque sulfuree in solfati; restando, per la sua grande solubilità, eliminato il solfato di magnesio; convertiti però solo in parte e si spiega così la presenza della dolomite nella roccia. Dalle medesime acque o da altre in epoca vicina sarebbe stata deposta la Sellaite. Il trovarsi infatti la Sellaite così vicina alla fluorite, fa subito pensare che i due fluoruri abbiano un'origine comune, e generalmente si ammette che la fluorite abbia un'origine acquea almeno in simili terreni. Non riesce certo facile lo spiegare come mai la Sellaite sia così rara, tantochè non se n' è trovata finora che in una ristrettissima località. Se ivi poterono insieme cristallizzare dall'acqua i due fluoruri di calcio e di magnesio, in quali condizioni speciali ciò avvenne, se altrove si depositò solo il fluoruro di calcio non mancando certo la presenza del magnesio? Delle esperienze sulla relativa solubilità dei due fluoruri getterebbero probabilmente qualche luce sulla questione. Giova però osservare che un fatto identico avviene nei due fosfati di calcio e di magnesio, essendo la wagnerite rarissima rispetto all'apatite.

La Sellaite si presenta d'altra parte talora con un aspetto molto sedimentario; in esili straterelli di 1 cm. di spessore infatti, che attraversano l'anidrite, si trovano molti piccoli cristallini lunghi impiantati tutti normalmente al piano dello straterello e fitti talora così da offrire quasi l'aspetto di massa fibrosa.

Secondo il mio umile parere dunque, contemporaneamente o poco dopo l'epoca in cui si depositò l'anidrite e lo zolfo, si ebbe una cristallizzazione dalle acque di fluoruri, di silice, di solfato di stronzio.

E poco probabile che lo zolfo sia prodotto dalla decomposizione dell'anidrite; senza negare che se ne possa trovare di quello che ripete una tale origine, non esito ad affermare che la maggior parte di esso fu deposto dalle acque sulfuree stesse. Come si spiegherebbero altrimenti le frequenti inclusioni di zolfo nei cristalli di Sellaite e di quarzo? Questi due ultimi minerali non possono essere ritenuti posteriori alla decomposizione dell'anidrite; per esempio la Sellaite è anteriore alla idratazione della roccia, perchè è a questo fatto, come ho mostrato, che si debbono attribuire le rotture ed i contorcimenti della Sellaite.

In favore della supposizione che lo zolfo provenga dalla decomposizione del gesso, parlerebbe il fatto, che là, dove la roccia è compatta e non alterata, non si vede zolfo; ma si può rispondere che neppure ivi si trova della dolomite, il che significa che si ha in tal caso innanzi a sè un prodotto completo della conversione del carbonato in solfato, senza che rimanga traccia nè dell'uno nè dell'altro dei fattori della nuova formazione, e finalmente che la roccia non è alterata ivi appunto, perchè mancando zolfo e dolomite, essa presenta massima compattezza e resistenza. Del resto anche in questa roccia non alterata si può notare talora dello zolfo sparso in granuli microscopici che conferiscono alla roccia un lievissimo colore giallo. Si trovano infine frequentemente tra i massi di dolomite racchiusi in quel giacimento, vene, le cui pareti a contatto con la dolomite sono costituite da anidrite, mentre il piano mediano è formato da zolfo; al contatto delle acque sulfuree il carbonato fu convertito in solfato, mentre ove questo contatto non c'era, l'acqua ebbe a deporre zolfo.

Non so se queste mie opinioni sieno divise dai geologi o dai petrografi; io non ho cercato altro che di rendermi ragione del come si formarono la roccia ed i minerali in essa contenuti, volendo tenere conto di tutti i fatti da me osservati.

Produzione artificiale della Sellaite.

Nel corso di ricerche, in cui il prof. Cossa mi volle compagno, per far cristallizzare fluoruri di metalli rari ottenemmo a caso della Sellaite artificiale attaccando a caldo dell'ossido di magnesio con vapori di acido fluoridrico; si noti che il prof. Cossa aveva, come appare dalla sua memoria più volte citata, fatto inutilmente pervenire vapori di acido fluoridrico secco sopra ossido di magnesio cristallizzato in un tubo di platino. Un poco di fluoruro di didimio amorfo era stato posto in un crogiuolo di platino e questo alla sua volta in un crogiuolo di porcellana non verniciata, riempiendo l'interstizio con ossido di magnesio; dopo di aver lasciato il tutto esposto per parecchie ore al calor bianco, trovammo l'ossido di magnesio convertito in molti punti in laminette cristalline riconosciute costituite da fluoruro di magnesio. La cosa si

spiega avvertendo non che essendo il fluoruro di didimio stato interamente essiccato dall'eccesso di acido fluoridrico, i vapori dell'acido sviluppatisi intaccarono l'ossido di magnesio. Resta adunque provato che vapori di acido fluoridrico agenti a caldo sopra ossido di magnesio, possono convertirlo in fluoruro cristallino.

Per esperimentare in modo più conforme a quanto avviene in natura, ho tentato di ottenere la Sellaite per via umida, ma inutilmente. Presi due recipienti di vetro simili e posi il minore di esso dentro l'altro. Sino al livello di metà circa l'altezza del vaso minore ho posto in quest'ultimo una soluzione di un fluoruro alcalino e nell'anello esterno una soluzione di cloruro di magnesio; aggiungendo poi acqua fin sopra l'orlo del vaso minore con grandissima precauzione in modo che i liquidi non si mescolassero. Le pareti dei recipienti erano ricoperte da paraffina, affinchè non venissero attaccate dal fluoruro alcalino. Speravo di ottenere cristalli per diffusione lenta, ma non ottenni altro che fluoruro di magnesio completamente amorfo, probabilmente idrato. Mi sia lecito aggiungere che col metodo sopra indicato, ponendo in luogo del cloruro di magnesio cloruro di bario, ottenni in capo ad un mese alla superficie dell'acqua un velo, che, esaminato al microscopio, risultò costituito da tanti piccoli cubottaedri monometrici molto regolarmente sviluppati. Un'analisi quantitativa dimostrò che il corpo era fluoruro di bario.

Così ottenni fluoruro di bario nettamente cristallino col processo adoperato dal Cossa per fare cristallizzare il fluoruro di magnesio, scaldando cioè al bianco il fluoruro di bario amorfo; la massa fusa presentò uua struttura cristallina, che ho riconosciuto appartenere al sistema monometrico; mentre un'analisi regolare mi dimostrò che il corpo non si era alterato. La densità di questa massa cristallina misurata al picnometro a $+ 16^\circ$ con circa 9. gr. della sostanza risultò di 4,54 (1).

Le ricerche chimiche esposte nel presente lavoro furono compiute nel laboratorio chimico della Scuola d'applicazione per gli Ingegneri a Torino; mi piace qui esprimere i sensi della mia più viva riconoscenza al prof. Alfonso Cossa, che oltre all'ospitalità accordatami, mi fu largo di aiuto e di consigli.

APPENDICE

Mi sia permesso qui a titolo di appendice di segnalare gli errori in cui incorrono alcuni trattati di mineralogia che parlano della Sellaite.

Il Dana a pag. 14 del suo « appendix » al « System of Mineralogy (Trübner, London 1875) » dice che la Sellaite si trova « at Geibroula in Piedmont ».

Nella dodicesima edizione (1885) del trattato di mineralogia di Naumann e Zirkel si legge, che tra le forme della Sellaite osservate dallo Strüver vi hanno « Zwillinge, bei welchen die Normale auf P ∞ Zwillingsaxe ist, und die beiden Hauptaxen unter 113° geneigt sind ». Ora la sopradetta geminazione fu solo osservata dallo Strüver nei cristalli artificiali di fluoruro di magnesio ottenuti dal Cossa.

(1) Scheerer e Drechsel (J. pr. Chem. (2). 7,63) avevano ottenuto fluoruro di bario in cubi evaporando lentamente dalla sua soluzione acquosa o scaldando a 240° il fluoruro amorfo in presenza di acqua acidificata da acido nitrico.

Se il Zirkel attribuì le forme artificiali alle naturali, non manca chi fece l'opposto. Così il Bourgeois nel suo libro, « Reproduction artificielle des minéraux », facente parte dell'Encyclopédie chimique del Frémy, ed il Lévy nel suo classico trattato, « Synthèse des minéraux » dicono che il Cossa ottenne cristallini identici alla Sellaite ed enumerano tutte le forme naturali della Sellaite state indicate dallo Strüver.

Giova osservare che avendo sinora posseduto il solo Museo del Valentino a Torino pochi frammenti di Sellaite, questi errori non avranno certamente arrecato fastidio ai mineralogi.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

La fig. 1ª rappresenta la proiezione steregrafica delle forme osservate nella dolomite di Gebroulaz, in cui sono segnate solo le faccie esistenti, tenuto conto cioè delle emiedrie.

La fig. 2ª rappresenta il cristallo n. 2 di magnesite colle forme $a\,10\bar{1}$, $p\,100$, $o\,111$, $k\,20\bar{1}$, $\varphi\,11\bar{1}$.

La fig. 3ª rappresenta il cristallo n. 1 di dolomite colle forme: $o\,111$, $a\,10\bar{1}$, $b\,2\bar{1}\bar{1}$, $p\,100$, $m\,3\bar{1}\bar{1}$, $t\,11.\bar{5}.\bar{5}$, $\pi\,33\bar{5}$, $\varphi\,11\bar{1}$, $\alpha\,51\bar{3}$, $\delta\,10.1.\bar{8}$ ☾ $11.3.\bar{9}$.

Fig. 1ª

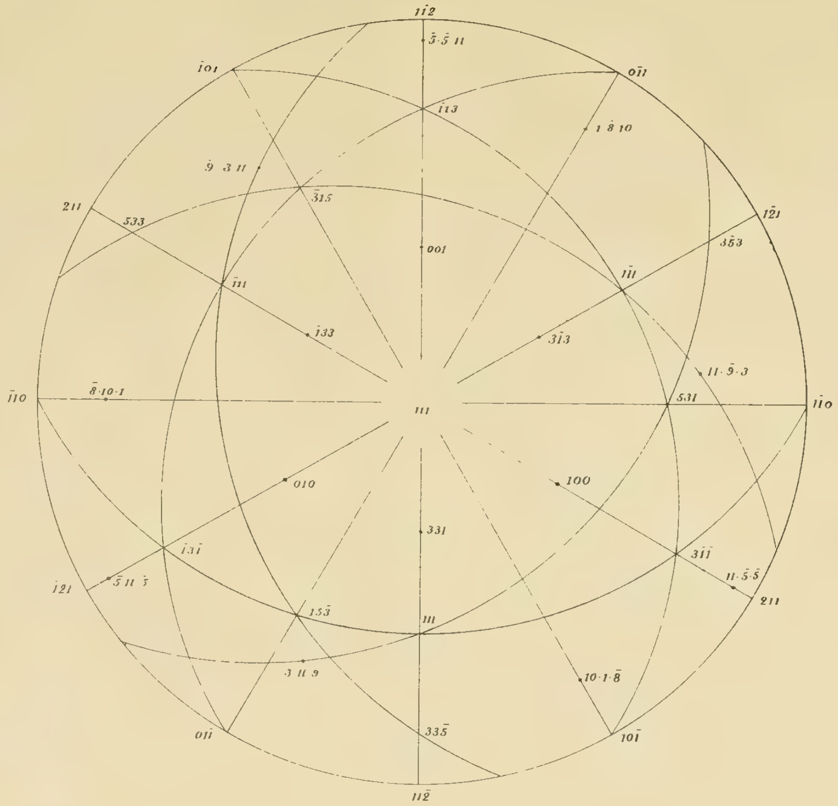


Fig. 2ª

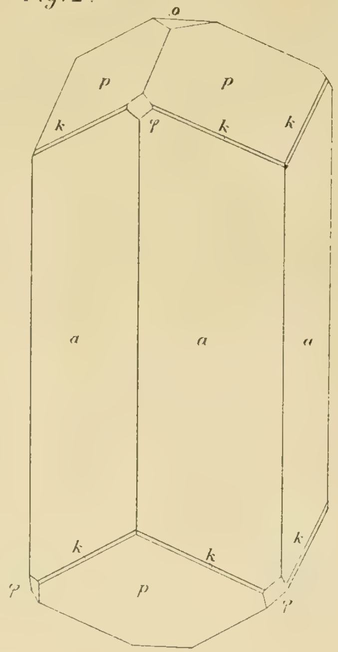
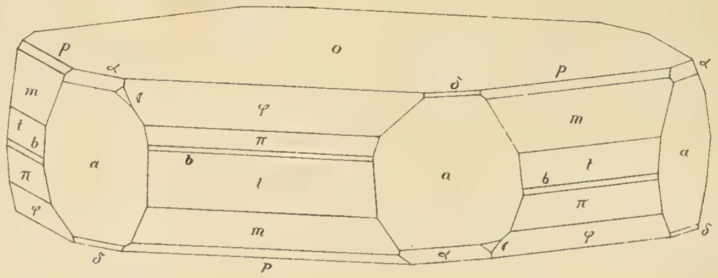


Fig. 3ª



Lit Bruno e Salomone Roma

RELAZIONE

letta dal Socio Struever, relatore, a nome anche del Socio Cannizzaro, nella seduta del 13 novembre 1887 sulla Memoria di Francesco Mauro intitolata: *Nuove ricerche sui fluossimolibdati ammonici - Dimolibdato ammonico*, e su quelle di Eugenio Scacchi intitolate: *Studio cristallografico dei fluossimolibdati e del dimolibdato di ammonio. — Studio cristallografico dei fluossipomolibdati.*

« Il prof. Francesco Mauro, il quale da tempo ha intrapreso uno studio sui fluossipomolibdati, nel preparare del fluossimolibdato ammonico neutro di cui aveva bisogno, si è accorto che i suoi risultati non andavano di accordo con quelli pubblicati nel 1867 dal Delafontaine. Egli si accinse perciò a rifare lo studio chimico dei fluossimolibdati ammonici, associandosi, per il necessario studio cristallografico, il dott. Eugenio Scacchi. I due autori presentano ora i risultati delle loro ricerche sotto forma di tre Memorie: una di chimica, e due di cristallografia; ma crediamo utile, per l'intimo nesso tra l'una Memoria e l'altre, di non presentare che una sola relazione.

« Il Mauro comunica i metodi da lui usati per la preparazione e l'analisi dei seguenti composti:

Fluossimolibdato triammonico . . .	$MoO_2Fl_2, 3NH_4Fl$
	$MoO_3, 2NH_4Fl$
Fluossimolibdato ammonico normale	$MoO_2Fl_2, 2NH_4Fl$
Fluossimolibdato ammonico ottaedrico	$MoO_2Fl_2, NH_4Fl, (NH_4)_2O$
Dimolibdato ammonico	$2MoO_3, (NH_4)_2O, H_2O$

« Non potè ottenere il fluossimolibdato ammonico neutro con una molecola di acqua di cristallizzazione, descritto dal Delafontaine.

« Tutti i composti ottenuti furono sottoposti ad esame cristallografico e ottico dal dott. E. Scacchi.

« Senza entrare in una minuta discussione dei risultati, crediamo di dover almeno rilevare un fatto che ci sembra assai interessante.

« Il fluossimolibdato ammonico normale studiato dallo Scacchi non solo è isomorfo col fluossitungstato ammonico normale studiato dal Marignac, locchè era da prevedersi quasi con sicurezza, ma i due sali sono ancora, geometricamente, isomorfi col fluossiniobato ($NbOFl_3, 2NH_4Fl$) studiato dal Marignac; anzi quest'ultimo sale starebbe, per rapporto assiale, in mezzo agli altri due, benchè ne differisca, oltre alla sostituzione del niobio al molibdene o tungstene, per contenere OFl_3 invece di O_2Fl_2.

E questo fatto è tanto più degno di nota che dallo studio cristallografico dei fluossipomolibdati ottenuti per la prima volta dal Mauro, risultano fatti consimili. Il Mauro preparò, oltre al fluossipomolibdato potassico e al fluossipomolibdato ammonico normale, il fluossimolibdato potassico normale e il fluossitungstato potassico normale, due sali già ottenuti dal Marignac e da questo ritenuti, con qualche incertezza, come isomorfi col fluotitanato potassico e col fluossiniobato potassico, ambedue da lui preparati e studiati anche cristallograficamente.

« Risulterebbe ora dagli studi cristallografici dello Scacchi un completo isomorfismo geometrico, da una parte, tra il fluotitanato potassico del Marignac, il fluossitungstato potassico normale e il fluossipomolibdato potassico ottenuto dal Mauro; dall'altra parte, tra il fluossimolibdato potassico normale e il fluossiniobato potassico di Marignac. Volendo si potrebbero anche calcolare costanti cristallografiche prossimamente uguali per tutti i cinque composti. Finalmente il fluossipomolibdato ammonico normale è per forma cristallina quasi affatto identico al fluossimolibdato ammonico normale, e quindi geometricamente isomorfo anche col fluossiniobato ammonico di Marignac e il fluossitungstato ammonico normale.

« Noi ci asteniamo dal tirare delle conclusioni da questo isomorfismo geometrico fra composti che si distinguono essenzialmente, sotto l'aspetto chimico, per contenere gli uni $O_2 Fl_2$, gli altri OFl_3, tanto più che anche gli autori, per ora, credono prudente di non slanciarsi nel campo delle ipotesi, ma non possiamo a meno di augurarci che tosto vedano la luce i risultati delle ulteriori ricerche chimiche e cristallografiche già intraprese dal Mauro e dallo Scacchi su questi e analoghi composti, il cui studio fu in modo tanto splendido iniziato dall'illustre Marignac.

« Intanto, ritenendo che i fatti esposti dai due autori siano, e possano diventare di più, importanti per la chimica pura non solo, ma anche per la teoria dell'isomorfismo, proponiamo l'inserzione delle Memorie, due delle quali sono accompagnate da disegni assai bene eseguiti, nei volumi dell'Accademia ».

Studio cristallografico dei fluossimolibdati d'ammonio. Dimolibdato di ammonio.

Memoria di EUGENIO SCACCHI

(Con una tavola)

I composti dei quali si terrà parola sono stati preparati per la prima volta dal prof. Francesco Mauro, il quale ha messo a mia disposizione tutto il materiale occorrente per farne un completo studio cristallografico, i cui risultati formano l'oggetto della presente Memoria.

Fluossimolibdato triammonico.

$Mo\,O_2\,Fl_2 , 3\,NH_4\,Fl.$

Questo composto è stato ottenuto per la prima volta dal prof. Mauro sciogliendo il molibdato ammonico ordinario $\frac{3}{7}$, in una soluzione di fluoruro d'ammonio ed acido fluoridrico.

Sistema cristallino: Ortorombico.

$$a:b:c = 0{,}54522:1:0{,}87672.$$

Facce osservate:

A	B	m	o
(100)	(010)	(110)	(011)
$\infty \bar{P} \infty$	$\infty \breve{P} \infty$	∞P	$\breve{P} \infty$

Combinazioni osservate:

m A o = (110) (100) (011), fig. 1ª;

m A o B = (110) (100) (011) (010).

Angoli	Calcolati	Misurati		
		medie	n.	limiti
A:m = 100:110	*	28° 36′	5	28° 30′ — 28° 40′
B:m = 010:110	61° 24′ 00″,0	61 22	2	61 21 — 61 23
o:o′ = 011:01̄1	*	82 29	4	82 28 — 82 30
o:m = 011:110	71 36 17,0	71 32	6	71 05 — 72 00

I cristalli sono quasi trasparenti, senza colore, con splendore vitreo molto debole. Essi si presentano piccolissimi ed aghiformi di lunghezza da 2 a 3 mm. e

di spessore che raramente raggiunge $\frac{1}{5}$ mm. È rarissimo trovarli terminati alle estremità, poichè dalle soluzioni si hanno gruppi di cristallini confusamente ammassati ed intricati insieme.

Le facce dànno in generale immagini che per la piccolezza dei cristalli sono poco distinte, tuttavia esse dànno talvolta immagini buone per le misure. Le facce m (110) sono sempre predominanti. Le facce o (011), quando si presentano distinte, si mostrano spesso, nella stessa estremità, molto disuguali fra loro. Le facce A (100) e B (010) sono sempre piccolissime e le seconde sogliono spesso mancare.

Frattura vitrea; sfaldatura secondo la base (001) poco distinta, ma alquanto facile.

I cristalli, esaminati al microscopio di polarizzazione, presentano una direzione di estinzione secondo l'asse del prisma.

Composto di anidride molibdica e fluoruro d'ammonio.
$MoO_3, 2NH_4Fl$.

Questo composto è stato ottenuto dal prof. Mauro per precipitazione aggiungendo ammoniaca alla soluzione del fluossimolibdato triammonico ($MoO_2Fl_2, 3NH_4Fl$) e cristallizzato sciogliendo il precipitato in una soluzione di ammoniaca e fluoruro di ammonio o nell'ammoniaca solamente.

Sistema cristallino: Ortorombico.

$$a:b:c = 0{,}57464:1:0{,}67705.$$

Facce osservate:

B	C	m	o
(010)	(001)	(110)	(011)
$\infty \breve{P} \infty$	oP	∞ P	$\breve{P} \infty$.

Combinazioni osservate:

B m o = (010) (110) (011), fig. 2ª;
B m C o = (010) (110) (001) (011), fig. 3ª.

Angoli	Calcolati	Misurati		
		medie	n.	limiti
m:m' = 110:1$\bar{1}$0	*	59° 46′	7	59° 35′ — 59° 59′
B:m = 010:110	60° 07′ 00″,0	60 16	6	59 58 — 60 29
B:o = 010:011	*	55 54	7	55 34 — 56 08
C:o = 001:011	34 06 00, 0	33 52	1	———
m:o = 110:011	73 46 47, 1	73 48	2	73 41 — 73 55

I cristalli si presentano quasi trasparenti, alquanto giallicci, con splendore tra il vitreo e l'adamantino, e per la loro forma e colore sono alcune volte molto simili all'aragonite di Bilin. La loro lunghezza raramente raggiunge 2 mill.

Le facce m (110) sono le sole che si presentano ordinariamente piane, tutte le altre sono quasi sempre più o meno poliedriche, e poche volte hanno dato misure soddisfacenti.

I cristalli raramente sono semplici ed in forma di grosse tavolette rettangolari con i margini smussati da due facce, come nella fig. 2ª, oppure in prismi per l'apparenza esagonali, come nella fig. 3ª. Ordinariamente sono geminati sempre secondo la faccia m (110) e le figure 4ª, 5ª e 6ª dànno l'aspetto di tali cristalli e sono state disegnate, per maggior chiarezza, situando la base C (001) anteriormente. La figura 4ª mostra un geminato per giustaposizione, la fig. 5ª dà lo stesso geminato per penetrazione ed in esso le due facce $\bar{1}10$ e $\underline{\bar{1}10}$, che dovrebbero risultare in un piano, si mostrano, a differenza delle altre omologhe, alquanto poliedriche. La fig. 6ª mostra un geminato doppio; in esso ad un cristallo (quello che mostra (001) allungata verticalmente) ve ne sono due, uno a destra e l'altro a sinistra con la legge di geminazione suindicata; in esso tutte le facce del prisma (110) sono doppie e poliedriche: quelle che nella figura capitano a destra ed a sinistra non si trovano in un piano, e dal calcolo risulta che le due facce $\underline{1\bar{1}0}$ e $\underline{\underline{\bar{1}10}}$ formano un angolo prominente di 0°42′0″.

Frattura vitrea, sfaldatura non osservata.

Di questa sostanza mancano i caratteri ottici, perchè il materiale avuto dalle diverse cristallizzazioni non si prestava affatto per simili ricerche.

Fluossimolibdato ammonico normale [1].

$Mo\,O_2\,Fl_2\,,\,2\,NH_4\,Fl$.

Questo sale è stato ottenuto sciogliendo il precedente composto ($Mo\,O_3\,,\,2\,NH_4\,Fl$) in acqua acidificata con acido fluoridrico.

Sistema cristallino: Ortorombico.

$$a:b:c = 0{,}84134:1:1{,}01642.$$

Facce osservate, fig. 7ª:

B	C	e	r	a	s	φ
(010)	(001)	(011)	(012)	(201)	(221)	(4.9.21)
$\infty\breve{P}\infty$	OP	$\breve{P}\infty$	$\frac{1}{2}\breve{P}\infty$	$2\bar{P}\infty$	2 P	$\frac{9}{21}\breve{P}\frac{9}{4}$.

Combinazioni osservate:

Cristalli tabulari.

C e a B s = (001) (011) (201) (010) (221) , fig. 8ª ;
C a φ e r = (001) (201) (4.9.21) (011) (012) , fig. 10ª ;
C φ e = (001) (4.9.21) (011) ;
C φ = (001) (4.9.21) , fig. 11ª ed 12ª.

Cristalli prismatici.

e a C = (011) (201) (001) ;
e a B C = (011) (201) (010) (001) ;
e a s B C = (011) (001) (221) (010) (001) , fig. 9ª.

(1) Lo studio cristallografico di questo composto è stato già pubblicato da me in una Nota riportata nei « Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, vol. II, serie 4ª, seduta del 2 maggio 1886 ». Ora lo ripresento con le modifiche ed aggiunte che sono occorse per l'esame di altri cristalli fornitimi posteriormente dal prof. Mauro.

Angoli	Calcolati	Misurati		
		medie	n.	limiti
C:a = 001:201	*	67° 31′	21	67° 17′ — 67° 52′
C:e = 001:011	*	45 28	14	45 16 — 45 39
C:r = 001:012	26° 56′ 24″,5	26 48	6	26 20 — 27 17
C:s = 001:221	72 25 38,1	72 36	2	72 28 — 72 44
B:s = 010:221	52 08 19,8	52 03	2	52 00 — 52 06
a:a′ = 201:20$\bar{1}$	44 58 00,0	44 40	2	44 33 — 44 47
e:e′ = 011:01$\bar{1}$	89 04 00,0	89 01	8	88 44 — 89 28
s:s′ = 221:22$\bar{1}$	35 08 43,8	34 54	2	34 49 — 34 59
a:e = 201:011	74 26 34,9	74 36	14	74 21 — 74 51
e:s = 011:221	49 30 54,1	49 25	10	49 01 — 49 40
a:s = 201:221	37 51 40,2	37 54	10	37 38 — 38 14
a:s′ = 201:22$\bar{1}$	56 02 31,0	55 50	9	55 34 — 56 03
C:φ = 001:4.9.21	26 13 38,3	26 22	12	25 58 — 27 01
φ:φ″ = 4.9.21:4.$\bar{9}$.21	46 00 13,7	46 20	7	45 45 — 46 48
a:φ = 201:4.9.21	57 44 20,4	57 33	1	———

I cristalli esaminati sono trasparenti e senza colore: all'aria dopo poco tempo si appannano. Essi si presentano con tre aspetti distinti; alcune volte sono tabulari, come si vede nelle fig. 8ª e 10ª e poggiano per le facce C; altre volte si presentano prismatici ed allungati nel senso dell'asse *a* per la maggior estensione relativa delle facce e (011), come si vede nella fig. 9ª e poggiano per le facce *e*; finalmente si ha un terzo tipo in forma di punta di lancia con l'angolo piano acuto di 55°41′ circa e con gli angoli ottusi arrotondati, rappresentato nella fig. 11ª in proiezione obbliqua, come le altre figure, e nella fig. 12ª in proiezione parallela a C (001). I cristalli ordinariamente misurano nella maggior dimensione da 5 a 7 mill.; ma talvolta, specialmente i tabulari, possono raggiungere la lunghezza di 18 mill.

Le specie di facce che si rinvengono quasi costantemente sono a (201) ed e (011); le facce B (010) ed s (221) sono ordinariamente molto piccole e la faccia C (001) si trova frequentemente molto estesa; ma ho osservato dei cristalli nei quali era molto piccola ed in alcuni mancava affatto. Le facce φ (4.9.21) sono talvolta molto piccole e troncano gli angoli dei cristalli tabulari (fig. 10ª), oppure si trovano, in unione soltanto delle basi, nei cristalli lanceolari (fig. 11ª ed 12ª); le facce r (012) sono state rinvenute in alcuni cristalli tabulari dove esistevano anche le facce φ.

I cristalli che hanno le forme delle fig. 8ª e 9ª si generano in soluzione acida di acido fluoridrico, quelli invece delle fig. 10ª, 11ª ed 12ª in soluzione acquosa, ed in essi solo si sono trovate le facce φ ed r.

Le immagini che si hanno dalle facce sono in generale abbastanza buone per misure goniometriche, tranne le faccette s (221) che dànno d'ordinario immagini poco nitide. Le facce φ sono sempre più o meno poliedriche; di un grandissimo numero di cristalli osservati solo pochi hanno dato per esse misure soddisfacenti. Il simbolo (4.9.21) adottato per φ è quello che più si accorda con gli angoli misurati.

Frattura vitrea. Sfaldatura non osservata.

Caratteri ottici.

Formola ottica: b $\underline{a}$ c.

Piano degli assi ottici parallelo a (100).

Bisettrice acuta negativa normale a (010).

Dispersione $\varrho > v$.

Una lamina normale alla bisettrice acuta, osservata nell'olio, diede:

per l'angolo degli assi ottici	rossi	82° 57′
" "	gialli	82 29
" "	verdi	81 50.

Una lamina normale alla bisettrice ottusa, osservata nell'olio, diede:

per l'angolo degli assi ottici	rossi	108° 31′
" "	gialli	109 46
" "	verdi	111 03.

Da questi dati si calcola:

l'angolo vero degli assi ottici	rossi	= 78° 26′
" "	gialli	= 77 44
" "	verdi	= 76 56.

È da notarsi che il fluossitungstato ammonico normale ($WO_2 Fl_2$, $2 NH_4 Fl$), come il sale ora esaminato, dà le stesse forme lanceolari in soluzione acquosa e le forme tabulari e prismatiche in soluzione acida di H Fl, come ha osservato il Marignac (1).

Mettendo a confronto le misure avute per questo sale, con quelle del fluossiniobato ammonico e del fluossitungstato ammonico, studiati dal Marignac (2), risulta l'isomorfismo di questi tre composti fra loro, avendosi per essi valori angolari corrispondenti molto vicini, come si rileva dalla seguente tabella:

	$Mo O_2 Fl_2$, $2 NH_4 Fl$.	$Nb OFl_3$, $2 NH_4 Fl$.	$WO_2 Fl_2$, $2 NH_4 Fl$.
C:a = 001:201	67° 31′	67° 25′	67° 40′
C:e = 001:011	45 28	45 10	45 08
C:r = 001:012	26 56	26 42	26 40
a:e = 201:011	74 27	74 17	74 27
C:s = 001:221	72 26	"	72 25
s:s′ = 221:2$\bar{2}$1	35 09	"	35 10

Rapporti assiali dedotti:

$Mo O_2 Fl_2$, $2 NH_4 Fl$	a:b:c = 0,84134:1:1,01642
$Nb OFl_3$, $2 NH_4 Fl$	= 0,8366 :1:1,0058
$WO_2 Fl_2$, $2 NH_4 Fl$	= 0,8258 :1:1,0047

(1) Ann. Chim. Phys. [3], **69**, 1863, pag. 64-65.

(2) Loco citato e Id. [4], **8**, 1866, pag. 37. — Vedi pure: Rammelsberg, Handb. d. krystall.-phys. Chemie, 1881, pag. 236 e 240.

Fluossimolibdato ammonico ottaedrico.

$Mo\,O_2\,Fl_2$, $NH_4\,Fl$, $(NH_4)_2\,O$.

Questo composto è stato ottenuto svaporando una soluzione ammoniacale di fluossimolibdato triammonico; e si ottiene anche in unione del dimolibdato ammonico e spesse volte nell'acqua madre del composto $Mo\,O_3$, $2\,NH_4\,Fl$.

Sistema cristallino: Cubico.

Forme osservate: (111) e (100).

I cristalli si presentano in forma di ottaedri regolari sia semplici che in unione delle facce del cubo sempre subordinate. Essi sono sempre molto piccoli, trasparenti, senza colore e con splendore vitreo vivace. Al microscopio polarizzante si presentano completamente isotropi.

Dimolibdato ammonico.

$2\,Mo\,O_3$, $(NH_4)_2\,O$, $H_2\,O$.

Questo composto si ottiene per cristallizzazione svaporando all'aria libera una soluzione di ($Mo\,O_3$, $2\,NH_4\,Fl$) nell'ammoniaca.

Sistema cristallino: Monoclino.

$$a:b:c = 0{,}96628:1:0{,}94497$$
$$\beta = 72°47'41''.$$

Facce osservate, fig. 13ª:

A	B	C	o	r	m	n
100	010	001	011	$10\bar{1}$	111	$\bar{1}11$
∞ Ꝑ ∞	∞ Ꝑ ∞	OP	Ꝑ ∞	Ꝑ ∞	— P	P

Combinazioni osservate:

n m C = ($\bar{1}11$) (111) (001);

n m C o = ($\bar{1}11$) (111) (001) (011), fig. 14ª, 15ª, 16ª e 17ª;

n m C o A r = ($\bar{1}11$) (111) (001) (011) (100) ($10\bar{1}$), fig. 18ª;

n m C o A B r = ($\bar{1}11$) (111) (001) (011) (100) (010) ($10\bar{1}$).

Angoli	Calcolati	Misurati		
		medie	n.	limiti
C:A = 001:100	72° 47′ 41″,0	72° 32′	1	———
C:r′ = 001:$\bar{1}$01	52 44 11,1	52 46	1	———
A:r = 100:10$\bar{1}$	54 28 07,9	54 30	1	———
C:m = 001:111	*	45 13	15	45° 06′ — 45° 21′
m:n = 111:11$\bar{1}$	73 28 00,0	73 29	21	73 07 — 73 40
C:n″ = 001:$\bar{1}$11	*	61 19	19	61 13 — 61 30
C:o = 001:011	42 04 19,8	42 04	13	41 56 — 42 22
B:o = 010:011	47 55 40,2	48 00	2	47 59 — 48 01
A:m = 100:111	45 53 50,7	45 56	1	———
A:n = 100:11$\bar{1}$	62 34 09,3	62 51	2	62 50 — 62 52
m:n″ = 111:$\bar{1}$11	*	71 32	20	71 17 — 71 71

Angoli	Calcolati	Misurati		
		medie	n.	limiti
$m:o = 111:011$	31° 25′ 07″,7	31° 13′	8	31° 02′ — 31° 30′
$o:n'' = 011:\bar{1}11$	40 06 52,3	40 23	13	40 02 — 40 42
$m:m' = 111:1\bar{1}1$	59 06 11,9	59 12	9	59 02 — 59 18
$B:m = 010:111$	60 26 54,1	60 39	3	60 32 — 60 43
$n:n' = 11\bar{1}:1\bar{1}\bar{1}$	75 07 19,9	75 16	14	75 03 — 75 29
$B:n = 010:11\bar{1}$	52 26 26,0	52 14	1	———
$r:n = 10\bar{1}:11\bar{1}$	37 33 40,0	37 43	1	———
$m:r = 111:10\bar{1}$	91 09 37,4	91 13	2	91 10 — 91 16
$o:n = 011:11\bar{1}$	87 00 29,1	87 05	10	86 50 — 87 29

I cristalli esaminati sono trasparenti e senza colore, con splendore vitreo; all'aria dopo alcuni giorni, si appannano e finiscono per divenire affatto opachi. Essi si presentano in tavolette poligonali più o meno grosse per la estensione prevalente di una coppia delle facce $n(\bar{1}11)$. In questo caso, che è il più frequente, i cristalli si presentano spesso molto sfigurati e quasi sempre assumono l'aspetto di cristalli triclini, come facilmente può scorgersi dalle fig. 16ª, 17ª e 18ª, che rappresentano alcuni dei tipi più importanti. Meno comunemente si hanno cristalli piramidali formati dalle due specie di emipiramidi $m(111)$ ed $n(\bar{1}11)$ e dalla base $C(001)$, talvolta anche in unione col clinodoma $o(011)$, sempre poco esteso, come si vede nella fig. 14ª in proiezione obbliqua e nella fig. 15ª in proiezione sul piano di simmetria. In questo caso i cristalli sono in generale poco sfigurati.

Le specie di facce che si rinvengono ordinariamente sono le due specie di emipiramidi: $n(\bar{1}11)$ sempre prevalente, $m(111)$ sempre subordinata e la base $C(001)$ e non di rado si mostra anche il clinodoma $o(011)$ sempre pochissimo esteso. Le altre specie di facce, cioè: $A(100)$, $B(010)$ ed $r(10\bar{1})$ sono rare a rinvenirsi e si mostrano sempre come troncature appena visibili.

Le facce si prestano quasi sempre molto bene alle misure goniometriche.

Frattura vitrea. Sfaldatura non osservata.

Lo studio ottico non ha potuto farsi perchè i cristalli per la loro alterabilità non si prestavano ad esser ridotti in lamine a ciò adatte.

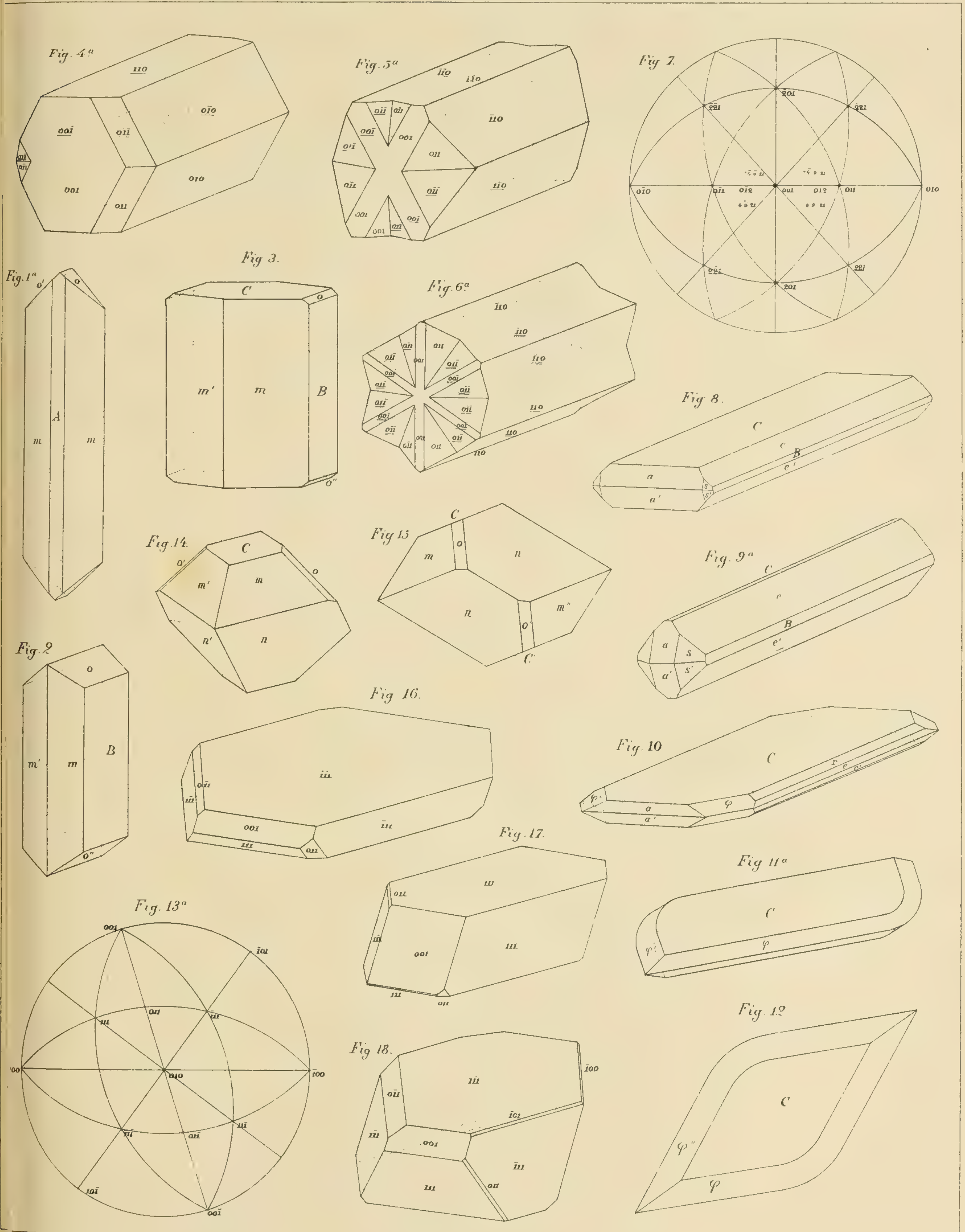


Fig. 4ª
Fig. 5ª
Fig. 7
Fig. 1ª
Fig. 3.
Fig. 6ª
Fig. 8.
Fig. 14.
Fig. 15
Fig. 9ª
Fig. 2
Fig. 16.
Fig. 10
Fig. 17.
Fig. 11ª
Fig. 13ª
Fig. 18.
Fig. 12

Nuove ricerche sui fluossimolibdati ammonici. Dimolibdato ammonico.

Memoria del prof. FRANCESCO MAURO

Delafontaine (1), nella classica Memoria sui molibdati e fluossimolibdati, dice di aver ottenuto due fluossimolibdati ammonici, uno neutro con una molecola d'acqua di cristallizzazione ($Mo\,O_2\,Fl_2$, $2\,NH_4\,Fl$, H_2O), e l'altro acido ($Mo\,O_2\,Fl_2$, $NH_4\,Fl$, H_2O). Dallo studio cristallografico, fatto dal Marignac (2), viene alla conclusione che il primo sale è isomorfo al corrispondente composto potassico ($Mo\,O_2\,Fl_2$, $2\,K\,Fl$, H_2O) ed il secondo isomorfo al fluossitungstato acido di ammonio ($WO_2\,Fl_2$, $NH_4\,Fl$, H_2O). Egli per stabilire la composizione chimica dei detti sali si è limitato a valutare solamente il molibdeno, senza poi pubblicare i risultati delle analisi.

Io per preparare alcuni fluossiipomolibdati (3) ho avuto bisogno del fluossimolibdato ammonico neutro che, per quanti tentativi abbia fatto, non mi è riuscito poter ottenere, secondo dice Delafontaine, *con una molecola d'acqua di cristallizzazione*. Stando così la cosa, ho creduto utile, per la storia del molibdeno, rifare lo studio chimico dei fluossimolibdati ammonici (4), i cui risultati formano l'oggetto della presente Memoria.

L'analisi quantitativa dei diversi composti che m'è stato possibile ottenere è stata eseguita nella maniera seguente:

Il molibdeno è stato determinato sotto la forma di anidride molibdica, attaccando con acido solforico un peso determinato di sostanza allo scopo di scacciare l'acido fluoridrico; l'acido solforico eccedente è stato svaporato a bagno d'aria. Il residuo calcinato al rosso incipiente, con l'aggiunta di carbonato ammonico, è stato pesato.

Il molibdeno è stato anche determinato con esattezza riscaldando a bagno d'aria per diverse ore e gradatamente i diversi composti ottenuti; tutto il molibdeno rimane allora allo stato di anidride molibdica, che si pesa.

Il fluoro è stato determinato col metodo di Penfield (Chem. News, XXXIX, 179) cioè trattando la sostanza con acido solforico concentrato, in presenza di silice, e facendo assorbire il fluoruro di silicio, che si svolge, da una soluzione idro-alcoolica di cloruro potassico; si ottiene fluosilicato potassico ed acido cloridrico libero che ho determinato con una soluzione di ammoniaca $\frac{N}{10}$, servendomi come indicatore dell'alizarina.

(1) Arch. des sciences physiques et naturelles de Genève, t. XXX, 1867.

(2) Memoria citata.

(3) F. Mauro e R. Panebianco, Gazzetta chimica 20 maggio 1882, pag. 180.

(4) Lo studio cristallografico dei diversi composti ottenuti è stato fatto dal prof. Eugenio Scacchi.

Fluossimolibdato triammonico.
$Mo\,O_2\,Fl_2\,,\,3\,NH_4\,Fl.$

Si ottiene in cristalli quando si evapora a bagno maria una soluzione di molibdato ammonico ordinario sciolto in una soluzione di fluoruro di ammonio acidificata con acido fluoridrico; il fluoruro di ammonio deve trovarsi in eccesso. Questo composto si presenta in cristalli prismatici appartenenti al sistema ortorombico; la loro grossezza varia da $\frac{1}{6}$ a $\frac{1}{8}$ mm. e la lunghezza da 2 a 3 mm. Sono trasparenti, senza colore e con splendore vitreo. I cristalli studiati da E. Scacchi presentano le facce (100), (010), (110), (011) ed hanno i seguenti valori angolari $100:110 = 28°36'$; $010:110 = 61°24'$; $011:0\bar{1}1 = 82°29'$; $011:110 = 71°36'$. Rapporto assiale: $a:b:c = 0{,}5452:1:0{,}8767$. Quindi questo composto non somiglia punto, per la sua forma cristallina, ad altri che hanno composizione analoga e lo stesso numero di atomi, ma che cristallizzano nel sistema monometrico in cubi od ottaedri (p. es. $Zr\,Fl_4\,.\,3\,N\,H_4\,Fl$, $Nb\,O\,Fl_3\,.\,3\,N\,H_4\,Fl$, $Ta\,O\,Fl_3\,.\,3\,N\,H_4\,Fl$, $Ti\,O_2\,Fl_2\,.\,3\,N\,H_4\,Fl$).

Questa sostanza si scioglie nell'acqua, la quale acquista reazione acida. A 100° non si altera; riscaldata invece a bagno d'aria si decompone sviluppando fumi bianchi e lasciando infine un residuo di anidride molibdica. La composizione chimica risponde alla formola:

$$Mo\,O_2\,Fl_2\,,\,3\,NH_4\,Fl.$$

Infatti all'analisi si sono ottenuti i seguenti risultati.

Molibdeno.

1. Sostanza g. 0,9272 ha dato 0,4840 di $Mo\,O_3$ da cui si calcola 0,3227 di Mo e per cento **34,80**.
2. g. 1,6870 dettero 0,8806 di $Mo\,O_3$, ossia 0,5870 di Mo e per cento **34,80**.
3. g. 1,4750 dettero 0,7730 di $Mo\,O_3$, ossia 0,51535 di Mo e per cento **34,94**.

Ammonio.

1. g. 1,1156 dettero 0,6416 di $NH_4\,Cl$, ossia 0,2159 di NH_4 e per cento **19,34**.
2. g. 1,0262 dettero 0,5962 di $NH_4\,Cl$, ossia 0,2005 di NH_4 e per cento **19,55**.
3. g. 1,0264 dettero 0,5890 di $NH_4\,Cl$, ossia 0,1982 di NH_4 e per cento **19,37**.

Fluoro.

1. g. 0,6174; ammoniaca $\frac{N}{10}$ cc. 35,3, da cui si calcola 0,20121 di fluoro e per cento **32,59**.
2. g. 1,0866; ammoniaca $\frac{N}{10}$ consumata cc. 63, da cui si calcola 0,3591 di fluoro e per cento **33,05**.
3. g. 0,8186; ammoniaca $\frac{N}{10}$ consumata cc. 47,3, da cui si ha 0,2696 di fluoro e per cento **32,94**.

In questo composto non vi è acqua come si può dimostrare calcinandone un peso determinato con ossido di magnesio. Infatti: g. 0,3442 hanno perduto g. 0,0986 e per cento **28,64** (Teoria 28,15).

Riunisco nel prospetto seguente le medie dei risultati ottenuti, comparate con le quantità calcolate.

		calcolato	trovato
Mo	96	34,66	34,85
2 O	32	11,55	"
5 Fl	95	34,30	32,86
3 NH_4	54	19,49	19,42
$Mo\,O_2\,Fl_2 \,.\, 3\,NH_4\,Fl$	277	100,00	

Composto di anidride molibdica e fluoruro di ammonio. $Mo\,O_3 \,.\, 2\,NH_4\,Fl$.

Questo composto si ottiene facilmente per precipitazione aggiungendo ammoniaca alla soluzione del fluossimolibdato triammonico: il precipitato che si ha è bianco, polveroso, al microscopio si presenta cristallino. Per avere cristalli misurabili ho sciolto il detto precipitato a caldo in una soluzione di fluoruro di ammonio ed ammoniaca; per evaporazione all'aria libera o sull'acido solforico si depongono dapprima cristalli prismatici di $Mo\,O_3$, $2\,NH_4\,Fl$ e poi cristalli ottaedrici di $Mo\,O_2\,Fl_2$, $NH_4\,Fl$, $(NH_4)_2\,O$ in piccola quantità. Se si scioglie invece il precipitato nell'ammoniaca, dalla soluzione, per l'evaporazione spontanea, si depongono prima cristalli monoclini di dimolibdato ammonico idrato ($2\,Mo\,O_3$, $(NH_4)_2\,O$, $H_2\,O$), del quale terrò discorso alla fine di questa Memoria, e poi si presentano cristalli prismatici insieme a degli ottaedri. Spesse volte si formano cristalli prismatici anche nel liquido da cui si era separato il precipitato prodotto dall'ammoniaca.

I cristalli del composto di cui si parla hanno la forma di tavolette rettangolari con due zone rombiche, raramente sono semplici, quasi sempre geminati e tanto in un caso come nell'altro prendono spesse volte l'aspetto dell'aragonite di Bilin; i geminati si presentano come prismi esagonali. Essi sono trasparenti, leggermente giallicci con lucentezza vitreo-adamantina.

« Sistema ortorombico; $a:b:c = 0{,}57464:1:0{,}67705$; facce osservate (010); « (001); (110); (011). Angoli calcolati: $110:1\bar{1}0 = 59°46'$; $010:110 = 60°7'$; « $010:011 = 55°54'$; $001:011 = 34°06'$; $110:011 = 73°47'$. Piano di geminazione: « (110). (E. Scacchi) ».

Questo composto con l'acqua si decompone; riscaldato a 100° non si altera affatto; a bagno d'aria sfuma il fluoruro d'ammonio e rimane come residuo anidride molibdica.

Analisi della polvere cristallina.

Molibdeno.

1. g. 1,0302 dettero 0,6768 di $Mo\,O_3$, ossia 0,4512 di Mo e per cento **43,80.**
2. g. 1,0172 dettero 0,6752 di $Mo\,O_3$, ossia 0,4502 di Mo e per cento **44,27.**
3. g. 1,3017 dettero 0,8671 di $Mo\,O_3$, ossia 0,5781 di Mo e per cento **44,41.**
4. g. 1,2470 dettero 0,8266 di $Mo\,O_3$, ossia 0,5511 di Mo e per cento **44,19.**

Ammonio.

1. g. 0,8270 dettero 0,3926 di $NH_4\,Cl$, ossia 0,1321 di NH_4 e per cento **15,97.**
2. g. 0,8502 dettero 0,4026 di $NH_4\,Cl$, ossia 0,1355 di NH_4 e per cento **15,93.**

Fluoro.

1. g. 0,5326; ammoniaca $\frac{N}{10}$ consumata cc. 15,7, da cui si calcola 0,0895 di fluoro e per cento **16,80**.
2. g. 0,7794; ammoniaca $\frac{N}{10}$ consumata cc. 24,7, da cui si calcola 0,1408 di fluoro e per cento **18,07**.
3. g. 0,6430; ammoniaca $\frac{N}{10}$ consumata cc. 19,7 da cui si calcola 0,1123 di fluoro e per cento **17,46**.

Analisi dei cristalli.

Molibdeno.

1. g. 0,6870 dettero 0,4546 di $Mo\,O_3$, ossia 0,3031 di Mo e per cento **44,12**.
2. g. 0,7938 dettero 0,5288 di $Mo\,O_3$, ossia 0,3526 di Mo e per cento **44,41**.

Ammonio.

1. g. 0,5864 dettero 0,2872 di $NH_4\,Cl$, ossia 0,0966 di NH_4 e per cento **16,47**.
2. g. 0,9878 dettero 0,4764 di $NH_4\,Cl$, ossia 0,1603 di NH_4 e per cento **16,22**.

Fluoro.

1. g. 0,7292; ammoniaca $\frac{N}{10}$ consumata cc. 21,2 da cui si calcola 0,1209 di fluoro e per cento **16,58**.

In questo composto non esiste acqua come viene dimostrato dalla seguente analisi. Grammi 0,2608 di sostanza, perdita dopo calcinazione con ossido di magnesio 0,0642 e per cento **24,63** (Teoria 24,73).

I risultati dell'analisi conducono alla formola

$$Mo\,O_3\,,\,2\,NH_4\,Fl$$

come si vede nel seguente specchietto.

		calcolato	trovato (polvere cristallina)	trovato (cristalli)
Mo	96	44,04	44,17	44,26
3 O	48	22,02	"	"
2 Fl	38	17,43	17,44	16,58
2 NH_4	36	16,51	15,95	16,34
$Mo\,O_3\,.\,2\,NH_4\,Fl$	218	100,00		

Fluossimolibdato ammonico normale.
$Mo\,O_2\,Fl_2\,,\,2\,NH_4\,Fl$.

Questo sale si ottiene in cristalli svaporando spontaneamente una soluzione acquosa, acida di acido fluoridrico, del composto $Mo\,O_3\,,\,2\,NH_4\,Fl$. Esso si presenta in cristalli trasparenti, senza colore, con forte splendore vitreo, i quali all'aria si appannano. I cristalli sono sempre abbastanza grandi; si ottengono delle tavolette rettangolari lunghe sino a 18 mm. larghe 17 e spesse 4 $\frac{1}{2}$. Hanno la forma di tavolette rettangolari, forma prismatica o prismi aciculari; le dette forme si generano nelle soluzioni acide di acido

fluoridrico. Faccio osservare che anche il fluossitungstato ammonico normale si presenta nello stesso modo quando si fa cristallizzare in presenza dell'acido fluoridrico ([1]).

« Sistema ortorombico: a:b:c = 0,8413:1:1,0164; facce osservate: (010); (001); « (011); (201); (221). Angoli calcolati: 001:201 = 67°31′; 001:011 = 45°28′; « 001:221 = 72°26′; 010:221 = 52°08′; 201:011 = 74°27′; 011:221 = 49°31′; « 201:221 = 37°52′. (E. Scacchi) ».

È molto solubile nell'acqua e dalla soluzione per concentrazione si producono cristalli in forma tabulare con gli angoli troncati da facce di piramidi con superficie curva; le facce curve alcune volte sono estese grandemente in modo da trovarsi in unione della sola base ed in tal caso i cristalli prendono la forma di punta di lancia con contorno alquanto curvo. Questa forma cristallina è identica a quella che prende il fluossitungstato ammonico normale quando si fa cristallizzare in una soluzione acquosa.

Dallo studio cristallografico risulta il perfetto isomorfismo di questo sale col fluossitungstato e fluossiniobato di ammònio, come ci dimostra la seguente tabella:

	$MoO_2Fl_2, 2NH_4Fl$	$NbOFl_3, 2NH_4Fl$	$WO_2Fl_2, 2NH_4Fl$
001:201	67° 31′	67° 25′	67° 40′
001:011	45 28	45 10	45 08
001:012	26 56	26 42	26 40
201:011	74 27	74 17	74 27
001:221	72 26	»	72 25

Rapporti assiali dedotti:

$MoO_2Fl_2, 2NH_4Fl$ a:b:c = 0,8413:1:1,0164
$NbOFl_3, 2NH_4Fl$ = 0,8366:1:1,0058
$WO_2Fl_2, 2NH_4Fl$ = 0,8258:1:1,0047

E. Scacchi.

Questo composto, riscaldato a 100° non perde di peso; a bagno d'aria si decompone, si volatilizza fluoruro di ammonio, si svolge acido fluoridrico per l'azione dell'umidità dell'aria atmosferica e rimane come residuo tutto il molibdeno sotto forma di anidride molibdica.

Questo sale all'analisi ha dato i seguenti risultati:

Molibdeno.

1. g. 1,6350 dettero 0,9802 di MoO_3, ossia 0,6534 di Mo e per cento **39,96.**
2. g. 0,5172 dettero 0,3108 di MoO_3, ossia 0,2072 di Mo e per cento **40,06.**
3. g. 0,9628 dettero 0,5776 di MoO_3, ossia 0,3851 di Mo e per cento **39,99.**
4. g. 0,5494 dettero 0,3294 di MoO_3, ossia 0,2196 di Mo e per cento **39,96.**

Ammonio.

1. g. 1,1880 dettero 0,5336 di NH_4Cl, ossia 0,1795 di NH_4 e per cento **15,11.**
2. g. 1,1484 dettero 0,5170 di NH_4Cl, ossia 0,1739 di NH_4 e per cento **15,14.**
3. g. 0,7386 dettero 0,3276 di NH_4Cl, ossia 0,1102 di NH_4 e per cento **14,92.**

([1]) Vedi Marignac C., Ann. Chim. Phys. [3], **69**, 1863, pag. 64-65.

Fluoro.

1. g. 1,1040; ammoniaca $\frac{N}{10}$ consumata cc. 60,7, da cui si calcola 0,3460 di fluoro e per cento **31,33.**
2. g. 0,4134; ammoniaca $\frac{N}{10}$ consumata cc. 22,7, da cui si calcola 0,1294 di fluoro e per cento **31,29.**
3. g. 0,4460; ammoniaca $\frac{N}{10}$ consumata cc. 24,2, da cui si calcola 0,1379 di fluoro e per cento **30,92.**

Il fluoro è stato anche determinato indirettamente calcinando la sostanza con ossido di magnesio e non con ossido di calcio, adoperato dal Marignac in casi analoghi ([1]). Ecco i risultati ottenuti.

g. 0,5630; perdita di peso dopo la calcinazione 0,1250 e per cento 22,20, da cui si calcola di fluoro **30,55.**

Da tutti i numeri ottenuti risulta che questo sale ha per formola

$$Mo\,O_2\,Fl_2\,,\,2\,NH_4\,Fl$$

come si vede chiaramente nel seguente prospetto.

		calcolato	trovato
Mo	96	40,00	39,99
2 O	32	13,33	"
4 Fl	76	31,67	31,02
2 NH_4	36	15,00	15,06
$Mo\,O_2\,Fl_2\,,\,2\,NH_4\,Fl$	240	100,00	

Fluossimolibdato di ammonio con molibdato di ammonio.

$$2\,(Mo\,O_2\,Fl_2\,,\,N\,H_4\,Fl\,,\,(N\,H_4)_2\,O) = Mo\,O_2\,Fl_2\,.\,4\,N\,H_4\,Fl\,,\,(N\,H_4)_2\,Mo\,O_4\,.$$

([2]). Si depone anche, come ho detto innanzi, in cristalli in unione del dimolibdato ammonico da una soluzione ammoniacale di $Mo\,O_3$, 2 NH_4 Fl, e spesse volte dall'acqua madre del composto $Mo\,O_3$, 2 NH_4 Fl.

Questo sale si presenta in piccoli cristalli ottaedrici e raramente in cubo-ottaedri. Essi sono trasparenti, senza colore, con forte splendore vitreo; lasciati all'aria libera, dopo molti giorni, diventano opachi e verdastri; la forma cristallina è identica a quella del fluossitungstato di ammonio con tungstato di ammonio $2(WO_2\,Fl_2\,,\,NH_4\,Fl\,,\,(NH_4)_2\,O) = WO_2\,Fl_2\,,\,4\,NH_4\,Fl\,.\,(NH_4)_2\,WO_4$.

Si scioglie nell'acqua e, per svaporamento spontaneo, non si ha più lo stesso composto. Sotto l'azione del calore a 100° non si altera affatto; a bagno d'aria si decompone, rimanendo tutto il molibdeno allo stato di anidride molibdica.

I risultati analitici ottenuti sono i seguenti.

Molibdeno.

1. g. 0,9586 dettero 0,5349 di $Mo\,O_3$, ossia 0,3566 di Mo e per cento **37,21.**
2. g. 0,7444 dettero 0,4244 di $Mo\,O_3$, ossia 0,2829 di Mo e per cento **38,01.**
3. g. 0,9598 dettero 0,5360 di $Mo\,O_3$, ossia 0,3573 di Mo e per cento **37,12.**

([1]) Ann. Chim. Phys. VIII (4), 38.

([2]) Questo sale si ottiene in cristalli svaporando, o sull'acido solforico o all'aria libera, una soluzione ammoniacale di fluossimolibdato triammonico.

Ammonio.

1. g. 1,0294 dettero 0,6480 di NH_4Cl, ossia 0,2190 di NH_4 e per cento **21,27.**
2. g. 0,5568 dettero 0,3470 di NH_4Cl, ossia 0,1167 di NH_4 e per cento **20,95.**
3. g. 0,6474 dettero 0,4060 di NH_4Cl, ossia 0,1345 di NH_4 e per cento **20,77.**

Fluoro.

1. g. 1,0428; ammoniaca $\frac{N}{10}$ consumata cc. 38,60 da cui si calcola 0,2199 di fluoro e per cento **21,09.**

La formola più semplice di questa sostanza è la seguente:

$$MoO_2Fl_2, NH_4Fl, (NH_4)_2O.$$

come si vede dalla seguente tabella:

		calcolato	trovato
Mo	96	37,65	37,45
3 O	48	18,82	"
3 Fl	57	22,35	21,09
3 NH_4	54	21,18	21,00
$MoO_2Fl_2, NH_4Fl, (NH_4)_2O$	255	100,00	

Dimolibdato ammonico.

$$2MoO_3, (NH_4)_2O, H_2O.$$

Il dimolibdato ammonico si ha per cristallizzazione sciogliendo $MoO_3, 2NH_4Fl$ nell'ammoniaca. Per avere cristalli misurabili e grandi abbastanza è bene di lasciare a sè la soluzione. I cristalli sono trasparenti, senza colore, con splendore vitreo, frattura irregolare, e lasciati all'aria lungamente si appannano. Appartengono al sistema monoclino e si presentano in forma piramidale e frequentemente in tavolette poligonali con spessore rilevante; quando sono in tavolette ordinariamente sono sfigurati ed hanno l'aspetto di cristalli triclini.

« Sistema monoclino; a:b:c = 0,99628:1:0,94497, $\beta = 72°47'41''$; facce osservate: (100), (010), (001), (011), $(10\bar{1})$, (111), $(\bar{1}11)$. Angoli calcolati: « 001:100 = 72°48'; $001:\bar{1}01$ = 52°44'; $100:10\bar{1}$ = 54°28'; 001:111 = 45°13'; « $111:11\bar{1}$ = 73°28'; $001:\bar{1}11$ = 61°19'; 001:011 = 42°04'; 100:111 = 45°54'; « $100:11\bar{1}$ = 62°34'; $111:\bar{1}11$ = 71°32'; 111:011 = 31°25'; $011:\bar{1}11$ = 40°07'; « $111:1\bar{1}1$ = 59°06'. (E. Scacchi) ».

Riscaldato a 100° per diverse ore ha perduto circa 4 per cento di peso; a bagno d'aria se ne va l'acqua e l'ammoniaca e rimane anidride molibdica.

I risultati avuti dall'analisi sono i seguenti:

Anidride molibdica.

1. g. 0,7952 dettero 0,6380 di MoO_3, ossia per cento **80,23.**
2. g. 0,8500 dettero 0,6840 di MoO_3, ossia per cento **80,47.**
3. g. 1,4440 dettero 1,1640 di MoO_3, ossia per cento **80,61.**
4. g. 0,4652 dettero 0,3746 di MoO_3, ossia per cento **80,52.**

Ossido di ammonio.

1. g. 0,9764 dettero 0,2932 di $NH_4\,Cl$, ossia 0,1492 di $(NH_4)_2\,O$ e per cento **14,59.**
2. g. 0,9106 dettero 0,2774 di $NH_4\,Cl$, ossia 0,1348 di $(NH_4)_2\,O$ e per cento **14,69.**

Dai risultati suesposti risulta che questo sale ha questa composizione:

$$2\,Mo\,O_3\,,\,(NH_4)_2\,O\,,\,H_2\,O\,,$$

		calcolato	trovato
$2\,Mo\,O_3$	288	80,45	80,46
$(NH_4)_2\,O$	52	14,52	14,64
$H_2\,O$	18	5,03	"
$2\,Mo\,O_3\,,\,(NH_4)_2\,O\,,\,H_2\,O$	358	100,00	

Per completare queste ricerche mi resta ancora a descrivere i due composti che si hanno per l'azione dell'acido fluoridrico sul fluossimolibdato ammonico normale, uno dei quali, da una sola analisi fatta, risulterebbe avere questa formola: $Mo\,O_2\,Fl_2\,,\,NH_4\,Fl$; e ciò farò subito che saranno terminate le analisi e lo studio cristallografico affidato al mio amico Eugenio Scacchi [1].

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica della R. Scuola di applicazione per gl'Ingegneri in Napoli.

Studio cristallografico dei fluossiipomolibdati. Fluossiipomolibdati di potassio e di ammonio.

Memoria di EUGENIO SCACCHI

(Con una tavola)

Questi composti sono stati ottenuti per la prima volta dal prof. Francesco Mauro, il quale ha voluto affidarne a me lo studio cristallografico.

Fluossiipomolibdato potassico.

$Mo\,O\,Fl_3\,,\,2\,K\,Fl\,,\,H_2\,O$.

Questo sale è stato ottenuto con diversi metodi. 1° Versando il pentacloruro di molibdeno in una soluzione di fluoridrato potassico. 2° Dal biossido di molibdeno idrato sciolto nell'acido fluoridrico ed aggiungendo alla soluzione fluoridrato potassico. 3° Riducendo con la corrente elettrica il fluossimolibdato potassico normale ($Mo\,O_2\,Fl_2$ $2\,K\,Fl\,,\,H_2\,O$) sciolto nell'acido fluoridrico diluito.

Sistema cristallino: Monoclino.

$$a:b:c = 0,99975:1:1,03200$$
$$\beta = 80°56'27'',05.$$

Facce osservate, (fig. 1ª):

A	B	C	k	d	o	m	v	p
(100)	(010)	(001)	(10$\bar{1}$)	(021)	(111)	(110)	(11$\bar{1}$)	(11$\bar{2}$)
∞ Ꝑ ∞	∞ Ᵽ ∞	OP	+ Ꝑ ∞	2 Ᵽ ∞	— P	∞ P	P	½ P.

Principali combinazioni osservate:

C A k B d = (001) (100) (10$\bar{1}$) (010) (021), fig. 2ª;
C m v B d = (001) (110) (11$\bar{1}$) (010) (021), fig. 3ª;
C o v B d = (001) (111) (11$\bar{1}$) (010) (021);
C A k d o v = (001) (100) (10$\bar{1}$) (021) (111) (11$\bar{1}$);
C B A k m v = (001) (010) (100) (10$\bar{1}$) (110) (11$\bar{1}$);
C A k d B m o = (001) (100) (10$\bar{1}$) (021) (010) (110) (111);
C k d B o v p = (001) (10$\bar{1}$) (021) (010) (111) (11$\bar{1}$) (11$\bar{2}$);
C A k d B m v p = (001) (100) (10$\bar{1}$) (021) (010) (110) (11$\bar{1}$) (11$\bar{2}$);
C A k d B o m v p = (001) (100) (10$\bar{1}$) (021) (010) (111) (110) (11$\bar{1}$) (11$\bar{2}$), fig. 4ª.

Angoli	Calcolati	Misurati		
		medie	n.	limiti
C : A = 001 : 100	80° 56′ 27″,1	80° 52′	2	80° 45′ — 80° 59′
C : k = 001 : 10$\bar{1}$	129 24 17,0	129 29	3	129 15 — 129 43
C : d = 001 : 021	*	63 52	6	63 37 — 64 07
C : o = 001 : 111	51 06 48,8	50 57	5	50 28 — 51 22
C : m = 001 : 110	*	83 34	7	83 24 — 83 48
C : v = 001 : 11$\bar{1}$	120 09 22,7	120 12	3	120 02 — 120 20
C : p = 001 : 11$\bar{2}$	141 53 12,6	141 37	5	141 17 — 142 04
m : m′ = 110 : 1$\bar{1}$0	*	89 16	5	89 04 — 89 20
B : m = 010 : 110	45 22 00,0	45 24	2	45 21 — 45 27

I cristalli sono trasparenti e di color celeste, ordinariamente piccoli; si presentano sempre in lamine con contorno rettangolare, esagonale o ottangolare, sempre molto sottili e le figure corrispondenti sono state esagerate nella spessezza per mostrare più chiaramente le facce che circondano la base. I cristalli che si presentano meno ricchi in facce sono quelli provenienti da una soluzione con molto acido fluoridrico; quelli invece più ricchi in facce, come le ultime quattro combinazioni summenzionate, da una soluzione con poco acido fluoridrico oppure sono stati ottenuti per elettrolisi.

La faccia C (001) è quella che si trova costantemente e sempre predominante; le facce A (100), B (010) e d (021) sono molto frequenti; rare poi sono le facce o (111) e v (11$\bar{1}$). Le facce che si rinvengono più raramente sogliono talvolta non trovarsi in numero completo.

Le facce C (001) ed m (110) sono quelle che dànno al goniometro le immagini più nitide, le altre dànno immagini ordinariamente poco nette e talvolta con leggiere ondulazioni. Di un gran numero di cristalli esaminati solo pochi hanno dato, per queste ultime, misure da ritenersi sicure.

Sfaldatura parallela a (010) poco distinta.

Caratteri ottici.

Piano degli assi ottici (010).

Bisettrice acuta negativa quasi normale a (001).

Dispersione $\varrho < v$.

Angolo apparente nell'aria degli assi ottici: 33°10′ (pel rosso), 33°41′ (pel giallo), 34°10′ (pel verde).

Notevole è l'isomorfismo di questo composto col fluossiniobato potassico normale ($NbOFl_3$, $2KFl$, H_2O), col fluotitanato potassico ($TiFl_4$, $2KFl$, H_2O), col fluossitungstato potassico (WO_2Fl_2, $2KFl$, H_2O) e col fluossimolibdato potassico normale

($Mo\,O_2\,Fl_2$, $2\,K\,Fl$, H_2O). Avendosi però per questi due ultimi composti, già descritti dal Marignac, dei risultati cristallografici poco sicuri, il prof. Mauro ha creduto conveniente di prepararli novellamente per rifarne lo studio cristallografico. Dopo moltissime cristallizzazioni, dalle quali si avevano sempre delle squamette madreperlacee sottilissime e senza contorno determinato, si sono ottenuti, in condizioni speciali, cristalli abbastanza buoni per poter essere esaminati, ed ecco i risultati.

Fluossimolibdato potassico normale (1).

$Mo\,O_2\,Fl_2$, $2\,K\,Fl$, H_2O.

Il Marignac ritiene che i cristalli di questo sale si debbano riferire al sistema triclino; ma dalle mie osservazioni ottiche e per le misure goniometriche debbo invece ritenerli monoclini.

Sistema cristallino: Monoclino.

$$a:b:c = 1{,}00056:1:0{,}99943$$
$$\beta = 76^\circ 31' 04'',07.$$

Facce osservate (fig. 5ª):

C	n	δ	g	k	e	ξ	l
(001)	(101)	$(15.0.\bar{2})$	$(30\bar{1})$	$(10\bar{1})$	(011)	(085)	(031)
0 P	$-$ P∞	$\frac{15}{2}$ P∞	3 P∞	P∞	P∞	$\frac{8}{5}$ P∞	3 P∞
		w	m	i	q		
		(332)	(110)	$(88\bar{1})$	$(33\bar{1})$		
		$-\frac{3}{2}$ P	∞ P	8 P	3 P		

Principali combinazioni osservate:

C e w = (001) (011) (332);
C e l w = (001) (111) (031) (332);
C e k m = (001) (011) $(10\bar{1})$ (110);
C e n k = (001) (011) (101) $(10\bar{1})$, fig. 6ª;
C e w n k = (001) (011) (332) (101) $(10\bar{1})$, fig. 7ª;
C e ξ n k w = (001) (011) (085) (101) $(10\bar{1})$ (332);
C e ξ n w m = (001) (011) (085) (101) (332) (110);
C δ g i q e = (001) $(15.0.\bar{2})$ $(30\bar{1})$ $(88\bar{1})$ $(33\bar{1})$ (011);
C e q δ g k = (001) (011) $(33\bar{1})$ $(15.0.\bar{2})$ $(30\bar{1})$ $(10\bar{1})$.

(1) Vedi in Delafontaine M., *Recherches sur plusieurs molybdates nouveaux*, ecc., Archives des Sc. phys. et nat. Nuov. période, t. XXX, 1867, pag. 241. — Vedi pure: Rammelsberg, C. Handb. d. kryst-phys. Chemie, 1881, pag. 239.

Angoli	Calcolati	Misurati		
		medie	n.	limiti
C:n = 001:101	*	38° 14′	8	38° 02′ — 38° 20′
C:δ = 001:15.0.$\bar{2}$	84° 08′ 54″,9	84 13	3	84 11 — 84 14
C:g = 001:30$\bar{1}$	95 54 15,8	96 08	2	96 02 — 96 14
C:k = 001:10$\bar{1}$	*	128 18	5	128 14 — 128 26
C:e = 001:011	*	44 11	25	44 02 — 44 20
C:ξ = 001:085	57 15 21,3	57 22	4	57 02 — 57 39
C:l = 001:031	71 04 09,8	70 40	1	———
C:w = 001:332	56 47 20,4	56 54	11	56 19 — 57 08
C:m = 001:110	80 22 51,1	79 29	2	79 25 — 79 33
C:i = 001:88$\bar{1}$	85 30 39,2	85 22	4	85 19 — 85 31
C:q = 001:33$\bar{1}$	94 10 52,4	95 35	3	95 31 — 95 38
n:e = 101:011	55 42 58,9	55 06	1	———
k:m = 10$\bar{1}$:110	63 40 44,3	64 40	1	———
k:e = 10$\bar{1}$:011	116 23 17,8	116 29	1	———
k:e′ = 10$\bar{1}$:01$\bar{1}$	63 36 42,2	63 14	1	———
w:w′ = 332:3$\bar{3}$2	72 33 57,8	72 44	6	72 40 — 72 46
w:n = 332:101	37 13 32,9	37 22	6	37 16 — 37 28
w:e = 332:011	36 22 06,1	36 28	2	36 25 — 36 31
w:e′ = 332:01$\bar{1}$	87 26 56,2	88 38	2	88 32 — 88 44
k:q = 10$\bar{1}$:33$\bar{1}$	53 14 20,8	53 04	2	53 01 — 53 08

I cristalli sono trasparenti e senza colore; all'aria dopo poco tempo si appannano e diventano infine opachi. Ordinariamente si mostrano in forma di squame madreperlacee, cristallograficamente indefinibili, e solo in soluzione con leggiero eccesso di acido fluoridrico si hanno cristalli alquanto distinti, che si presentano in forma di lamine sottilissime rettangolari o ottangolari, oppure di tavolette esagonali bislunghe. La figura 6ª, alquanto esagerata nello spessore, e la fig. 7ª mostrano le combinazioni più frequenti osservate per i due suddetti tipi di forme; tutte le altre combinazioni menzionate di sopra sono state rinvenute pochissime volte.

Le specie di facce che si mostrano più frequentemente sono: C (001), e (011), w (332), k (10$\bar{1}$) ed n (101) e di esse la prima è sempre esistente e predominante. Le altre specie si rinvengono raramente.

Le facce C, k, e, w dànno al goniometro immagini buone per le misure, le altre facce dànno immagini più o meno mediocri e talvolta appena visibili; di moltissimi cristalli esaminati solo poche misure hanno potuto ritenersi come sicure per queste ultime.

Frattura vitrea. Sfaldatura non osservata.

Caratteri ottici.

Piano degli assi ottici (010).

Bisettrice acuta positiva quasi normale a (001).

Dispersione $\varrho < v$.

Angolo apparente, nell'olio, degli assi ottici: 64°21′ (pel rosso); 64°34′ (pel giallo); 64°41′ (pel verde).

Delle facce osservate dal Marignac ve ne sono due che non ho rinvenuto nei cristalli esaminati, cioè

$$\varrho = (33\bar{2}) = \tfrac{3}{4}\mathrm{P} \qquad \text{e} \qquad \sigma = (33\bar{4}) = \tfrac{3}{2}\mathrm{P}.$$

Nel seguente quadro si trovano gli angoli calcolati e misurati da me (ritenendo i cristalli monoclini), posti a confronto con quelli misurati e calcolati da Marignac.

Angoli	E. Scacchi		Marignac	
	calcolati	misurati	calcolati	misurati
C:n = 001:101	*	38° 14′	»	»
C:δ = 001:15.0.$\bar{2}$	84° 08′ 54″,9	84 13	»	»
C:g = 001:30$\bar{1}$	95 54 15,8	96 08	P M = 96° 20′	*96° 20′
C:k = 001:10$\bar{1}$	*	128 18	»	»
C:e = 001:011	*	44 11	P $\nu^{\frac{1}{2}}$ = 44 10	45 circa
C:ξ = 001:085	57 15 21,3	57 22	»	»
C:l = 001:031	71 04 09,8	70 40	P N = 70 25	71 circa
			P $n^{\frac{1}{2}}$ = 107 39	108 circa
C:w = 001:332	56 47 20,4	56 54	P α = 57 00	*57 00
			P $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ = 57 36	57 54
C:m = 001:110	80 22 51,1	79 29	P A = 80 10	*80 10
			P ε = 81 36	»
C:i = 001:88$\bar{1}$	85 30 39,2	85 22	»	»
C:q = 001:33$\bar{1}$	94 10 52,4	95 35	»	»
C:ϱ = 001:33$\bar{2}$	107 31 14,2	»	P a = 106 51	107
			P E = 108 21	109 circa
C:σ = 001:33$\bar{4}$	128 41 24,6	»	P e = 129 02	»
n:e = 101:011	55 42 58,9	55 06	»	»
k:m = 10$\bar{1}$:110	63 40 44,3	64 40	»	»
k:e = 10$\bar{1}$:011	116 23 17,8	116 29	»	»
k:e′ = 10$\bar{1}$:01$\bar{1}$	63 36 42,2	63 14	»	»
w:w′ = 332:3$\bar{3}$2	72 33 57,8	72 44	»	»
w:n = 332:101	37 13 32,9	37 22	α $\nu^{\frac{1}{2}}$ = 36 17	*36 17
w:g = 332:30$\bar{1}$	57 51 46,5	»	α M = 122 00	*122 00
w:e = 332:011	36 22 06,1	36 28	»	»
w:σ′ = 332:$\bar{3}$34	69 26 56,7	»	α e = 69 46	»
w:e′ = 332:01$\bar{1}$	87 26 56,2	88 38	»	»
m:g = 110:30$\bar{1}$	47 27 42,5	»	A M = 132 24	132 30

Angoli	E. Scacchi		Marignac	
	calcolati	misurati	calcolati	misurati
m:ϱ′ = 110:$\bar{3}$32	87° 05′ 10″,0	»	AE = 86° 41′ a ε = 87 20	86° 30′ »
m:l = 110:031	44 27 02, 5	»	AN = 44 11	44 15
ϱ:g = 33$\bar{2}$:30$\bar{1}$	45 27 07, 5	»	aM = 134 51	134 30
ϱ:l′ = 33$\bar{2}$:03$\bar{1}$	42 38 07, 5	»	a$n^{\frac{1}{2}}$ = 42 35	42 20
k:q = 10$\bar{1}$:33$\bar{1}$	53 14 20, 8	53° 04′	»	»

Fluossitungstato potassico normale.

$WO_2\,Fl_2 , 2\,K\,Fl , H_2\,O$.

Questo sale è stato già descritto dal Marignac [1], il quale lo ha riferito con incertezza al sistema monoclino e lo ritiene isomorfo con i corrispondenti composti di titanio e di niobio [2].

Sistema cristallino: Monoclino.

$$a:b:c = 1{,}00191:1:1{,}04813$$
$$\beta = 81^\circ 13' 0''.$$

Facce osservate (fig. 8ª):

A	B	C	β	u	e	η	h	s	t	k
100	010	001	703	40$\bar{1}$	70$\bar{2}$	80$\bar{3}$	20$\bar{1}$	40$\bar{3}$	80$\bar{7}$	10$\bar{1}$
∞P̶∞	∞P̀∞	0P	—$\frac{7}{3}$P̶∞	4P̶∞	$\frac{7}{2}$P̶∞	$\frac{8}{3}$P̶∞	2P̶∞	$\frac{4}{3}$P̶∞	$\frac{8}{7}$P̶∞	P̶∞.

ν	π	d	f	τ	ω	θ	ψ	o	m	q	φ	p
075	032	021	041	092	051	071	0.15.1	111	110	33$\bar{1}$	22$\bar{3}$	11$\bar{2}$
$\frac{7}{5}$P̀∞	$\frac{3}{2}$P̀∞	2P̀∞	4P̀∞	$\frac{9}{2}$P̀∞	5P̀∞	7P̀∞	15P̀∞	—P	∞P	3P	$\frac{2}{3}$P	$\frac{1}{2}$P.

Principali combinazioni osservate:

Cristalli prismatici.

C A k B m = (001) (100) (10$\bar{1}$) (010) (110);
C A k B d m = (001) (100) (10$\bar{1}$) (010) (021) (110), fig. 9ª;
C A u t B π d ω m = (001) (100) (40$\bar{1}$) (80$\bar{7}$) (010) (032) (021) (051) (110), fig. 10ª.

Cristalli laminari.

C A u B f m = (001) (100) (40$\bar{1}$) (010) (041) (110);
C A u B d m = (001) (100) (40$\bar{1}$) (010) (021) (110), fig. 11ª;
C A s B d m φ = (001) (100) (40$\bar{3}$) (010) (021) (110) (22$\bar{3}$);

(1) Ann. Chim. Phys. [3] **69**, 1863, pag. 70 e 71.
(2) Id. [4], **8**, 1866, pag. 26 e 27.

C u s B f ψ m = (001) (40$\bar{1}$) (40$\bar{3}$) (010) (041) (0.15.1) (110) ;
C A u η h B q = (001) (100) (40$\bar{1}$) (80$\bar{3}$) (20$\bar{1}$) (010) (33$\bar{1}$) ;
C A s B ω m o = (001) (100) (40$\bar{3}$) (010) (051) (110) (111) ;
C A u ε η B f m = (001) (100) (40$\bar{1}$) (70$\bar{2}$) (80$\bar{3}$) (010) (041) (110) ;
C β A u η B ω m p = (001) (703) (100) (40$\bar{1}$) (80$\bar{3}$) (010) (051) (110) (11$\bar{2}$), fig. 12ª ;
C A s t B ν τ θ m p = (001) (100) (40$\bar{3}$) (80$\bar{7}$) (010) (075) (092) (071) (110) (11$\bar{2}$) .

Angoli	Calcolati	Misurati		
		medie	n.	limiti
C:β = 001:703	60° 21′ 29″,6	60° 26′	2	60° 20′ — 60° 32′
C:A = 001:100	*	81 13	16	80 53 — 81 28
C:u = 001:40$\bar{1}$	94 59 21,6	94 58	8	94 37 — 95 17
C:ε = 001:70$\bar{2}$	96 56 49,1	97 01	1	———
C:η = 001:80$\bar{3}$	101 45 40,7	101 50	2	101 42 — 101 58
C:h = 001:20$\bar{1}$	108 13 01,2	108 05	1	———
C:s = 001:40$\bar{3}$	119 43 22,9	120 32	2	120 19 — 120 52
C:t = 001:80$\bar{7}$	124 40 35,7	124 37	6	123 49 — 125 13
C:k = 001:10$\bar{1}$	129 06 07,0	129 11	7	128 48 — 129 22
C:ν = 001:075	55 24 39,2	55 34	1	———
C:π = 001:032	57 14 04,6	57 10	1	———
C:d = 001:021	*	64 14	8	64 04 — 64 30
C:f = 001:041	76 25 52,0	76 18	7	76 03 — 76 43
C:τ = 001:092	77 53 29,9	77 41	3	77 32 — 77 53
C:ω = 001:051	79 04 18,4	79 16	2	79 04 — 79 32
C:θ = 001:071	82 08 51,4	82 07	3	81 55 — 82 24
C:ψ = 001:0.15.1	86 19 03,0	86 21	2	86 14 — 86 28
C:B = 001:010	90	90 01	8	89 51 — 90 13
C:o = 001:111	51 36 18,5	51 43	1	———
C:m = 001:110	83 46 14,7	83 46	21	83 37 — 83 58
C:q = 001:33$\bar{1}$	96 45 51,9	96 17	3	96 12 — 96 21
C:φ = 001:22$\bar{3}$	132 28 59,5	133 07	1	———
C:p = 001:11$\bar{2}$	141 30 21,0	141 23	5	140 47 — 141 45
A:m = 100:110	*	44 43	7	44 16 — 45 02
m:k = 110:10$\bar{1}$	61 32 25,9	61 39	3	61 18 — 62 08
m:u = 110:40$\bar{1}$	46 21 25,0	46 29	1	———

I cristalli sono trasparenti e senza colore; con l'esposizione all'aria si appannano. Ordinariamente si mostrano in forma di squame madreperlacee straordinariamente sottili e cristallograficamente indefinibili. Se però essi si ottengono lentamente da soluzione contenente acido fluoridrico, allora si hanno forme più regolari. Il prof. Mauro ha fatto così moltissime cristallizzazioni per poter scegliere i migliori cristalli per le misure.

I cristalli sogliono presentarsi con due tipi di forme distinti. Talvolta sono dei prismi bislunghi secondo l'asse a, come si vede nelle figure 9ª e 10ª; altre volte, e ciò è il caso più frequente, sono in forma di tavolette o lamine più o meno sottili di forma quasi sempre quadrata o rettangolare e talvolta ottangolare, come si scorge nelle figure 11ª e 12ª. Nel caso delle tavolette più grosse, le facce che circondano la base sono spesse volte ripetute parallelamente fra loro, in modo da sembrare i cristalli come se fossero geminati secondo (001), analogamente come nelle miche.

Le facce che si presentano più spesso sono: A(100), B(010), C(001), k$(10\bar{1})$, m(110), d(021), u$(40\bar{1})$. Oltre queste specie di facce ve ne sono molte altre, specialmente nelle zone [001, 100] e [001, 010]. Di queste, alcune sono state trovate più volte, altre solo una volta. Perciò sono state indicate con lettere greche quelle facce la cui esistenza non può ritenersi, in generale, come data con tutta sicurezza. Le facce, tranne quelle riportate come rinvenute frequentemente, sogliono mostrarsi in numero parziale; però è da notarsi che nei cristalli laminari la faccia m(110), che si presenta costantemente, si mostra spesso come troncatura di uno o due angoli soltanto.

Le combinazioni di facce che si presentano, specialmente nei cristalli laminari, sono moltissime. L'elenco dato a principio si riferisce alle combinazioni rinvenute più di una volta. Di queste le più comuni sono le due prime dei cristalli prismatici e le due prime dei laminari.

Le facce dànno per riflessione immagini di diversa nitidezza. Le migliori immagini sono date dalla base C(001) ed anche dalle facce A(100) ed m(110); le altre dànno immagini mediocri; quelle contraddistinte con lettere greche dànno al goniometro immagini pochissimo distinte e spesso multiple, in modo che le misure debbono ritenersi come appossimative.

Frattura vitrea. Sfaldatura parallela a (010) poco distinta.

Caratteri ottici.

Piano degli assi ottici (010).

Bisettrice acuta positiva inclinata di circa 8° (luce gialla) con l'asse c nell'angolo ottuso degli assi a e c.

Dispersione: $\varrho > v$.

Angolo apparente, nell'olio, degli assi ottici: 72°31′ (pel rosso), 71°53′ (pel giallo), 71°19′ (pel verde).

Delle facce osservate dal Marignac, e da me non rinvenute nei cristalli esaminati, vi sono [1]:

χ	γ	r	λ	e	μ	ζ	v
201	401	$30\bar{2}$	$20\bar{3}$	011	043	081	$11\bar{1}$
$-2\,\bar{P}\infty$	$-4\,\bar{P}\infty$	$\frac{3}{2}\,\bar{P}\infty$	$\frac{2}{3}\,\bar{P}\infty$	$\breve{P}\infty$	$\frac{4}{3}\,\breve{P}\infty$	$8\,\breve{P}\infty$	P.

(1) Nella figura 8ª sono stati situati anche i poli di queste facce per far apparire meglio le relazioni di zone di tutte le facce note.

Nel seguente quadro si trovano le mie misure in comparazione con quelle del Marignac, ed ho posto in parentesi quelli angoli che sono stati ridotti ai loro supplementi.

Angoli	E. Scacchi calcolati	E. Scacchi misurati	Marignac (1)
$C:\chi = 001:201$	57° 56′ 49″,4	»	$P:\alpha^{\frac{1}{2}}$ = 57° 39′ [c]
$C:\beta = 001:703$	60 21 29,6	60° 26′	»
$C:\gamma = 001:401$	68 49 24,5	»	$P:\alpha^{\frac{2}{3}}$ = 68 29 [c]
$C:A = 001:100$	*	81 13	$P:\alpha$ = 81 10 [c]
$C:u = 001:40\bar{1}$	94 59 21,6	94 58	»
$C:\varepsilon = 001:70\bar{2}$	96 56 49,1	97 10	»
$C:\eta = 001:80\bar{3}$	101 45 40,7	101 50	»
$C:h = 001:20\bar{1}$	108 13 01,2	108 05	$P:A$ = 107 52 [c]
$C:r = 001:30\bar{2}$	116 07 10,6	»	$P:a^3$ = 115 53 [c]
$C:s = 001:40\bar{3}$	119 43 22,9	120 32	$P:a^2$ = 119 18 [c]
$C:t = 001:80\bar{7}$	124 40 35,7	124 37	»
$C:k = 001:10\bar{1}$	129 06 07,0	129 11	$P:a$ = 128 40 [c]
$C:\lambda = 001:20\bar{3}$	141 21 13,2	»	$P:a^{\frac{1}{2}}$ = 141 58 [c]
$C:e = 001:011$	46 00 30,5	»	$P:e^{\frac{1}{2}}$ = (46 18) [o]
$C:\mu = 001:043$	54 05 36,6	»	$P:e^{\frac{2}{3}}$ = (54 12) [o]
$C:\nu = 001:075$	55 24 39,2	55 34	»
$C:\pi = 001:032$	57 14 04,6	57 10	»
$C:d = 001:021$	*	64 14	$P:e$ = (64 28) [o]
$C:f = 001:041$	76 25 52,0	76 18	$P:e^2$ = (76 34) [o]
$C:\tau = 001:092$	77 53 29,9	77 41	»
$C:\omega = 001:051$	79 04 18,4	79 16	»
$C:\theta = 001:071$	82 08 51,4	82 07	»
$C:\zeta = 001:081$	83 07 08,7	»	$P:e^4$ = (83 11) [o]
$C:\psi = 001:0.15.1$	86 19 03,0	86 21	»
$C:B = 001:010$	90	90 01	»
$C:o = 001:111$	51 36 18,5	51 43	»
$C:m = 001:110$	83 46 14,7	83 46	$P:\mu$ = 83 44 [c]
$C:q = 001:33\bar{1}$	96 45 51,9	96 17	»
$C:v = 001:1\bar{1}\bar{1}$	119 51 42,9	»	$P:m$ = 119 30 [c]
$C:\varphi = 001:22\bar{3}$	132 58 59,5	133 07	»
$C:p = 001:11\bar{2}$	141 30 21,0	141 23	»

(1) Nella Memoria citata (Ann. Ch. Phys. [3], **69**, 1863, 70-71) trovasi sulla colonna dei valor angolari a pag. 70 *Calculé* e sul seguito a pag. 71 *Observé*. Nel dubbio se gli angoli debbano considerarsi come tutti calcolati o tutti misurati, sono stati nel quadro riportati in una sola colonna ed è stato aggiunto [c] oppure [o] secondo che gli angoli si trovavano a pag. 70 oppure 71 della suddetta Memoria.

Angoli	E. Scacchi		Marignac
	calcolati	misurati	
m:m′ = 110:1$\bar{1}$0	89° 26′ 00″,0	"	$\mu-\mu$ = (89° 19′) [o]
A:m = 100:110	*	44° 43′	"
m:k = 110:10$\bar{1}$	61 32 25,9	61 39	"
v:v′ = 11$\bar{1}$:1$\bar{1}\bar{1}$	75 43 50,0	"	m—m = (75 58) [c]
m:u = 110:40$\bar{1}$	46 21 25,0	46 29	"
A:d = 100:021	86 11 38,3	"	e:α = 86 17 [o]
ζ:r = 081:30$\bar{2}$	93 01 24,3	"	e^4:a^3 = (92 58) [o]
d:r = 021:30$\bar{2}$	101 01 59,6	"	e:a^3 = 100 51 [o]
v:r = 11$\bar{1}$:30$\bar{2}$	39 42 39,5	"	m:a^3 = (39 46) [o]
A:ζ = 100:081	88 57 06,3	"	e^4:α = (88 57) [o]

Nel seguente quadro si trovano gli angoli avuti per i tre detti composti paragonati con i corrispondenti del fluotitanato ($Ti\,Fl_4$, 2 K Fl, H_2O) [1] e fluossiniobato di potassio ($Nb\,O\,Fl_3$, 2 K Fl, H_2O) [2] dati dal Marignac.

Angoli	$Ti\,Fl_4$, 2 K Fl, H_2O	$W\,O_2\,Fl_2$, 2 K Fl, H_2O	$Mo\,O\,Fl_3$, 2 K Fl, H_2O	$Mo\,O_2\,Fl_2$, 2 K Fl, H_2O	$Nb\,O\,Fl_3$, 2 K Fl, H_2O
C:A = 001:100	81° 18′	81° 13′	80° 56′	76° 31′	76° 14′
C:q = 001:30$\bar{1}$	"	"	"	95 54	95 51
C:k = 001:10$\bar{1}$	129 41	129 06	129 24	128 18	128 34
C:d = 001:021	64 20	64 14	63 52	"	"
C:o = 001:111	51 34	51 36	51 07	"	"
C:m = 001:110	83 48	83 46	83 34	80 23	80 08
C:q = 001:33$\bar{1}$	"	96 46	"	94 11	94 10
C:v = 001:11$\bar{1}$	"	"	120 09	"	119 31
m:m′ = 110:1$\bar{1}$0	88 54	89 26	89 16	88 25	87 52
k:q = 10$\bar{1}$:33$\bar{1}$	"	"	"	53 14	53 26

$Ti\,Fl_4$, 2 K Fl, H_2O	a:b:c = 0,9924:1:1,0405,	β = 81° 18′
$W\,O_2\,Fl_2$, 2 K Fl, H_2O	= 1,0019:1:1,0481,	81 18
$Mo\,O\,Fl_3$, 2 K Fl, H_2O	= 0,9998:1:1,0320,	80 56
$Mo\,O_2\,Fl_2$, 2 K Fl, H_2O	= 1,0006:1:0,9994,	76 31
$Nb\,O\,Fl_3$, 2 K Fl, H_2O	= 0,992 :1:0,980 ,	76 14

Da questo quadro si rileva che i cinque composti sono tra loro isomorfi. L'isomorfismo però è perfetto solo tra i primi tre e tra i due ultimi.

(1) Ann. d. Min. [5], **15**, 1859, pag. 235. — Vedi pure: Rammelsberg, Handb. d. kryst.-phys. Chemie, 1881, pag. 222.

(2) Ann. Chim. Phys. [4], **8**, 1866, pag. 26-27. — V. pure: Rammelsberg, Handb. d. kryst.-phys. Chemie, 1881, pag. 237.

Un fatto che credo degno di nota, e che potrebbe servire a stabilire meglio l'isomorfismo dei detti sali, risulta dal paragone dei seguenti angoli tra il

	$MoOFl_3,2KFl,H_2O$	$WO_2Fl_2,2KFl,H_2O$	$MoO_2Fl_2,2KFl,H_2O$
C:k = 001 : 10$\bar{1}$	129° 34′	129° 06′	001 : 10$\bar{1}$ = 128° 18′
C:π = 001 : 032	(56 49)	57 14	001 : 085 = 57 15
CA:Čm = [010]:[110]	(44 59½)	(45 03)	[010]:[110] = (45 01).

Se ora nel fluossimolibdato potassico normale per

	C	ξ	k	w	
in luogo di	001	085	10$\bar{1}$	332	...... $h\,k\,l$
si pone	001	032	10$\bar{1}$	997	...... $x\,y\,z$

si avrà per le formole generali sulla trasformazione degli assi (1)

$$x = 3h \quad , \quad y = 3k \quad , \quad 5z = k + 16l$$

e dai nuovi simboli adottati risultano le costanti cristallografiche:

$$a:b:c = 1{,}0006:1:1{,}0525$$
$$\beta = 80°03'04'',2$$

le quali abbastanza si approssimano a quelle del fluossiipomolibdato e del fluossitungstato. I simboli però delle facce risultano, per questa nuova orientazione, per la maggior parte molto complessi, così per es. si ha: n (15.0.17), m (15.15.1), e (0.15.6), ecc.

Fluossiipomolibdato ammonico normale.
$Mo\,O\,Fl_3\,,\,2\,N\,H_4\,Fl$.

Questo composto è stato ottenuto cogli stessi metodi coi quali si è avuto il fluossipomolibdato potassico.

Sistema cristallino: Ortorombico.

$$a:b:c = 0{,}84289:1:1{,}01998.$$

Facce osservate, fig. 13ª:

B	C	e	t	r	a	v	n	s
(010)	(001)	(011)	(034)	(012)	(201)	(605)	(101)	(221)
$\infty\breve{P}\infty$	0P	$\breve{P}\infty$	$\frac{3}{4}\breve{P}\infty$	$\frac{1}{2}\breve{P}\infty$	$2\bar{P}\infty$	$\frac{6}{5}\bar{P}\infty$	$\bar{P}\infty$	2P.

Principali combinazioni osservate:

Cristalli tabulari.

C a e r = (001) (201) (011) (012), fig. 14ª;
C a B e s = (001) (201) (010) (011) (221);
C a e n t = (001) (201) (011) (101) (034);
C e a s r = (001) (011) (201) (221) (012);
C a B e s t v = (001) (201) (010) (011) (221) (034) (605), fig. 15ª.

(1) Vedi: Liebisch Th., Geom. Krystallographie, 1881, p. 55-56.

Cristalli prismatici.

e s a C = (011) (221) (201) (001), fig. 16ª
e a s C B = (011) (201) (221) (001) (010).

Angoli	Calcolati	Misurati		
		medie	n.	limiti
C:a = 001:201	*	67° 33′	15	67° 18′ — 67° 55′
C:v = 001:605	55° 26′ 48″,0	55 35	4	55 10 — 56 00
C:n = 001:101	50 25 48, 9	50 39	4	49 12 — 51 35
C:e = 001:011	*	45 34	11	45 19 — 45 42
C:t = 001:034	37 24 55, 5	37 30	15	37 18 — 38 10
C:r = 001:012	27 01 15, 9	27 02	6	26 38 — 27 15
C:s = 001:221	72 28 01, 2	72 39	2	72 31 — 72 47
B:s = 010:221	52 04 51, 4	51 56	3	51 53 — 52 01
a:a′ = 201:20$\bar{1}$	44 54 00, 0	44 59	2	44 48 — 45 10
s:s′ = 221:22$\bar{1}$	35 03 57, 6	35 13	3	35 08 — 35 17
s:s″ = 221:2$\bar{2}$1	75 50 17, 1	75 29	1	———
s′:s″ = 2$\bar{2}$1:22$\bar{1}$	86 22 45, 0	86 08	2	86 03 — 86 13
a:e = 201:011	74 29 37, 4	74 33	2	74 32 — 74 34
a:s = 201:221	37 55 08, 6	37 56	3	37 51 — 38 01
a′:s = 20$\bar{1}$:221	56 01 39, 0	56 05	4	55 54 — 56 15
e:s = 011:221	49 28 43, 6	49 37	4	49 29 — 49 46
e:s′ = 011:22$\bar{1}$	73 49 30, 3	73 43	1	———

I cristalli sono trasparenti e di color celeste, talvolta anche verdi, coll'esposizione all'aria diventano opachi e prendono un colore che si avvicina al blu di Prussia. Essi per la forma possono presentarsi tabulari e prismatici, e pel loro aspetto e dimensione rassomigliano al fluossimolibdato ammonico normale ($Mo\,O_2\,Fl_2$, $2\,N\,H_4\,Fl$) (1). I cristalli turchini possono rinvenirsi tabulari, bislunghi nel senso dell'asse *b*, come nella figura 15ª, oppure dell'asse *a*, ed in forma prismatica, come nella fig. 16ª; quelli verdi si mostrano tabulari bislunghi nel senso dell'asse *a*, come nella fig. 14ª.

Anche per le specie di facce questo composto si accorda perfettamente col fluossimolibdato ammonico normale. Le facce a ed e si rinvengono costantemente, le facce t, r, v, n sono piccole e la faccia C si trova ordinariamente predominante, ma in taluni casi può esser piccola ed anche mancare del tutto.

Le immagini che si riflettono dalle facce sono in generale abbastanza buone per le misure goniometriche, tranne le faccette t, n, v che si mostrano poco distinte.

Frattura vitrea. Sfaldatura non osservata.

(1) Vedi Scacchi E., *Studio cristallogr. dei fluossimolibdati d'ammonio.* V. in questo volume, pag. 473.

Caratteri ottici. Piano degli assi ottici parallelo a (100). Bisettrice acuta negativa normale a (010). Una lamina normale alla bisettrice acuta, osservata nell'olio, ha dato 91°55′ (pel giallo) ed una lamina normale alla bisettrice ottusa, anche nell'olio 92°41′ (pel giallo). Quindi l'angolo vero degli assi ottici risulta uguale a 89°38′ pel giallo ([1]).

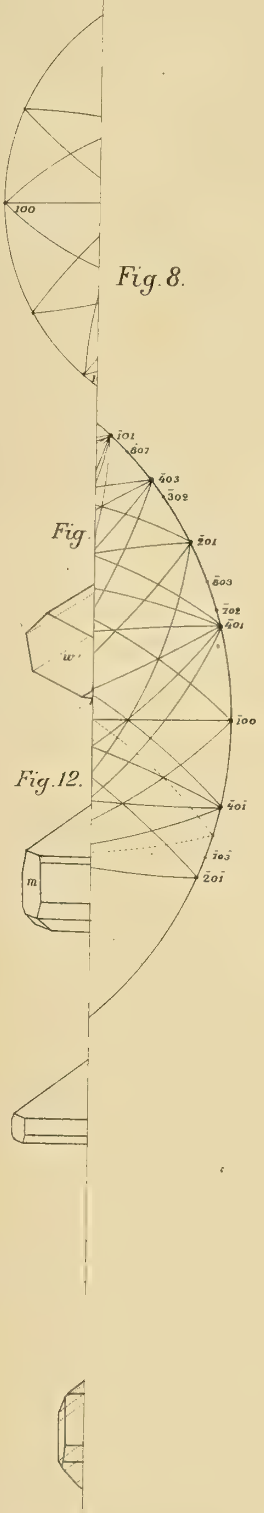
Paragonando le misure di questo sale con quelle dei composti isomorfi al fluossimolibdato ammonico normale ([2]) risulta tra tutti un isomorfismo perfetto, come può rilevarsi dalla seguente tabella.

	$MoOFl_3,2NH_4Fl$	$MoO_2Fl_2,2NH_4Fl$	$NbOFl_3,2NH_4Fl$	$WO_2Fl_2,2NH_4Fl$
C:a = 001:201 =	67° 33′	67° 31′	67° 25′	67° 40′
C:e = 001:011 =	45 34	45 28	45 10	45 08
C:r = 001:012 =	27 01	26 56	26 42	26 40
a:e = 201:011 =	74 30	74 27	74 17	74 27
C:s = 001:221 =	72 28	72 26	"	72 25
s:s′ = 221:22$\bar{1}$ =	35 04	35 09	"	35 10
a:a′ = 201:20$\bar{1}$ =	44 54	44 58	44 50	45 10

$Mo\,O\,Fl_3, 2\,N\,H_4\,Fl$ a:b:c = 0,8429:1:1,0200
$Mo\,O_2\,Fl_2, 2\,N\,H_4\,Fl$ = 0,8413:1:1,0164
$Nb\,O\,Fl_3, 2\,N\,H_4\,Fl$ = 0,8366:1:1,0058
$W\,O_2\,Fl_2, 2\,N\,H_4\,Fl$ = 0,8258:1:1,0047

([1]) Faccio osservare che le determinazioni ottiche suddette non possono ritenersi come molto esatte, poichè i cristalli con grande facilità diventano opachi e di color blu di Prussia; perciò manca l'indicazione della dispersione ottica, e gli angoli degli assi ottici sono stati presi con grande stento per la sola luce gialla.

([2]) Vedi: Scacchi E., Mem. citata.



Lit. Bruno e Salomone Roma.

Fig. 1.

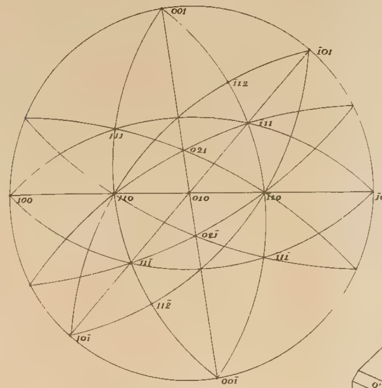


Fig. 2.

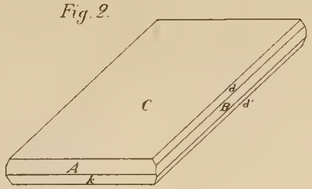


Fig. 3.

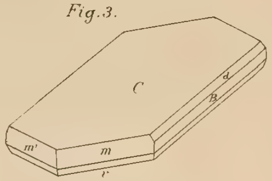


Fig. 4.

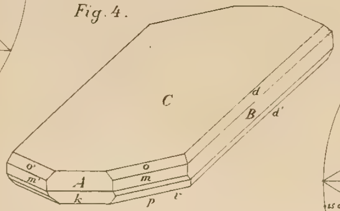


Fig. 5.

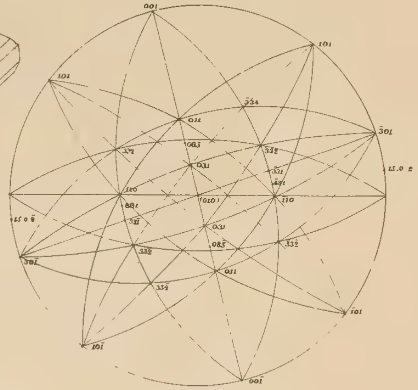


Fig. 7.

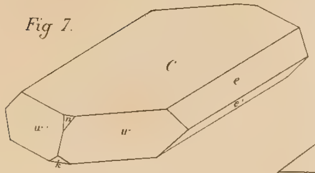


Fig. 6.

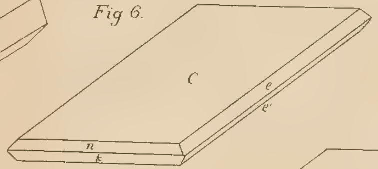


Fig. 12.

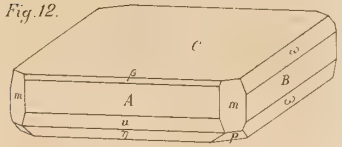


Fig. 9.

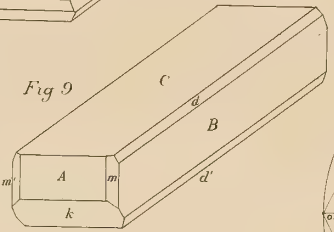


Fig. 13.

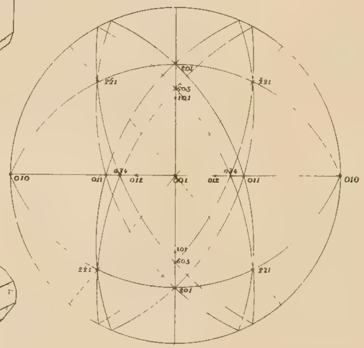


Fig. 11.

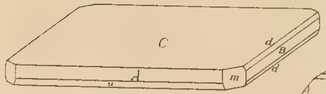


Fig. 15.

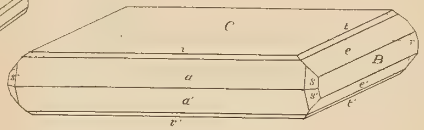


Fig. 10.

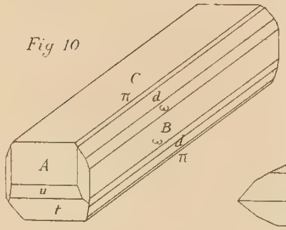


Fig. 14.

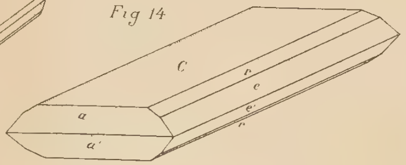


Fig. 16.

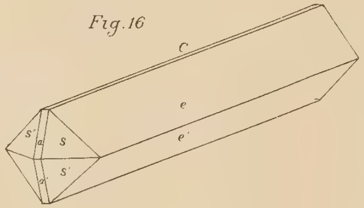
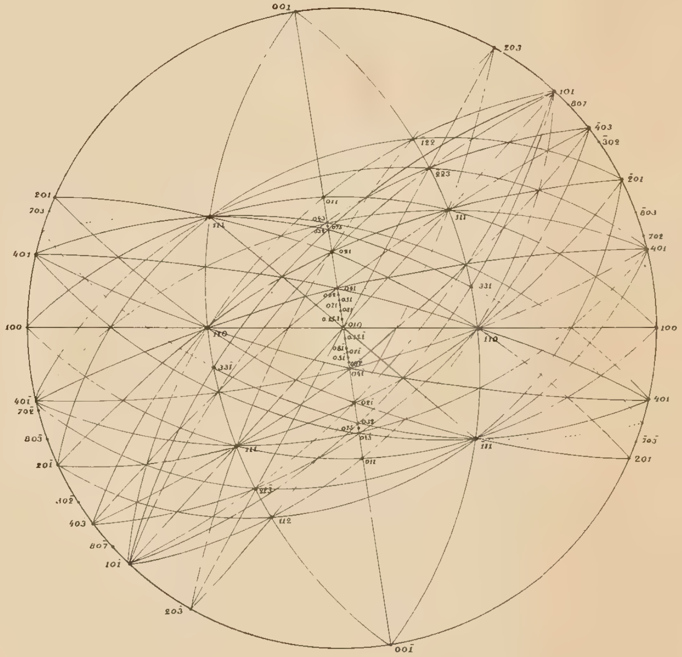


Fig. 8.



Lit. Bruno e Salomone Roma

Sulle superficie d'area minima negli spazî a curvatura costante.

Memoria del Corrispondente LUIGI BIANCHI

letta nella seduta dell'8 gennaio 1888.

Nella mia precedente Memoria: *Sui sistemi di Weingarten negli spazî a curvatura costante*, inserita negli Atti di questa R. Accademia [1], ho dimostrato che le formole fondamentali:

$$(A)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_2}\right)\dfrac{\partial \log\sqrt{G}}{\partial u}+\dfrac{\partial \dfrac{1}{r_1}}{\partial u}=0 \\[2ex] \left(\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_2}\right)\dfrac{\partial \log\sqrt{E}}{\partial v}-\dfrac{\partial \dfrac{1}{r_2}}{\partial v}=0, \end{cases}$$

le quali legano i raggi principali di curvatura r_1, r_2 di una superficie S ai coefficienti del suo elemento lineare

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2,$$

riferito alle linee di curvatura u, v, sussistono inalterate per una superficie S, immersa nello spazio a curvatura costante K, positiva o negativa. Indicando poi con k la curvatura di Gauss, che compete alla espressione superiore dell'elemento lineare di S, i raggi ridotti r_1, r_2 soddisfano alla ulteriore relazione:

$$(A')\qquad \frac{1}{r_1 r_2} = k - K.$$

Inversamente, se r_1, r_2 soddisfano le (A), (A'), esiste una superficie S dello spazio a curvatura costante K, il cui elemento lineare, riferito alle linee di curvatura, prende la forma superiore e di cui r_1, r_2 sono i raggi principali ridotti di curvatura (M. c. n[i] 3, 4).

Nel presente lavoro applico le formole (A) (A') allo studio delle superficie ad area minima e di quelle a curvatura media costante nello spazio di Riemann o di Lobatschewsky e dimostro che queste superficie, come le loro omologhe dello spazio euclideo, hanno le linee di curvatura isoterme e possono flettersi con continuità in modo che restino invariati i singoli valori dei due raggi principali di curvatura; dopo la deformazione le nuove linee di curvatura tagliano le antiche sotto lo stesso angolo costante. La ricerca di queste superficie dipende anche qui dalla integrazione della equazione a derivate parziali:

$$(B)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = ae^z + be^{-z},$$

[1] Vedi in questo volume a pag. 221.

dove z è una funzione di due variabili indipendenti x, y e a, b sono costanti. Facendo poi dello spazio a curvatura costante la nota rappresentazione conforme sullo spazio euclideo, le immagini delle superficie a curvatura media nulla o costante danno luogo a *nuove* classi di superficie dello spazio ordinario a linee di curvatura isoterme. Queste superficie sono definite in coordinate cartesiane (nelle solite notazioni di Monge) dalla equazione a derivate parziali

$$\text{(C)} \qquad Hz + \frac{2}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \text{cost}^{\text{te}},$$

o dall'altra

$$H\left\{x^2+y^2+z^2+k^2\right\} + \frac{4(z-px-qy)}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \text{cost}^{\text{te}},$$

dove H indica la curvatura media della superficie e k una costante arbitraria. Da queste equazioni caratteristiche si può dedurre direttamente che, sulle corrispondenti superficie, le linee di curvatura formano un sistema isotermo. Però il metodo qui tenuto per giungere alla conoscenza di queste nuove superficie, appartenenti ad un gruppo, che da vario tempo ha attirata l'attenzione dei geometri, sembra degno di nota. Per esso viene dimostrato come l'integrazione della equazione a derivate parziali (C) o (D) si riduca a quella dell'equazione tipica (B), susseguita dalla integrazione di equazioni differenziali ordinarie.

1. Consideriamo nello spazio a curvatura costante K un contorno arbitrario chiuso C. Se una superficie S, terminata a questo contorno, deve possedere l'area minima fra tutte le superficie infinitamente vicine ad S e terminate al medesimo contorno, in ogni punto di S dovranno i raggi principali di curvatura essere eguali e di segno contrario. Di questa proprietà, che discende dalle ricerche generali di Lipschitz [1], darò qui una dimostrazione simile a quella adottata da Darboux, pel caso dello spazio euclideo, nelle sue eccellenti *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, p. 281.

Supponendo che la superficie S soddisfi alla condizione di minimo richiesta, riferiamola alle sue linee di curvatura u, v e siano r_1, r_2 i suoi raggi ridotti di curvatura e

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2$$

il suo elemento lineare. Assumendo a sistema triplo coordinato nello spazio curvo quello a cui appartengono la superficie S e le sue parallele, l'elemento lineare dello spazio a curvatura costante $K = +\frac{1}{a^2}$ prende la forma (M. c. n. 9)

$$\text{(1)} \quad ds^2 = E\left(\cos\left(\frac{w}{a}\right) - \frac{a}{r_2}\operatorname{sen}\left(\frac{w}{a}\right)\right)^2 du^2 + G\left(\cos\left(\frac{w}{a}\right) - \frac{a}{r_1}\operatorname{sen}\left(\frac{w}{a}\right)\right)^2 dv^2 + dw^2.$$

Eleviamo ora in ogni punto della porzione di S, terminata al contorno C, un segmento infinitesimo di normale

$$n = \varepsilon\varrho ,$$

dove ε è una costante infinitesima e ϱ una funzione di u, v assoggettata alle sole condizioni di essere finita e continua insieme alle derivate prime $\frac{\partial\varrho}{\partial u}, \frac{\partial\varrho}{\partial v}$ su tutta la

(1) *Ausdehnung der Theorie der Minimalflächen.* Crelle's Journal Bd. 78.

porzione considerata di S e di annullarsi lungo il contorno C. L'elemento lineare della superficie S', luogo degli estremi di questi segmenti, sarà dato dalla formola (1), facendovi $w = \varepsilon\varrho$.

Trascurando le terze potenze di ε, troveremo quindi per l'elemento d'area $d\sigma'$ della superficie S':

$$d\sigma' = \sqrt{EG}\left\{1 - \varepsilon\varrho\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) + \varepsilon^2\left[\varrho^2\left(\frac{1}{r_1 r_2} - \frac{1}{a^2}\right) + \frac{1}{2E}\left(\frac{\partial\varrho}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{2G}\left(\frac{\partial\varrho}{\partial v}\right)^2\right]\right\} du\, dv.$$

L'aumento ΔS d'area nel passaggio dalla superficie S alla S' sarà dunque dato da:

$$\Delta S = -\varepsilon \int\!\!\int \varrho\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)\sqrt{EG}\, du\, dv +$$

$$+ \varepsilon^2 \int\!\!\int \left\{\varrho^2\left(\frac{1}{r_1 r_1} - \frac{1}{a^2}\right) + \frac{1}{2E}\left(\frac{\partial\varrho}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{2G}\left(\frac{\partial\varrho}{\partial v}\right)^2\right\}\sqrt{EG}\, du\, dv,$$

dove gli integrali del 2° membro sono estesi alla porzione di S considerata. Ne segue che, onde la superficie S abbia effettivamente un'area minore della S', qualunque sia la determinazione scelta per ϱ, si dovrà avere:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 0, \qquad \text{c. d. d.}$$

La stessa dimostrazione vale pel caso di $K = -\frac{1}{a^2}$, cambiate le funzioni circolari in iperboliche.

2. Se una superficie S dello spazio a curvatura costante K ha i raggi di curvatura r_1, r_2 legati fra loro da una relazione, le formole (A) dimostrano che, cangiando convenientemente i parametri u, v delle linee di curvatura, si può prendere

(2) $$E = e^{2\int \frac{d\left(\frac{1}{r_2}\right)}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}}, \qquad G = e^{2\int \frac{d\left(\frac{1}{r_1}\right)}{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}}}.$$

Se si tratta di una superficie ad area minima, caratterizzata dalla relazione

$$r_1 + r_2 = 0,$$

supponendo che r_1 sia positivo, r_2 negativo, potremo porre per le (2)

$$E = G = cr_1,$$

dove c è una costante positiva arbitraria. Indicando con θ una conveniente funzione di u, v, poniamo

$$E = G = e^{2\theta},$$

ed, essendo $K = \pm\frac{1}{a^2}$, prendiamo $c = \frac{1}{a}$, di guisa che sarà:

(3) $$r_1 = ae^{2\theta}, \qquad r_2 = -ae^{2\theta}$$

(4) $$ds^2 = e^{2\theta}(du^2 + dv^2).$$

L'ulteriore condizione (A'), cui debbono soddisfare r_1, r_2, si traduce per la funzione θ nella equazione a derivate parziali:

(5) $$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = -\frac{2}{a^2}\,\mathrm{sen\,h}\,2\theta, \quad \text{per } K = +\frac{1}{a^2},$$

o nell'altra

$$(6) \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}=\frac{2}{a^2}\cos h 2\theta\,, \quad \text{per} \quad K=-\frac{1}{a^2}\,.$$

Inversamente, se θ è una soluzione della (5) o della (6), per quanto si è detto nella prefazione, esisterà una corrispondente superficie ad area minima dello spazio di Riemann o di Lobatschewsky, il cui elemento lineare, riferito alle linee di curvatura, avrà la forma (4) e i raggi di curvatura saranno dati dalle (3).

Si può osservare in particolare che la equazione (5) è la stessa che si presenta per determinare le superficie a curvatura media costante $=\frac{2}{a}$ dello spazio euclideo, le quali vengono ad avere il medesimo elemento lineare (4) delle superficie ad area minima nello spazio di Riemann, ossia possono considerarsi come applicabili sopra di esse.

3. Se nella (5) o nella (6) cangiamo le variabili indipendenti u, v colla sostituzione ortogonale

$$(7) \quad \begin{cases} u_1 = u\cos\sigma - v\,\mathrm{sen}\,\sigma \\ v_1 = u\,\mathrm{sen}\,\sigma + v\cos\sigma\,, \end{cases}$$

dove σ è un angolo costante arbitrario, la θ considerata come funzione θ_1 di $u_1\ v_1$ soddisfa nuovamente alla equazione

$$\frac{\partial^2\theta_1}{\partial u_1^2}+\frac{\partial^2\theta_1}{\partial v_1^2}=-\frac{2}{a^2}\,\mathrm{sen}\,h 2\theta_1$$

o all'altra

$$\frac{\partial^2\theta_1}{\partial u_1^2}+\frac{\partial^2\theta_1}{\partial v_1^2}=\frac{2}{a^2}\cos h 2\theta_1\,.$$

Ne segue che l'elemento lineare

$$ds_1^2 = e^{2\theta_1}(du_1^2+dv_1^2)$$

appartiene ad una superficie ad area minima dello spazio di Riemann o di Lobatschewsky; i raggi di curvatura della superficie sono dati dalle formole

$$\varrho_1 = ae^{2\theta_1}\,, \qquad \varrho_2 = -ae^{2\theta_1}\,.$$

Ora per le sostituzioni (7) avendosi $\theta_1=\theta$, l'elemento lineare precedente si trasforma nell'elemento lineare (4) e si ha

$$\varrho_1 = r_1\,, \quad \varrho_2 = r_2\,,$$

onde il teorema:

Ogni superficie ad area minima dello spazio a curvatura costante può flettersi con continuità, conservando invariati i suoi raggi di curvatura.

Le nuove linee di curvatura $u_1=\text{cost}^{\text{te}}$ tagliano le antiche $u=\text{cost}^{\text{te}}$ sotto l'angolo costante σ, come per le analoghe deformazioni nello spazio euclideo. In particolare per $\sigma=\frac{\pi}{4}$ le linee di curvatura si cangiano in assintotiche [1] e inversamente, sicchè abbiamo anche qui le superficie coniugate in applicabilità del Bonnet.

[1] Anche nel caso dello spazio curvo diremo assintotica d'una superficie una linea di essa tale che in ogni suo punto il piano osculatore coincida col piano tangente della superficie.

E infatti, per le (1), (3) e (4), l'elemento lineare dello spazio di Riemann, riferito al sistema triplo ortogonale, cui appartengono la superficie ad area minima S e le sue parallele, è dato da:

$$(8)\ ds^2 = \left\{ e^{\theta} \cos\left(\frac{w}{a}\right) + e^{-\theta} \operatorname{sen}\left(\frac{w}{a}\right) \right\}^2 du^2 + \left\{ e^{\theta} \cos\left(\frac{w}{a}\right) - e^{-\theta} \operatorname{sen}\left(\frac{w}{a}\right) \right\}^2 dv^2 + dw^2.$$

Ora se consideriamo una superficie Σ dello spazio, che abbia per equazione

$$u \pm v = \text{cost}^{\text{te}},$$

il suo elemento lineare sarà

$$ds^2 = dw^2 + 2 \left\{ e^{2\theta} \cos^2\left(\frac{w}{a}\right) + e^{-2\theta} \operatorname{sen}^2\left(\frac{w}{a}\right) \right\} du^2,$$

e la curvatura geodetica $\frac{1}{\varrho}$ delle linee $w = \text{cost}^{\text{te}}$ sopra Σ sarà data da

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{a} \frac{(e^{2\theta} - e^{-2\theta}) \operatorname{sen}\left(\frac{w}{a}\right) \cos\left(\frac{w}{a}\right)}{e^{2\theta} \cos^2\left(\frac{w}{a}\right) + e^{-2\theta} \operatorname{sen}^2\left(\frac{w}{a}\right)}.$$

La linea $w = 0$ sopra Σ, cioè la linea $u \pm v = \text{cost}^{\text{te}}$ sopra S, è quindi una geodetica per Σ e, poichè la superficie Σ e la S si tagliano ortogonalmente lungo di essa, sarà per conseguenza un' assintotica di S c. d. d. Una dimostrazione perfettamente simile vale per $K = -\frac{1}{a^2}$.

Dalla formola (8) possiamo trarre un'altra interessante conseguenza. Se consideriamo le due superficie S_1, S_2 parallele alla S e distanti da essa di $w = \pm \frac{\pi a}{4}$, avremo pei loro rispettivi elementi lineari

$$ds_1^2 = 2\,(\cos \text{h}^2\, \theta du^2 + \operatorname{sen} \text{h}^2\, \theta dv^2)$$
$$ds_2^2 = 2\,(\operatorname{sen} \text{h}^2\, \theta du^2 + \cos \text{h}^2\, \theta dv^2).$$

Se calcoliamo la curvatura k appartenente a questi elementi lineari, in ambedue i casi troviamo per la (5)

$$k = \frac{2}{a^2};$$

dunque: *Ogni superficie ad area minima dello spazio a curvatura costante positiva $K = +\frac{1}{a^2}$ ammette fra le sue superficie parellele due superficie a curvatura costante positiva.*

4. Lo spazio a curvatura costante si può rappresentare in modo conforme sullo spazio euclideo e, prescindendo da inversioni per raggi vettori reciproci, tale rappresentazione è unica e determinata (M. c. n. 1). In questa rappresentazione alle linee di curvatura della superficie obiettiva corrispondono le linee di curvatura della superficie immagine. Le immagini delle superficie ad area minima nello spazio a curvatura costante sono perciò superficie dello spazio euclideo, le cui linee di curvatura

costituiscono un sistema isotermo. Tratteremo ora di queste superficie e dimostreremo che esse non rientrano in nessuna delle classi di superficie a linee di curvatura isoterme finora note.

Come al n. 1 della precedente Memoria, possiamo prendere per elemento lineare dello spazio a curvatura costante K l'espressione seguente

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\left(x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{4a^2}\right)^2}, \quad \text{per} \quad K = + \frac{1}{a^2} \tag{9}$$

$$ds^2 = \frac{a^2}{z^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad \text{per} \quad K = - \frac{1}{a^2}. \tag{10}$$

Riguardando x, y, z come coordinate cartesiane ortogonali di un punto mobile nello spazio euclideo, avremo una delle rappresentazioni conformi dello spazio curvo sullo spazio piano, di cui ora si parlava.

Sia $z = z(x, y)$ l'equazione di una superficie S ad area minima dello spazio (9) o (10), e per le derivate parziali di z rapporto ad x, y riteniamo le solite notazioni di Monge. L'elemento d'area della superficie sarà per le (9), (10):

$$d\sigma = \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx dy}{\left(x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{4a^2}\right)^2} \quad \text{per} \quad K = + \frac{1}{a^2}$$

e

$$d\sigma = \frac{a^2}{z^2}\sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy, \quad \text{per} \quad K = - \frac{1}{a^2}.$$

Fissato quindi un contorno chiuso C, pel quale la S debba passare, dovrà essere z una tale funzione di x, y da rendere minimi rispettivamente gli integrali doppî

$$\iint \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{\left(x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{4a^2}\right)^2}\, dx\, dy$$

$$\iint \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{z^2}\, dx\, dy,$$

i limiti essendo fissi. Per i principî del calcolo delle variazioni avremo dunque per z l'equazione a derivate parziali

$$\frac{(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t}{1 + p^2 + q^2} + \frac{4(z - px - qy)}{x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{4a^2}} = 0, \quad \text{per} \quad K = + \frac{1}{a^2}$$

o l'altra

$$\frac{(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t}{1 + p^2 + q^2} + \frac{2}{z} = 0, \qquad \text{per} \quad K = - \frac{1}{a^2}.$$

Ma riguardando la S come esistente nello spazio euclideo e indicando con H la sua curvatura media, si ha:

$$H = \frac{(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}};$$

perciò, indicando con ϱ, δ le rispettive distanze dell'origine dal punto considerato sulla

superficie e dal piano tangente in esso punto, la prima di queste formole può scriversi

$$\text{(I)} \qquad H = \frac{4\delta}{\varrho^2 + \frac{1}{4a^2}} .$$

La seconda, indicando con n la porzione di normale alla superficie nel punto, ove si calcola la curvatura media, compresa fra esso punto e il piano xy, diventa

$$\text{(II)} \qquad H = \frac{2}{n} .$$

Per le osservazioni premesse, sulle superficie dello spazio euclideo, definite dalle equazioni a derivate parziali (I) o (II), le linee di curvatura costituiscono un sistema isotermo. Dalle considerazioni seguenti apparirà meglio come le superficie ora trovate formino due classi effettivamente nuove nel gruppo delle superficie a linee di curvatura isoterme.

5. Ciascuna delle superficie definite dalla (I) o dalla (II) corrisponde ad una soluzione θ della (5) o della (6). Vogliamo ora dimostrare come, conoscendo questa soluzione θ, si può determinare la corrispondente superficie. Premettiamo per ciò le osservazioni generali seguenti.

Se l'elemento lineare

$$\text{(11)} \qquad ds^2 = H_1^2\, du^2 + H_2^2\, dv^2 + H_3^2\, dw^2$$

appartiene allo spazio di curvatura costante K, si può trovare una tale funzione λ di u, v, w, che l'altro elemento lineare

$$\text{(12)} \qquad ds_1^2 = \frac{1}{\lambda^2} \left\{ H_1^2\, du^2 + H_2^2\, dv^2 + H_3^2\, dw^2 \right\}$$

appartenga allo spazio euclideo, come risulta immediatamente dalla possibilità di rappresentare in modo conforme l'uno spazio sull'altro. Ora scrivendo che i coefficienti dell'elemento lineare (12) soddisfano alle 6 note condizioni di Lamè, troviamo le derivate seconde di λ espresse per u, v, w, λ, $\frac{\partial \lambda}{\partial u}$, $\frac{\partial \lambda}{\partial v}$, $\frac{\partial \lambda}{\partial w}$ dalle formole seguenti:

$$\text{(13)} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u\, \partial v} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial v} \frac{\partial \lambda}{\partial u} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial u} \frac{\partial \lambda}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 \lambda}{\partial v\, \partial w} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial w} \frac{\partial \lambda}{\partial v} + \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial v} \frac{\partial \lambda}{\partial w} \\ \frac{\partial^2 \lambda}{\partial w\, \partial u} &= \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial u} \frac{\partial \lambda}{\partial w} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial w} \frac{\partial \lambda}{\partial u} \end{aligned} \right.$$

$$\text{(14)} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u^2} = -\frac{K}{2} H_1^2 \lambda &+ \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial u} \frac{\partial \lambda}{\partial u} - \frac{H_1}{H_2^2} \frac{\partial H_1}{\partial v} \frac{\partial \lambda}{\partial v} - \frac{H_1}{H_3^2} \frac{\partial H_1}{\partial w} \frac{\partial \lambda}{\partial w} + \\ &+ \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{2\lambda} \frac{H_1^2}{H_2^2} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial v}\right)^2 + \frac{1}{2\lambda} \frac{H_1^2}{H_3^2} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial w}\right)^2 \\ \frac{\partial^2 \lambda}{\partial v^2} = -\frac{K}{2} H_2^2 \lambda &+ \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial v} \frac{\partial \lambda}{\partial v} - \frac{H_2}{H_3^2} \frac{\partial H_2}{\partial w} \frac{\partial \lambda}{\partial w} - \frac{H_2}{H_1^2} \frac{\partial H_2}{\partial u} \frac{\partial \lambda}{\partial u} + \\ &+ \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial v}\right)^2 + \frac{1}{2\lambda} \frac{H_2^2}{H_3^2} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial w}\right)^2 + \frac{1}{2\lambda} \frac{H_2^2}{H_1^2} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial u}\right)^2 \\ \frac{\partial^2 \lambda}{\partial w^2} = -\frac{K}{2} H_3^2 \lambda &+ \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial w} \frac{\partial \lambda}{\partial w} - \frac{H_3}{H_1^2} \frac{\partial H_3}{\partial u} \frac{\partial \lambda}{\partial u} - \frac{H_3}{H_2^2} \frac{\partial H_3}{\partial v} \frac{\partial \lambda}{\partial v} + \\ &+ \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial w}\right)^2 + \frac{1}{2\lambda} \frac{H_3^2}{H_1^2} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{2\lambda} \frac{H_3^2}{H_2^2} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial v}\right)^2 \end{aligned} \right.$$

In forza delle condizioni cui soddisfano H_1, H_2, H_3 (M. c. n. 1, formole (2), (3)), le (13) (14) costituiscono un sistema *illimitatamente* integrabile, cioè la funzione λ da esse determinata contiene quattro costanti arbitrarie.

6. Prendiamo ora per sistema (11) quel sistema triplo ortogonale di uno spazio a curvatura costante K, che viene determinato da una superficie S ad area minima e dalle sue parallele, e sia $w=0$ l'equazione della superficie S; nel sistema (12) corrispondente dello spazio euclideo la superficie $w=0$ sarà la corrispondente superficie della classe (I) o (II), ovvero ne differirà per un'inversione per raggi vettori reciproci.

Considerando dapprima il caso dello spazio di Riemann, ove $K=+\frac{1}{a^2}$, dovremo porre nelle (13) (14)

$$H_1=e^\theta\cos\left(\frac{w}{a}\right)+e^{-\theta}\operatorname{sen}\left(\frac{w}{a}\right),\quad H_2=e^\theta\cos\left(\frac{w}{a}\right)-e^{-\theta}\operatorname{sen}\left(\frac{w}{a}\right),\quad H_3=1\,.$$

Le due ultime (13) danno quindi:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u}=\left\{e^\theta\cos\left(\frac{w}{a}\right)+e^{-\theta}\operatorname{sen}\left(\frac{w}{a}\right)\right\}.\,M$$
$$\frac{\partial\lambda}{\partial v}=\left\{e^\theta\cos\left(\frac{w}{a}\right)-e^{-\theta}\operatorname{sen}\left(\frac{w}{a}\right)\right\}.\,N\,,$$

dove M, N sono funzioni di u, v soltanto. E poichè, qualunque sia w, dobbiamo avere

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\left\{e^\theta\cos\left(\frac{w}{a}\right)+e^{-\theta}\operatorname{sen}\left(\frac{w}{a}\right)\right\}M\right]=\frac{\partial}{\partial u}\left[\left\{e^\theta\cos\left(\frac{w}{a}\right)-e^{-\theta}\operatorname{sen}\left(\frac{w}{a}\right)\right\}N\right],$$

ne risulta che le espressioni

$$e^\theta(M\,du+N\,dv)\,,\qquad e^{-\theta}(M\,du-N\,dv)$$

debbono essere i differenziali esatti di due funzioni di u, v, che indicheremo con Φ, Ψ. Tra Φ e Ψ sussisteranno le relazioni

$$(15)\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial u}=e^{2\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial u},\quad \frac{\partial\Phi}{\partial v}=-e^{2\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial v},$$

e per la funzione cercata λ avremo la formola

$$(16)\qquad \lambda=\Phi\cos\left(\frac{w}{a}\right)+\Psi\operatorname{sen}\left(\frac{w}{a}\right)+W\,,$$

essendo W una funzione della sola w.

Possiamo supporre che la funzione W e la sua derivata W′ si annullino per $w=0$, poichè, se esse assumessero invece i valori W_0, W'_0, basterebbe cangiare rispettivamente Φ, Ψ in $\Phi+W_0$, $\Psi+aW'_0$, il che non altera le (15), e la nuova funzione

$$W_1=W-W_0\cos\left(\frac{w}{a}\right)-aW'_0\operatorname{sen}\left(\frac{w}{a}\right)$$

soddisferebbe alle condizioni richieste.

Se fra le (15) eliminiamo Ψ, troviamo che Φ deve soddisfare alla equazione a derivate parziali:

$$(\alpha)\qquad \frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial v}=\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial\Phi}{\partial u}+\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\Phi}{\partial v}.$$

Dobbiamo ora ricercare a quali ulteriori condizioni debbono assoggettarsi Φ, Ψ e W, affinchè col valore (16) di λ siano soddisfatte le (13) (14). A tale oggetto facciamo nelle equazioni (14) $w=0$; la 3^a di esse, indicando con c il valore che assume la derivata seconda di W per $w=0$, ci dà:

$$\frac{\Psi}{a}=\sqrt{2c\Phi-\frac{\Phi^2}{a^2}-e^{-2\theta}\left\{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)^2\right\}} \tag{17}$$

e le prime due, insieme colla (α), forniscono, per determinare Φ il sistema di equazioni:

$$(18)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}=e^{2\theta}\left(c-\frac{\Phi}{a^2}\right)+\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\Phi}{\partial u}-\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial\Phi}{\partial v}-\frac{\Psi}{a^2}\\&\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial v}=\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial\Phi}{\partial u}+\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\\&\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}=e^{2\theta}\left(c-\frac{\Phi}{a^2}\right)-\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\Phi}{\partial u}+\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial\Phi}{\partial v}+\frac{\Psi}{a^2},\end{aligned}\right.$$

ove per Ψ s'intende sostituito il suo valore (17). Inversamente quando Φ soddisfi le (18) e ψ abbia il valore (17) le (15) risultano identicamente soddisfatte.

Se si tien conto della equazione (5), cui soddisfa θ, si riscontra facilmente che il sistema (18) di equazioni simultanee a derivate parziali per la funzione Φ *è illimitatamente* integrabile, qualunque sia c, e perciò la soluzione più generale Φ delle (18) comprende, oltre c, tre costanti arbitrarie [1].

Ora basta introdurre il valore (16) per λ nelle due prime (13), divise rispettivamente per H_1, H_2 e addizionando o sottraendo i risultati si trova per W il valore seguente

$$W=a^2c\left(1-\cos\left(\frac{w}{a}\right)\right),$$

quindi sarà

$$\lambda=\Phi\cos\left(\frac{w}{a}\right)+\psi\,\mathrm{sen}\left(\frac{w}{a}\right)+a^2c\left(1-\cos\left(\frac{w}{a}\right)\right). \tag{16'}$$

[1] Come si è osservato al n. 2, l'elemento lineare

$$ds^2=e^{2\theta}(du^2+dv^2)$$

appartiene ad una superficie S a curvatura media costante $=\frac{2}{a}$ dello spazio euclideo, riferita alle linee di curvatura u, v. L'equazione media (18) è precisamente l'equazione di Cayley cui soddisfa la distanza normale infinitesima $\varrho=\varepsilon\Phi$ (essendo ε una costante infinitamente piccola) fra la superficie S ed ogni superficie S_1 successiva ad S in una serie di superficie che faccia parte di un sistema triplo ortogonale. Ora non soltanto il sistema (18) ma ben anche il seguente

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial v}=\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial\Phi}{\partial u}+\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\\&\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}=2e^{2\theta}\left(c-\frac{\Phi}{a^2}\right)\end{aligned}\right.$$

si riscontra essere *illimitatamente* integrabile; la soluzione più generale Φ di quest' ultimo sistema comprende quindi, oltre c, quattro costanti arbitrarie ed è una soluzione *completa* dell'equazione di Cayley (Cf. König, Mathematische Annalen, Bd. 24 p. 579). Si vede quindi che: *Per ogni superficie a curvatura media costante si può determinare una soluzione completa dell'equazione di Cayley, integrando soltanto equazioni differenziali ordinarie.*

È facile poi constatare che, essendo Φ determinata dalle equazioni simultanee (18) e ψ dalla (17), col valore ora trovato per λ si soddisfano identicamente le equazioni fondamentali (13), (14).

7. Il sistema triplo ortogonale (12) dello spazio euclideo ha nel caso nostro per elemento lineare

$$(19)\qquad ds^2 = \frac{1}{\lambda^2}\left\{e^\theta \cos\left(\frac{w}{a}\right) + e^{-\theta} \operatorname{sen}\left(\frac{w}{a}\right)\right\}^2 du^2 + \frac{1}{\lambda^2}\left\{e^\theta \cos\left(\frac{w}{a}\right) - e^{-\theta} \operatorname{sen}\left(\frac{w}{a}\right)\right\}^2 dv^2 + \frac{1}{\lambda^2} dw^2 ,$$

dove λ ha il valore (16'). Ritenendo per questo sistema triplo le notazioni del n. 2 della mia prima Memoria sui sistemi di Weingarten [1], si ha

$$\frac{1}{r_{32}} = \frac{\lambda}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial w} - \frac{\partial \lambda}{\partial w}, \quad \frac{1}{r_{31}} = \frac{\lambda}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial w} - \frac{\partial \lambda}{\partial w} .$$

Ed ora basterà fare in questa e nella (19) $w = 0$ per avere le formole relative alla nuova superficie S a linee di curvatura isoterme. Indicando dunque con r_1, r_2 i raggi principali di curvatura della S, corrispondenti alle linee di curvatura u=cost^{te}, v=cost^{te}, avremo

$$(20)\qquad \frac{1}{r_1} = -\frac{1}{a}(\Psi + e^{-2\theta}\Phi), \quad \frac{1}{r_2} = \frac{1}{a}(-\Psi + e^{-2\theta}\Psi)$$

e per l'elemento lineare di S

$$(21)\qquad ds^2 = \frac{e^{2\theta}}{\Phi^2}(du^2 + dv^2).$$

La superficie S, per quanto abbiamo detto al n. 4, o è una superficie S' che verifica l'equazione a derivate parziali ivi segnata (I), o si ottiene da una tale superficie con inversione per raggi vettori reciproci. Ed anzi siccome ogni inversione dello spazio euclideo conserva gli angoli, è chiaro che dando alla costante c un conveniente valore, si può mutare la S in una qualunque sua trasformata per raggi vettori reciproci. Possiamo domandare quale valore converrà dare a c per ottenere un'effettiva superficie S' della classe (I). Per trovare questo valore di c, osserviamo che λ deve allora esser dato, per la (9) dalla formola

$$(22)\qquad \lambda = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 + \dfrac{1}{4a^2}} .$$

Ora l'eguaglianza

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{1}{\lambda^2}\left\{H_1^2\, du^2 + H_2^2\, dv^2 + H_3^2\, dw^2\right\}$$

richiede che le nove quantità

$$\frac{\lambda}{H_1}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\lambda}{H_1}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\lambda}{H_1}\frac{\partial z}{\partial u}$$
$$\frac{\lambda}{H_2}\frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\lambda}{H_2}\frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\lambda}{H_2}\frac{\partial z}{\partial v}$$
$$\frac{\lambda}{H_3}\frac{\partial x}{\partial w}, \quad \frac{\lambda}{H_3}\frac{\partial y}{\partial w}, \quad \frac{\lambda}{H_3}\frac{\partial z}{\partial w}$$

[1] Annali di Matematica. T. XIII, serie 2.ª

siano i coefficienti di una sostituzione ortogonale; si avrà quindi

$$(\beta)\left\{\begin{aligned}&\frac{\lambda^2}{H_1^2}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\frac{\lambda^2}{H_2^2}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\frac{\lambda^2}{H_3^2}\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2=1\\&\frac{\lambda^2}{H_1^2}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\frac{\lambda^2}{H_2^2}\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\frac{\lambda^2}{H_3^2}\left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2=1\\&\frac{\lambda^2}{H_1^2}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2+\frac{\lambda^2}{H_2^2}\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2+\frac{\lambda^2}{H_3^2}\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2=1.\end{aligned}\right.$$

Moltiplicando queste ultime ordinatamente per x^2, y^2, z^2 e sommando, avremo, per la (22),

$$\frac{1}{H_1^2}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)^2+\frac{1}{H_2^2}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial v}\right)^2+\frac{1}{H_3^2}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial w}\right)^2=4\left(\lambda-\frac{1}{4a^2}\lambda^2\right),$$

e facendo in questa formola $w=0$, coll'osservare la (16'), ne segue

$$e^{-2\theta}\left\{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)^2\right\}+\frac{\Psi^2}{a^2}=4\Phi-\frac{\Phi^2}{a^2}.$$

Confrontando colla (17), risulta quindi che, per ottenere una superficie S' della classe (I), bisognerà prendere nelle nostre formole

$$c=2.$$

Possiamo ora accertarci che le superficie S' della classe (I) non appartengono ad alcuna delle classi già note di superficie a linee di curvatura isoterme (superficie di 2° grado, ciclidi, superficie di rotazione, superficie a curvatura media nulla o costante) nè possono dedursi da tali superficie con inversioni per raggi vettori reciproci. Per ciò basterà osservare che la superficie generale S cui competono le formole (20) (21) non può essere a curvatura media nulla o costante, essendo chiaro a priori che la S non è una quadrica, nè una ciclide, nè una superficie di rotazione. Ora se fosse

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=\text{cost}^{\text{te}}$$

dalle (20) seguirebbe $\Psi=\text{cost}^{\text{te}}$ e quindi anche per le (15) $\Phi=\text{cost}^{\text{te}}$. Ma allora le (18) darebbero $\Phi=\Psi=0$ il che è impossibile.

« 8. Veniamo ora al caso delle superficie definite dalla equazione (II), o delle loro trasformate per raggi vettori reciproci, considerate come immagini delle superficie ad area minima nello spazio a curvatura costante negativa $K=-\dfrac{1}{a^2}$.

« Procedendo come ai n$^{\text{i}}$ 6, 7, troveremo pel valore di λ

$$\lambda=\Phi\cosh\left(\frac{w}{a}\right)+\Psi\operatorname{senh}\left(\frac{w}{a}\right)+a^2c\left\{\cosh\left(\frac{w}{a}\right)-1\right\},$$

dove Ψ si esprime per Φ colla formola

$$(23)\qquad \Psi=a\sqrt{2c\Phi+\frac{\Phi^2}{a^2}-e^{-2\theta}\left\{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)^2\right\}},$$

essendo c una costante arbitraria e Φ è definita dalle equazioni simultanee

$$(24)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} = e^{2\theta}\left(c+\dfrac{\Phi}{a^2}\right)+\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\dfrac{\partial\Phi}{\partial u}-\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\dfrac{\partial\Phi}{\partial v}-\dfrac{\Psi}{a^2} \\ \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial v} = \dfrac{\partial\theta}{\partial v}\dfrac{\partial\Phi}{\partial u}+\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\dfrac{\partial\Phi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial v^2} = e^{2\theta}\left(c+\dfrac{\Phi}{a^2}\right)-\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\dfrac{\partial\Phi}{\partial u}+\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\dfrac{\partial\Phi}{\partial v}+\dfrac{\Psi}{a^2}\,. \end{cases}$$

Questo sistema, a causa della equazione attuale (6) cui soddisfa θ, è *illimitatamente* integrabile. Per la superficie S cercata l'elemento lineare, riferito alle linee di curvatura, sarà dato dalla (21) e i raggi principali di curvatura dalla (20), essendo Φ, Ψ le funzioni ora definite.

Volendo che questa superficie S appartenga alla classe (II) converrà dare alla costante c il valore zero. E infatti ripetendo le ultime considerazioni del n. precedente, coll'osservare che nel caso attuale deve aversi per la (10)

$$\lambda = \frac{a}{z}\,,$$

e ponendo nella 3ª delle (?) $w = 0$, risulta

$$e^{-2\theta}\left\{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)^2\right\}+\frac{\Psi^2}{a^2}=\frac{\Phi^2}{a^2}\,,$$

quindi per la (23)

$$c = 0\,.$$

In fine si potrà constatare anche qui che le superficie della classe (II) non appartengono alle classi già note di superficie a linee di curvatura isoterme.

9. Indicando col nome di curvatura media di una superficie dello spazio a curvatura costante la somma $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}$ delle sue curvature principali ridotte, le superficie ad area minima, che abbiamo sopra considerato, sono quelle che hanno nulla la curvatura media. Studiamo ora più in generale quelle superficie per le quali la curvatura media è costante. Tenendo conto delle equazioni (2) e indicando con $\frac{1}{R}$ il valore della curvatura media, si vedrà in primo luogo che all'elemento lineare della superficie si può dare la forma

$$(25)\qquad ds^2 = m^2\, e^{2\theta}\,(du^2+dv^2)\,,$$

dove θ è una funzione di u, v e m una costante arbitraria; i raggi r_1, r_2 saranno dati dalle formole

$$(26)\qquad \frac{1}{r_1}=\frac{1}{2R}(1-e^{-2\theta}),\quad \frac{1}{r_2}=\frac{1}{2R}(1+e^{-2\theta})\,.$$

Per tal modo le equazioni fondamentali (A) saranno soddisfatte e la ulteriore relazione (A′) darà per θ la equazione a derivate parziali:

$$(27)\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}=m^2\left\{\frac{e^{-2\theta}}{4R^2}-e^{2\theta}\left(\frac{1}{4R^2}+K\right)\right\}\,.$$

Questa, ove si cangi θ in $\theta + \alpha$ e si determinino convenientemente le costanti α, m può sempre ridursi alla forma (5) o (6) del n. 2, eccettuato il caso in cui si abbia $K = -\frac{1}{4R^2}$, cioè quando si tratti delle superficie a curvatura media costante $\frac{1}{R} = \frac{2}{a}$ immerse nello spazio di Lobatschewsky a curvatura $K = -\frac{1}{a^2}$. In quest'ultimo caso, prendendo $m = a$, la (27) diventa:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = e^{-2\theta}, \tag{27'}$$

che è la nota equazione da cui dipendono le superficie ad area minima dello spazio euclideo; l'elemento lineare (25) appartiene allora appunto ad una tale superficie. Si può dire adunque che le superficie a curvatura media costante $= \frac{2}{a}$ dello spazio di Lobatschewsky, colla curvatura $K = -\frac{1}{a^2}$, sono applicabili sulle superficie ad area minima dello spazio ordinario.

Per la forma che hanno le equazioni (27), (27′) è chiaro che si potranno ripetere le considerazioni del n. 3 e quindi le superficie a curvatura media costante dello spazio di Riemann o Lobatschewsky sono suscettibili delle medesime flessioni, che ivi abbiamo osservato per le superficie ad area minima.

10. Facendo dello spazio a curvatura costante la nota rappresentazione conforme sullo spazio euclideo, le immagini delle superficie a curvatura media costante saranno superficie dello spazio ordinario a linee di curvatura isoterme; queste comprenderanno evidentemente, come caso particolare, le superficie studiate ai n^i 6, 7, 8.

Per trovare le equazioni caratteristiche delle nuove superficie, ci riferiremo anche qui (prescindendo da inversioni per raggi vettori reciproci) a quella determinata rappresentazione conforme del n. 4, che si ottiene prendendo per espressione dell'elemento lineare dello spazio a curvatura costante la (9) o la (10) e riguardando x, y, z come coordinate cartesiane ortogonali di un punto nello spazio euclideo.

Sia $z = z(x, y)$ l'equazione di una superficie qualunque S dello spazio di Riemann o di Lobatschewsky, definito dalla espressione (9) o (10) dell'elemento lineare. Occupiamoci in primo luogo di ricercare l'espressione H′ della curvatura media della superficie S, pensata come esistente nello spazio curvo.

Per questo applicheremo le formole generali date da Voss nel 16° volume dei Mathematische Annalen (1). L'equazione (11) p. 149 di questa Memoria ci dà l'equazione di 2° grado in ω

$$\begin{vmatrix} a_{11}\,\omega - \frac{\Omega_{11}}{\sqrt{U}}, & a_{12}\,\omega - \frac{\Omega_{12}}{\sqrt{U}} \\ a_{12}\,\omega - \frac{\Omega_{12}}{\sqrt{U}}, & a_{22}\,\omega - \frac{\Omega_{22}}{\sqrt{U}} \end{vmatrix} = 0,$$

(1) *Zur Theorie der Transformation quadratischer Differentialausdrüche und der Krümmung höherer Mannigfaltigkeiten*, pag. 129. ss.

le cui radici sono le inverse dei raggi ridotti di curvatura. Per la curvatura media cercata H′ risulta quindi

$$H' = \frac{a_{11}\,\Omega_{22} + a_{22}\,\Omega_{11} - 2a_{12}\,\Omega_{12}}{\sqrt{U}\,(a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2)} .$$

Ora, se supponiamo l'elemento lineare dello spazio dato dalla formola (9), e per le derivate parziali di z rapporto a x, y riteniamo le solite notazioni, ponendo per brevità

$$\lambda = x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{4a^2},$$

troviamo

$$a_{11} = \frac{1+p^2}{\lambda^2}, \quad a_{12} = \frac{pq}{\lambda^2}, \quad a_{22} = \frac{1+q^2}{\lambda^2}$$

$$\Omega_{11} = r + \frac{2(1+p^2)(z-px-qy)}{\lambda}, \quad \Omega_{12} = s + \frac{2pq(z-px-qy)}{\lambda},$$

$$\Omega_{22} = t + \frac{2(1+q^2)(z-px-qy)}{\lambda}$$

$$\sqrt{U} = \lambda\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

La formola (γ) diventa quindi

$$(\delta) \qquad H' = \left(x^2+y^2+z^2+\frac{1}{4a^2}\right)H + \frac{4(z-px-qy)}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

dove H indica la curvatura media della superficie S, pensata come esistente nello spazio euclideo.

Analogamente, nel caso dell'elemento lineare (10), abbiamo

$$a_{11} = \frac{a^2}{z^2}(1+p^2), \quad a_{12} = \frac{a^2}{z^2}pq, \quad a_{22} = \frac{a^2}{z^2}(1+q^2)$$

$$\Omega_{11} = r + \frac{1+p^2}{z}, \quad \Omega_{12} = s + \frac{pq}{z}, \quad \Omega_{22} = t + \frac{1+q^2}{z}$$

$$\sqrt{U} = \frac{z}{a}\sqrt{1+p^2+q^2},$$

onde

$$(\delta') \qquad H' = \frac{z}{a}H + \frac{2}{a\sqrt{1+p^2+q^2}} .$$

Le nuove superficie dello spazio euclideo a linee di curvatura isoterme immagini delle superficie a curvatura media costante H′ dello spazio curvo, sono dunque definite dalla equazione a derivate parziali

$$(\text{III}) \qquad \left(x^2+y^2+z^2+\frac{1}{4a^2}\right)H + \frac{4(z-px-qy)}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \text{cost}^{\text{te}}$$

o dall'altra

$$(\text{IV}) \qquad zH + \frac{2}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \text{cos}^{\text{te}}.$$

Quando si pongono eguali a zero le costanti arbitrarie dei secondi membri, si ricade sulle equazioni (I), (II) del n. 4, il che conferma per altra via i risultati ivi stabiliti.

In fine noteremo come sia facile verificare sulle equazioni (III), (IV) che le superficie a curvatura media costante dello spazio di Riemann o di Lobatschewsky corrispondono, come quelle dello spazio euclideo, ad un problema di minimo relativo. E infatti si ottengono appunto le equazioni (III) o (IV) proponendosi di chiudere in questi spazî un volume di grandezza data con una porzione di superficie avente la minore area possibile.

11. Resta ora che dimostriamo come, nota una soluzione θ dell'equazione (27), si possa trovare la corrispondente superficie della classe (III) e (IV). I calcoli da farsi sono perfettamente simili a quelli eseguiti ai n. 6, 7 e però ci limiteremo qui a considerare il caso speciale notevole, già sopra ricordato, in cui la (27) si riduce alla (27'); allora da ogni speciale superficie ad area minima dello spazio ordinario si deduce una soluzione θ dell'equazione stessa. In questo caso, essendo $H' = \frac{2}{a}$, l'equazione (IV) prende la forma

$$(IV') \qquad Hz + \frac{2}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = 2 .$$

Procedendo come ai n[i] 6, 7 e indicando con c una costante arbitraria, troveremo

$$\lambda = \Phi \cosh\left(\frac{w}{a}\right) + \Psi \operatorname{senh}\left(\frac{w}{a}\right) + c \left\{ \cosh\left(\frac{w}{a}\right) - 1 \right\},$$

essendo Ψ espressa per Φ dalla formola

$$\Psi = \sqrt{2c\Phi + \Phi^2 - e^{-2\theta}\left\{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)^2\right\}},$$

mentre Φ è definita dal sistema illimitatamente integrabile di equazioni simultanee

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} &= e^{2\theta}(\Phi+c) + \frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\Phi}{\partial u} - \frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial\Phi}{\partial v} + (e^{2\theta}+1)\Psi \\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial v} &= \frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial\Phi}{\partial u} + \frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\Phi}{\partial v} \\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2} &= e^{2\theta}(\Phi+c) - \frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\Phi}{\partial u} + \frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial\Phi}{\partial v} + (e^{2\theta}-1)\Psi . \end{aligned}\right.$$

La superficie S corrispondente dello spazio euclideo, colle linee di curvatura isoterme, avrà per elemento lineare

$$ds^2 = \frac{a^2 e^{2\theta}}{\Phi^2}(du^2 + dv^2)$$

e i suoi raggi principali di curvatura saranno dati dalle formole

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{a}\left\{ \Psi + (1 - e^{-2\theta})\Phi \right\}, \quad \frac{1}{r_2} = \frac{1}{a}\left\{ \Psi + (1 + e^{-2\theta})\Phi \right\}.$$

Questa superficie S si dedurrà da una superficie S' della classe (IV') con un' inversione per raggi vettori reciproci. Volendo che essa appartenga alla classe (IV'), si dimostrerà, come al n. 8, che bisogna porre $c = 0$.

12. Il sig. Weingarten, al quale ho comunicato i risultati del presente lavoro ed in particolare la esistenza delle nuove classi di superficie a linee di curvatura

isoterme definite dalle equazioni (I), (II); (III) e (IV) dei n[i] 4, 10, ha voluto gentilmente comunicarmi una sua verifica per constatare direttamente, sulle equazioni differenziali, la proprietà in discorso di queste superficie. Ed è col permesso dell' illustre geometra che qui riproduco la sua bella dimostrazione.

È noto che, scelto sopra una superficie qualunque un sistema di coordinate curvilinee u, v ed espresse quindi le coordinate cartesiane ortogonali x, y, z di un punto mobile sulla superficie e i coseni di direzione X, Y, Z della normale per i parametri u, v, sussistono le relazioni seguenti

$$(28)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial u} = M\dfrac{\partial x}{\partial u} + N\dfrac{\partial x}{\partial v}, & \dfrac{\partial Y}{\partial u} = M\dfrac{\partial y}{\partial u} + N\dfrac{\partial y}{\partial v}, \quad \dfrac{\partial Z}{\partial u} = M\dfrac{\partial z}{\partial u} + N\dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \dfrac{\partial X}{\partial v} = M'\dfrac{\partial x}{\partial u} + N'\dfrac{\partial x}{\partial v}, & \dfrac{\partial Y}{\partial v} = M'\dfrac{\partial y}{\partial u} + N'\dfrac{\partial y}{\partial v}, \quad \dfrac{\partial Z}{\partial v} = M'\dfrac{\partial z}{\partial u} + N'\dfrac{\partial z}{\partial v} \end{cases}$$

dove M, N, M′, N′ sono quattro convenienti funzioni di u, v. Indicando poi con r_1, r_2 i raggi principali di curvatura e con

$$H = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}, \qquad K = \frac{1}{r_1 r_2}$$

la curvatura media e la curvatura assoluta della S, si ha

$$(29)\qquad H = M + N', \qquad K = MN' - M'N.$$

Ponendo inoltre, per brevità

$$(30)\qquad \varepsilon^2 = \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)^2 = H^2 - 4K,$$

il criterio dato da Weingarten ([1]) per riconoscere se sopra la superficie S le linee di curvatura costituiscono un sistema isotermo si traduce qui nella condizione che l'espressione differenziale

$$(31)\qquad U = \frac{1}{\varepsilon^2}\left\{\left(M\frac{\partial H}{\partial u} + N\frac{\partial H}{\partial v}\right)du + \left(M'\frac{\partial H}{\partial u} + N'\frac{\partial H}{\partial v}\right)dv - dK\right\}$$

sia il differenziale esatto di una funzione ψ di u, v.

Se ora assumiamo sulla S per linee coordinate quelle definite dalle equazioni

$$(32)\quad \begin{cases} u = \alpha\,(Xx + Yy + Zz) + aX + bY + cZ + C \\ v = \dfrac{\alpha}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + ax + by + cz + C' \end{cases}$$

dove α, a, b, c, C, C′ sono costanti arbitrarie, avremo

$$N = 1, \qquad N' = 0,$$

come si riscontra subito derivando parzialmente le (32) rispetto ad u, v e tenendo conto delle (28). Dalle (29) segue allora

$$M = H, \qquad M' = -K,$$

sicchè, osservando che per la (30)

$$dK = \tfrac{1}{2} H dH - \tfrac{1}{4}\, d\varepsilon^2,$$

la (31) diventa

$$(33)\qquad U = \frac{1}{2} d\log\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2}\left\{\left(\frac{1}{2}H\frac{\partial H}{\partial u} + \frac{\partial H}{\partial v}\right)du - \left(\frac{1}{2}H\frac{\partial H}{\partial v} + K\frac{\partial H}{\partial u}\right)dv\right\}.$$

([1]) *Ueber die Differentialgleichung der Oberflächen, welche durch ihre Krümmungslinien in unendlich kleine Quadrate getheilt werdenkönnen* (Sitzungsberichte der Berliner Akademie 8 november 1883).

La trasformazione indicata vale evidentemente per qualunque superficie. Ma supponiamo ora che per la superficie S la curvatura media sia data dalla formola

$$H = 2\frac{u}{v};$$

allora, avendosi

$$\frac{\partial H}{\partial v} = -\frac{1}{2}H\frac{\partial H}{\partial u},$$

risulterà

$$U = \frac{1}{2}d\log\varepsilon + \frac{1}{4}\frac{\partial H}{\partial u}dv = \frac{1}{2}d\log(v\varepsilon),$$

cioè U sarà un differenziale esatto. Se ne conclude che sulle superficie definite dalla equazione a derivate parziali del 2° ordine

$$(34) \qquad H = 2\frac{\alpha(Xx + Yy + Zz) + aX + bY + cZ + C}{\frac{\alpha}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + ax + by + cz + C'}$$

le linee di curvatura costituiscono un sistema isotermo.

È facile vedere che, prescindendo da trasformazioni di coordinate e da inversioni per raggi vettori reciproci, la (34) definisce appunto le superficie delle classi (III), (IV) n. 10. E infatti se la costante α è zero, basta prendere per nuova direzione dell'asse z quella, che ha i coseni di direzione proporzionali ad a, b, c e spostare lungo il nuovo asse z l'origine delle coordinate, con che la (34) si riduce alla (IV).

Se poi la costante α non è zero, possiamo fare evidentemente $\alpha = 1$, e cangiando rispettivamente x, y, z in $x - a$, $y - b$, $c - z$ la (34) diventa

$$(34') \qquad (x^2 + y^2 + z^2 + k)H + 4\frac{z - px - qy}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = \text{cost}^{te}.$$

Ora se si dà a k un valore positivo questa formola coincide colla (III).

Siccome poi in generale l'elemento lineare

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{(x^2 + y^2 + z^2 + k)^2}$$

appartiene allo spazio di curvatura costante $K = 4k$, risulta dalle considerazioni del n. 10 che per k negativo la (34') definisce una classe di superficie trasformate per raggi vettori reciproci delle superficie della classe (IV).

In fine se $k = 0$ le superficie (34') si deducono con inversioni per raggi vettori reciproci dalle superficie a curvatura media costante dello spazio euclideo.

RELAZIONE

letta dal Socio A. Moriggia, relatore, a nome anche del Socio F. Todaro, nella seduta del 13 novembre 1887, sulla Memoria del dott. Vittorio Aducco, intitolata: *Esperienze sopra l'azione fisiologica delle basi tossiche dell'orina normale.*

« Intorno a questo lavoro riferirò con brevi parole all'Accademia, anche a nome del prof. Todaro.

« Il dottore Aducco esaminando buona quantità di orine raccolte dai militari, ha riscontrato che esse conteneano una dose non indifferente di una sostanza velenosa, avente caratteri di alcaloide, e differente dalle conosciute ptomaine. La base tossica (o forse miscuglio di basi) apparve in maggior copia nelle orine in seguito a faticosa marcia, che non prima o dopo di essa.

« Il cloridrato della base dispiegò azione sui generis cioè paralizzante sui batraci e più energica e convulsivante sugli animali a sangue caldo: locchè per la sua singolarità meriterebbe studio speciale.

« L'autore descrive l'azione del veleno sui sacchi linfatici, sui centri nervosi, sui nervi, sul cuore anche isolato, e sui muscoli, corredando i risultati con opportune rappresentazioni grafiche.

Alla vostra Commissione il lavoro è parso ben condotto, ed abbastanza importante per l'argomento e pei risultati ottenuti, per cui essa non esita proporne all'Accademia la stampa nei suoi Atti, sperando che l'autore vorrà dirigere la sua attività anche allo studio chimico della ptomaina in discorso.

Esperienze sopra l'azione fisiologica delle basi tossiche dell'orina normale

Memoria del dott. VITTORIO ADUCCO.

(con due tavole)

Ho comunicato alla R. Accademia di medicina di Torino i risultati delle ricerche chimiche che eseguii sopra una base tossica che estrassi dalle orine di soldati dopo delle lunghe marcie [1].

Le orine vennero raccolte in periodi diversi, prima, durante e dopo la marcia; e le singole porzioni sottoposte allo stesso trattamento per estrarne gli alcaloidi tossici.

Appena raccolte venivano acidulate con quel tanto di acido tartarico che era sufficiente per dar loro un'acidità corrispondente all' uno p. $^0/_{00}$ di acido solforico.

Su una piccola quantità si cercava se c'era dell'albumina ed, anche seguendo le indicazioni di Posner, non ottenni mai una reazione veramente distinta. Lo stesso si dica dello zucchero.

Quindi si evaporava a secchezza, parte a bagno-maria (temp. fra 35° e 40°) parte nel vuoto, si esauriva con alcool a 98° puro; l'estratto alcoolico, evaporato perfettamente nel vuoto e di reazione acida, veniva lavato più volte con etere anidro e puro, alcalinizzato con bicarbonato sodico in quantità proporzionatamente eguali e nuovamente esaurito con etere. Il residuo dell'estratto etereo alcalino veniva ripreso con pochi cent. cub. di soluzione allungata di acido cloridrico, lavato parecchie volte con etere, alcalinizzato e spossato con etere. Sopra il residuo ottenuto da questo secondo trattamento si ripeterono ancora una volta le operazioni suddette. L'ultimo estratto etereo alcalino fornì un residuo non cristallizzato fortemente alcalino, che venne sciolto in poche goccie di soluzione cloridrica, evaporato a secchezza, e pesato più volte fino a che il peso rimase invariabile anche facendo agire ulteriormente il vuoto.

Il cloridrato così ottenuto aveva un odore leggermente viroso, un colore rosso bruno, una consistenza come di resina, non era cristallizzato, aveva un sapore amarognolo piccante ed una reazione leggermente acida. Conteneva azoto.

Col cloruro di platino, col cloruro d'oro, con l'acido tannico, con l'acido picrico, col sublimato corrosivo, con la soluzione iodurata di ioduro di potassio, col ioduro doppio di mercurio e di potassio, con gli acidi fosfo-antimonico, fosfo-molibdico,

[1] La comunicazione venne fatta nella seduta del 7 luglio 1887 ed il lavoro fu stampato nel num. 6-7-8 del Giornale della R. Accademia, di medicina anno 1887.

fosfo-tungstico dava dei precipitati, alcuni cristallini altri amorfi. Sul ferricianuro di potassio e sul cloruro ferrico agiva come riducente.

Dal cloroplatinato si ottenne 31,02 % di platino.

Paragonando le reazioni della base estratta dalle orine dei soldati con quelle che Marino Zuco dà come più caratteristiche per la neurina (base ossietilica) e che Brieger riferisce per la neurina (base vinilica) mi convinsi che nel caso presente si trattava di una base che non era nè la neurina, nè la colina.

Nella seguente tabella sono indicate le quantità di cloridrato dell'estratto etereo alcalino ottenuto dalle orine emesse dai soldati prima, durante ed in varî periodi dopo la marcia:

Momento in cui si emise l'orina	Epoca della esperienza	Soldati che la eseguirono	Quantità di orina ecc.	Quantità di Cloridrato in tutto	Quantità di Cloridrato ‰
				gr.	gr.
Mattino prima della marcia.	ottobre 5 e 13	82° fanteria	12000	0,0424	0,00353
Subito dopo la marcia. . . .	maggio 4	5° bersaglieri	13000	0,0598	0,0046
» » »	» 8	»	7000	0,0660	0,0095
» » »	» 4	56° fanteria	16000	0,0950	0,0059
» » »	» 8	»	18000	0,1080	0,0060
» » »	ottobre 5 e 13-14-15	82° fanteria	15200	0,0690	0,0045
6 ore dopo la marcia	maggio 4	5° bersaglieri	13000	0,0618	0,0047
» » »	» 8	»	11400	0,0870	0,0076
Mattino successivo alla marcia	» 4	56° fanteria	12500	0,0290	0,00232
» » »	ottobre 6 e 14-15-16	82° »	19900	0,0780	0,0039
24 ore dopo la marcia. . . .	maggio 9	56° »	9000	0,0496	0,0055

Da questa tavola si vede che le orine emesse subito dopo la marcia e quindi elaborate nel periodo di un lavoro muscolare intenso contengono una quantità notevole per mille cc. di una base organica, avente le reazioni generali degli alcaloidi (da 0,0045 a 0,0095 ‰).

Le orine emesse al mattino prima della marcia dopo una serie di giorni di riposo ne contengono una quantità minore e meno ancora ne contengono le orine emesse nel mattino succcessivo al giorno di marcia, cioè elaborate durante il sonno e durante il riposo che susseguono alla fatica. Sei ore dopo la marcia ne viene eliminata con le orine una quantità poco minore di quella che si aveva nelle orine emesse durante la fatica.

Infine nel giorno successivo ad una marcia, ossia 24 ore dopo un lavoro faticoso, la quantità di sostanze basiche azotate che passa nelle orine è considerevole (0,0047-0,0076 ‰).

Debbo notare che, non avendo ancora fatto delle determinazioni, che esprimano la quantità di base contenuta nelle orine del riposo durante la veglia, non posso dire quale rapporto quantitativo esista tra le basi tossiche della fatica e quelle del riposo.

Le ricerche, che espongo nelle pagine seguenti, vennero fatte con il cloridrato della base estratta dalle orine emesse prima, durante e dopo un faticoso lavoro muscolare.

I.

Azione generale del cloridrato dell'estratto etereo alcalino delle orine.

Le proprietà fisiche e le azioni chimiche mi avevano già convinto che la base estratta dalle diverse porzioni di orina tanto da quelle emesse nel riposo, quanto da quelle emesse durante la fatica, era una sola. Per assicurarmene vieppiù preparai di ciascuna base una soluzione di cui mi servii per le ricerche fisiologiche. Le prime esperienze fatte mi accertarono che non vi era diversità di azione tra l'una e l'altra per cui nelle esperienze successive le adoperai promiscuamente.

A. — *Azione sopra le rane.*

Numerose esperienze fatte sopra rane esculente dello stesso peso mi hanno dimostrato che la dose minima mortale del cloridrato dell'estratto etereo alcalino corrisponde a gr. 0,0016 per 10 gr. di rana. Le rane, che hanno ricevuto nel sacco linfatico dorsale una dose di veleno inferiore alla mortale, presentano una serie di fenomeni di cui si può vedere la successione nell'esperienza seguente:

Rana esculenta del peso di 27 gr.

In questa rana per quattro giorni contai i movimenti dell'apparato ioideo eseguiti in 30″. La rana ne fece in questi giorni un numero variabile tra un maximum di 87 nel pomeriggio ed un minimum di 68 nelle ore antimeridiane. (Su moltissime rane, che ho osservato per le mie esperienze, trovai costantemente questo fatto che il numero dei movimenti respiratorî del pavimento della bocca è più grande nelle ore pomeridiane che non nelle ore antimeridiane).

3, VII, 86, ore 3,10 p. Si iniettano nel sacco linfatico dorsale di questa rana $^4/_{10}$ di cc. di soluzione di cloridrato dell'estratto di orina corrispondenti a gr. 0,00232 di sostanza. Subito dopo l'iniezione la rana fa dei violenti movimenti.

3,11. La rana boccheggia: l'orlo delle mandibole è arrossato e tumido. Rimane immobile cogli occhi spalancati protuberanti; è come stupefatta.

3,12. La pupilla è midriatica. Ha raggiunto un diametro doppio di quello che aveva prima. Si può far girare rapidamente il piatto, sul quale la rana si trova, senza che questa faccia alcun movimento. Afferrata per una zampa e sollevata si lascia cadere ciondoloni.

3,14. Non si conta alcun movimento del pavimento boccale in 60″.

3,21. Messa sul dorso non vi rimane.

3,25. Si osservano alcuni movimenti sottoioidei; 12 in 30″ a forma periodica. Se si mette sul dorso vi rimane. La pelle delle estremità è molto arrossata.

3,32. La rana che da qualche minuto stava coricata sul dorso tenta rialzarsi spontaneamente, movendo le zampe posteriori, ma non ci riesce. Bulbo oculare accasciato.

3,43. La rana sta sempre supina colle zampe anteriori aperte, senza muoversi punto. 15 mov. sottoioidei in 30″.

3,45. È eccitabile.

3,52. Scuotendo fortemente il piatto non si osserva alcun movimento. Messa sull'addome e stimolata fa dei tentativi di salto. L'occhio è diventato protuberante e spalancato.

3,58. Movimenti sottoioidei 12 in 30″. La forma del respiro è intermittente.

4,02. Si contano 10 battiti cardiaci in 10″.

4,17. Si contano 13 battiti cardiaci in 10″.

Dopo essere rimasta 1 minuto circa senza respirare, nei 30″ consecutivi fa 7 movimenti ioidei. Messa sul dorso rimane sempre immobile. Toccata con le dita, reagisce.

4,23. La rana messa sull'addome non si regge sulle zampe e rimane adagiata sull'addome e sul torace, toccando il piatto col muso; le zampe anteriori molto divaricate, le posteriori allungate. Se si pinzettano le zampe presenta dei piccoli movimenti a scossa di tutto il corpo. Occhio protuberante e vivace: pupilla larga: movimenti ioidei scarsi.

4,40. Molto più sensibile. Messa sul dorso riesce a rialzarsi quantunque a stento. Pinzettata leggermente ritira le membra al corpo.

4,52. La rana è molto rimessa. Ha preso una posizione quasi normale.

5,45. 78 movimenti ioidei in 30″. È completamente rimessa.

Si vede da questa esperienza che avvelenando una rana con dosi non mortali di cloridrato dell'estratto etereo alcalino di orina (1) si hanno dei fenomeni paragonabili a quelli che si ottengono con le sostanze ipnotiche. Infatti nella nostra rana si osservò perdita della coscienza, scomparsa dei movimenti volontarî, diminuzione considerevole della sensibilità, dei movimenti respiratorî e cardiaci.

Quando si inietta ad una rana la dose mortale di sostanza, allora i fenomeni di avvelenamento sono più accentuati, appaiono più rapidamente e con maggiore violenza. Portiamo, come esempio, quest'altra esperienza.

Rana esculenta del peso di gr. 27,5.

Nei 4 giorni che precedettero quello in cui si fece l'esperienza presentò da 94 a 67 movimenti del pavimento boccale.

3, VIII, 86, ore 3,36. Si inietta 1 cc. di soluzione di cloridrato dell'estratto etereo nel sacco linfatico dorsale equivalente a gr. 0,0058 di sostanza. La rana, che era molto vivace, rimane subito immobile. Movimenti ioidei 30 in 30″ dei quali 18 profondi e lenti, e 12 superficiali e celeri. La pupilla si è molto ristretta.

3,40. Il respiro è arrestato. La rana ha le zampe anteriori allungate lungo l'addome.

3,46. La pupilla si è dilatata. Se si mette la rana sul dorso, vi rimane. È molto sensibile. Appena toccata alle zampe reagisce. Occhi depressi e chiusi.

4,04. È completamente immobile. Lasciata cadere rimane nella posizione in cui cade, senza presentare alcun movimento. Però pinzettata fortemente presenta nelle zampe posteriori ancora alcuni movimenti riflessi. Se si pinzettano le zampe anteriori, non reagisce.

4,09. La rana, essendo supina, fa alcuni leggeri movimenti spontanei colle zampe posteriori come per rialzarsi, ma non ci riesce. Non muove le anteriori. La pupilla è molto stretta.

4,14. Toccata colle dita, reagisce una prima volta soltanto e poi non più.

4,15. 8 battiti cardiaci in 10″.

4,40. È nella più completa immobilità. Le membra sono rilasciate e flaccide. Si può dar loro qualunque posizione. Una porzione di liquido iniettato non è ancora assorbita.

4,52. 20 battiti cardiaci in 30″. Non reagisce più agli stimoli meccanici.

4,55. Un eccitamento elettrico indotto che si sente bene sulla lingua (rocchetto indotto a 12 cm. di distanza dall'inducente) applicato lungo la midolla spinale non produce movimenti negli arti:

(1) Nel corso di questo lavoro per brevità indico molte volte col nome di leucomaina dell'orina questo cloridrato dell'estratto etereo alcalino.

applicato sui muscoli genera contrazione. Applicato sul decorso dello sciatico dà luogo a contrazione dei muscoli della gamba e delle dita.

5,10. Si scopre lo sciatico di un lato e si applicano gli elettrodi sopra di esso. Una corrente molto debole (40 cm. di distanza tra i due rocchetti) ha per effetto delle forti contrazioni del gastrocnemio. Questo debolissimo stimolo posto direttamente a contatto dei muscoli della coscia li fa contrarre. 21 battiti in 30″. Pupilla molto stretta. Il colore della pelle è molto più cupo.

ore 6. Battiti 19 in 30″.

6,35. Battiti 17 in 30″.

Il mattino successivo il cuore è fermo in sistole. Pallido, duro. Pupilla puntiforme. Membra flaccide meno il treno posteriore che è leggermente irrigidito.

Stimolando uno qualunque dei muscoli del corpo con una corrente indotta (13 cm. di distanza) si ha contrazione. Si ha pure leggero movimento della zampa eccitando lo sciatico dall' altro lato tanto attraverso ai tegumenti quanto dopo averlo isolato e separato con un taglio dalla midolla spinale. La pelle ha riacquistato il primitivo colore verde chiaro.

Da queste e da molte altre esperienze fatte sulle rane si deduce che la base tossica estratta dalle orine ha negli animali a sangue freddo l'azione di paralizzare i centri nervosi encefalici e rachidiani lasciando relativamente illesi i nervi periferici ed i muscoli, come pure i ganglî periferici, ad es. i ganglî cardiaci. Sopra di questi l'azione del veleno si manifesta assai più lentamente. Si notò pure, specialmente quando si somministrarono delle dosi non mortali, che le rane erano molto più facilmente esauribili. Ad es. una rana, che qualche secondo prima aveva reagito con discreta energia ad uno stimolo, non era più capace di reagire allo stesso stimolo applicato subito dopo. Solo dopo un periodo di riposo reagiva nuovamente. Vedremo ripetersi lo stesso fatto anche negli animali a sangue caldo e troveremo una conferma di ciò nel capitolo che tratta dell'azione delle leucomaine dell'orina sopra il sistema neuro-muscolare.

B. — *Azione sugli animali a sangue caldo.*

Le esperienze fatte sopra dei topolini, dei passeri, dei piccioni e delle cavie dimostrarono che le dosi mortali sono più piccole negli animali a sangue caldo che non negli animali a sangue freddo. Inoltre si è visto che l'azione del cloridrato della base estratta dall'orina si manifesta molto più rapidamente negli animali a sangue caldo ed anche con maggiore energia. Infine la morte negli animali a sangue caldo avviene con dei fenomeni molto diversi da quelli che si hanno nei batraci.

Esperienza 1ª. — Topolino, che pesa 15 gr.

ore 2,5 p. Si inietta nella cavità addominale $^1/_{10}$ di cc. di soluzione di cloridrato di leucomaina cioè gr. 0,00058 di sostanza.

2,7. Corre rapidamente sul piatto.

2,8. Tiene il muso inclinato sul piatto. Ha gli occhi largamente aperti. Ha un tremito generale che si manifesta specialmente nei movimenti, che il topino tenta di fare. Cammina male e con le gambe divaricate. Coda rigida ed estesa. Muove la testa come per vomitare. Orecchie pallide.

2,12. Il tremito ha preso la forma di un accesso stricnico ed è molto aumentato.

2,13. Vere convulsioni. Si rovescia sul dorso. Contrazioni tetaniche. Lacrimazione abbondante. Espulsione delle orine. Pupilla dilatata. Pallore generale. Arresto del respiro.

2,14. Morte.

Esperienza 2ª. — Ad un altro topolino che pesa pure gr. 15

inietto nell'addome $^1/_{10}$ di cc. di soluzione curarica che ha lo stesso titolo della soluzione di cloridrato di leucomaina. Un minuto dopo si osserva che la respirazione è difficile. Si hanno alcuni movimenti convulsivi leggeri. Spalanca la bocca per respirare. Occhi spalancati. Arresto del respiro. Morte. Cianosi delle mucose.

Esperienza 3ª. — Passero del peso di gr. 25.

ore 8,37 a. Si inietta $^1/_{10}$ e $^1/_2$ di cc. di soluzione di cloridrato di leucomaina nei muscoli del torace (cioè gr. 0,00087 di sostanza).

Dopo l'iniezione fa alcuni giri sbattendo le ali. Poi si corica sul fianco. Chiude gli occhi, si lascia mettere in qualunque posizione, fa delle piccole grida. È insensibile nelle estremità, anche pizzicandole fortemente. Respiro lento. Sforzi inspiratorî con la bocca.

8,38. Leggero tremito nelle estremità posteriori.

8,39. Muscoli del collo contratti fortemente. Tetano opistotono.

8,40. Arresto del respiro. Movimenti rapidi della coda e del treno posteriore. Morte.

Esperienza 4ª. — Passero del peso di gr. 25.

ore 8,41 a. Iniezione di $^1/_{10}$ di cc. di soluzione di cloridrato della base delle orine = gr. 0,00058.

Dopo essersi per alcuni secondi agitato fortemente si adagia sul fianco. Ha il respiro affannoso. La testa poggiata sul piatto; la bocca aperta.

8,42. Emette delle piccole grida. L'occhio ha chiuso. Messo sul dorso rimane immobile.

8,44. Respiro profondissimo. 23 respiri in 10″. Subito dopo 20 in 10″, poi 15 in 10″, poi 18, poi 16 in 10″. Estremità posteriori estese.

8,45. 14 respiri in 10″. Estremità rigide. Le dita sono chiuse a pugno. Per cui non può più reggersi sulle zampe. Quando si muove, si aiuta con le ali e si trascina dietro le zampe irrigidite ed estese. È sensibile. Appena toccato sbatte le ali e grida. In questo momento l'azione della leucomaina è con evidenza tetanizzante. La sensibilità pare esagerata.

8,48. 22 respiri in 10″. Può muovere liberamente la testa in tutti i sensi. Ha l'occhio vivace.

8,52. Fa dei violenti sforzi per alzarsi sulle zampe ma non vi riesce. 17 respiri in 10″.

8,53. Può già fare alcuni movimenti imperfetti con le zampe. 21 respiri in 10″. Sta quasi continuamente corico sul fianco.

8,55. Si mette in una posizione analoga a quella di chi siede.

8,59. Ha le penne arruffate. Occhi chiusi.

9,05. 50 respiri in 20″: forma periodica remittente.

9,10. Riesce a reggersi sulle zampe, aiutandosi anche con la coda. Però si stanca subito e ricade come spossato dallo sforzo eseguito, tenendo gli occhi chiusi.

9,13. Si rimette in piedi e ci sta per un certo tempo. Un piccolo sforzo lo esaurisce e lo fa rimanere come addormentato. 30 respiri in 10″. Persiste la forma periodica.

9,40. Si è messo nella posizione di un uccello che dorme col capo ripiegato verso l'ala, appoggiandosi al tavolo con le zampe e con l'apice della coda.

10,00. Pare rimesso. Lo chiudo nella gabbia.

3,45 p. Trovo il passero con le piume arruffate. Occhi chiusi. Atteggiamento stanco, abbattuto. Si regge sulle ginocchia. Presenta un rapido movimento di estensione del capo accompagnato da una scossa di tutto il corpo e che ha l'apparenza di un singhiozzo.

3,50. Perde le feci. Fa dei movimenti per camminare. Il corpo cade in avanti. Poggia il becco sul tavolo, spinge con le zampe, dà dei colpi, poco forti però, di ala, ed in questo modo riesce a strisciare sul suolo col petto e col becco.

3,54. Ha un accesso di convulsioni. Con i movimenti incomposti, disordinati e rapidi, che fa con le

ali e con le zampe. si rovescia sul dorso e così rimane parecchio tempo. Anche comprimendo fortemente le zampine non si ha reazione.

3,56. Cerca di mettersi nella posizione normale facendo dei movimenti di volo con le due ali o con una sola, ma non riesce che a spostarsi. Solo dopo parecchi tentativi si volge sul fianco destro. Questi movimenti però non sono coscienti, giacchè, essendo riuscito una volta a volgersi sull'addome, non per questo cessò di agitarsi, di muovere ali e zampe, ma continuò finchè di nuovo cadde sul fianco e si rovesciò sul dorso. Sono veri accessi di convulsioni cloniche degli arti e del capo. Nell'intervallo tra un accesso e l'altro si hanno dei piccoli movimenti per cui le ali si stringono al tronco e le gambe si flettono sulle coscie ed i tarsi sulle gambe. Paiono movimenti di espirazione forzata.

4,2. Repentinamente dopo alcuni movimenti del capo irrigidisce le zampe, arrovescia la testa, raccoglie le piume al tronco; si arresta il respiro. Apre e chiude rapidamente le palpebre e muore.

4,30. Fortemente rigido.

Mentre negli animali a sangue freddo la base estratta dalla orina ha un' azione paralizzante, negli animali a sangue caldo l'azione è specialmente tetanizzante. I fenomeni di paralisi sopravvengono solo negli ultimi periodi dell'avvelenamento e si manifestano sul centro respiratorio.

Ho pure fatto delle ricerche comparative tra l'azione della base estratta dall'orina e l'azione della neurina ([1]). Vedremo in seguito quali differenze esistano tra l'azione di questi due veleni. Posso fin d'ora accennare che essi, per ciò che si riferisce all'azione fisiologica, sono caratterizzati da proprietà speciali, che ne fanno due veleni distinti.

II.

Azione sopra il circolo sanguigno e gli organi circolatori.

La prima cosa, che ho osservato, è un considerevole arrossamento degli arti, visibile specialmente sulla faccia ventrale dell'animale. La paralisi vasomotoria compare già quando la rana è ancora capace di muoversi spontaneamente. Questo arrossamento è pure notevole intorno alle narici ed al margine libero delle mandibole.

([1]) Avverto fin d'ora che la neurina (cloridrato) da me adoperata nelle esperienze comparative si trovava in laboratorio da non so quanto tempo, per cui, prima di farne uso, mi assicurai che non avesse per caso subìto alterazione. A tale scopo lavai più volte con etere il cloridrato di neurina, poscia resi libera la base, alcalinizzando, quindi estrassi con etere. Neutralizzai l'estratto etereo con soluzione diluita di acido cloridrico, Questa soluzione trattata con acido tannico fornì un abbondante precipitato biancastro. Dopo filtrazione ottenni ancora un precipitato giallo col reattivo di Meyer, quantunque avessi adoperato nella prima reazione un eccesso di acido tannico. In segnito concentrai la soluzione con l'evaporazione, trattai con cloruro di platino ed alcool assoluto. Ottenni in 24 ore un abbondante precipitato giallo costituito in gran parte di bei cristalli ottaedrici di color giallo carico. Filtrai, lavai molte volte con alcool finchè questo non diede più precipitato nero con l'acido solfidrico o giallo col cloruro di ammonio. Determinai il platino del cloroplatinato. Avendo fatto parecchie determinazioni ottenni un minimo di 33, 11 % di platino ed un massimo di 34, 02 %, essendo 33, 96 la quantità calcolata per la neurina (base vinilica). Questo cloroplatinato era pochissimo solubile nell'acqua fredda, però una parte se ne scioglieva dando alla soluzione un bel colore giallo paglierino. Riscaldando se ne scioglieva un po' di più che col raffreddamento di nuovo precipitava. Queste ricerche dimostrano che la sostanza da me usata conteneva una miscela di neurina (base vinilica) e di colina (base ossietilica) e che la prima era in quantità maggiore.

Se a questo punto si osserva al microscopio o la membrana interdigitale, o il mesenterio, o il polmone si vede che la circolazione del sangue si compie lentamente (¹).

Questi fatti si osservarono anche nelle rane nelle quali la respirazione si era rallentata benchè non cessata del tutto.

A. — *Azione della leucomaina sul cuore di rana separato dall'organismo.*

Esperienza I.

Tempo	Num. dei battiti in 60″	Osservazioni	Tempo	Num. dei battiti in 60″	Osservazioni
9.45 a.	39		9.53 a.	32	L'energia con cui il ventricolo si contrae è molto minore.
46	34	2 goccie di soluzione di cloridrato dell'estratto di orina (1 cc. contiene gr. 0,00792) vengono poste sul cuore, il quale si trova in un vetro da orologio.	54	30	
47	35		55	29	
48	35		56	28	
49	34		57	27	
50	34		58	27	
51	35		59	25	
52	33		10.00	24	
			01	23	

Contemporaneamente a questa esperienza ne ho fatta un'altra in cui però invece di avvelenare il cuore con estratto di orina, lo trattai con 2 goccie di soluzione 0,75 °/₀ di cloruro di sodio.

Esperienza II.

Tempo	Num. dei battiti in 60″	Osservazioni	Tempo	Num. dei battiti in 60″	Osservazioni
9.45 a.	26		9.53 a.	48	
46	30	2 goccie di soluzione normale 0,75 °/₀ di cloruro sodico.	54	50	
47	30		55	47	
48	32		56	47	Le contrazioni sono energiche e regolari.
94	32		57	48	
	40		58	47	
51	48		59	48	
52	49		10.00	48	
			01	47	

(¹) Più tardi ho ripetuto questa osservazione con una piccola quantità di leucomaina, che mi restava, valendomi del metodo proposto dal prof. Oehl (Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino vol. XXIII, Adunanza del 4 dicembre 1887). Questo metodo consiste nell'esaminare la circolazione del sangue nei piccoli animali e specialmente nelle rane con degli obbiettivi smontati e tali da produrre un ingrandimento di 5 - 10 diametri. Oltre ad altri vantaggi si ha quello di non produrre alcuna compressione. Il risultato fu identico a quello ottenuto prima.

In altre esperienze ho adoperato 5 goccie di soluzione di cloridrato dell'estratto e nella esperienza di controllo 5 goccie di soluzione di sal di cucina.

Nella tavola seguente il segno + indica il momento in cui si fece agire la sostanza sul cuore. Le lineette (—) rappresentano ciascuna un minuto primo in cui non si contarono i battiti.

ESPERIENZE III, IV, V, VI.

III Azione estratto	IV Azione estratto	V Azione estratto	VI Azione NaCl
Numero dei battiti cardiaci in 60 secondi			
43	42	37	48
— +	40	35	—
42	47	34	48
41	48	34	—
40	— +	— +	49
40	48 più deb.	35	— +
38	47	34	—
28	48	34	51
25	32	31	—
25	31	28	—
25	28	27	—
24	—	26	50
20	—	24	—
	—	23	49
	23	—	—
	—	—	—
	23	23	48
	—	—	—
	22	21	—
	—	19	47
	—	—	—
	22	19	—
	—	—	—
	—	—	—
	—	19	—
	—	—	48
	—	—	—
	—	17	—
	21	—	—
		17	—
			—
			48
			—
			—
			—
			—
			—
			—
			47

Nelle esperienze precedenti il cuore della rana veniva estirpato, posto in un vetrino da orologio e la sostanza si lasciava cadere a goccie sopra di esso.

Ho pure fatto delle altre esperienze servendomi dell'apparecchio a circolazione artificiale di Roy. Preferii questo apparecchio a quello di Williams [1] per le seguenti

[1] F. Williams, *Ueber die Ursache der Blutdrucksteigerung bei der Digitalin Wirkung*. Arch. f. experimentelle Pathologie und Pharmakologie. Bd. XIII, 1881 p. 1-13 (con 2 tavole).

ragioni: 1° Perchè la curva che si ottiene è più alta. 2° Perchè nell' apparecchio di Williams le condizioni in cui si trova il cuore sono troppo diverse dalle normali. Infatti normalmente le sostanze introdotte nell'organismo vengono a contatto col cuore per la sua superficie interna e lo avvelenano circolando. Nell'apparecchio di Williams invece nel cuore circola un liquido normale, mentre il cuore stesso è immerso in una soluzione avvelenata. 3° Nell'apparecchio di Roy si può più facilmente e più rapidamente cambiare il liquido che si vuol far agire sul cuore.

Riferirò tre delle esperienze fatte con l'apparecchio di Roy.

Esperienza I.

Questo cuore per qualche minuto funziona a periodi. Poi prende a contrarsi regolarmente. Allora in α (vedi fig. I, tav. I) faccio passare una soluzione formata di 10 cc. di siero sanguigno e di 3 cc. di una soluzione di cloridrato della base estratta contenente gr. 0,0058 per cc. Il cuore fa ancora 10 contrazioni normali, poi si hanno tre contrazioni più rare, ma della stessa altezza. Succede una lunga pausa, una contrazione della stessa altezza, un'altra pausa, una contrazione più bassa. In questo tempo la tonicità del cuore è leggermente aumentata e la ascissa si innalza alquanto. Le contrazioni successive sono un po' più frequenti ma la loro altezza diminuisce rapidamente fino a diventare quasi impercettibile. Se allora si chiude il passaggio al sangue avvelenato e si fa circolare del siero normale (ω), il cuore ripiglia lentamente a battere, le contrazioni diventano poco per volta più frequenti e più energiche fino a raggiungere l'altezza primitiva dopo 7 od 8 minuti. Ciò si vede nel principio della fig. II che è la continuazione del tracciato precedente.

Quando il cuore si è completamente ristabilito faccio (fig. II) nuovamente passare il siero avvelenato (α). Questa volta dopo 13 contrazioni, in cui nulla è cambiato, comincia a diminuire la energia dell'impulso cardiaco. La diminuzione dapprima è lenta, poi rapidissima e va fino all'arresto completo del cuore. Questa seconda volta, anche dopo aver fatto circolare lungamente del siero normale, il cuore non si ripristina più completamente, ma solo in parte.

Entrambe le volte si ebbe arresto diastolico, come dimostrano i due tracciati.

Esperienza II.

È un cuore più piccolo del precedente. In questo cuore si fa agire anzitutto una soluzione di cloridrato di neurina nel siero sanguigno. Il liquido così ottenuto contiene una dose di neurina che equivale in peso al doppio della dose di estratto d'orina che si usa in queste esperienze.

Il liquido contenente cloridrato di neurina comincia ad agire in α: ma, anche dopo 8 minuti di azione, non produce alcun effetto (fig. III). Allora si lava il cuore facendo circolare del siero normale. Finita la lavatura faccio passare, al segno α, la soluzione di cloridrato della base tossica (fig. IV). Dopo 22 contrazioni, delle quali le 6 ultime rapidamente decrescenti, il cuore si arresta in diastole; malgrado la lavatura, non fa più che 10 contrazioni debolissime e poi rimane immobile ed ineccitabile anche per gli stimoli meccanici [1].

[1] L'innalzarsi rapido della curva della fig. IV nella sua seconda metà è dovuto a ciò che in quel momento si dovette arrestare il passaggio del liquido dal serbatoio verso il cuore.

Esperienza III.

Cuore assai piccolo e con un impulso debole. Si fa agire da α ad ω un siero che contiene una dose di cloridrato di neurina tripla della dose di estratto di orina (fig. V). Malgrado questa concentrazione relativamente grande il cuore continua a lavorare con la stessa energia, con la stessa frequenza e con lo stesso ritmo. Si lava con siero normale. Quindi si fa passare in α il siero avvelenato con estratto di orina (fig. VI). Il cuore si contrae ancora 15 volte con energia ognora minore poi si arresta in diastole. La circolazione di siero normale gli ridona la funzione. Ma le contrazioni sono dapprima rare deboli e periodiche, poi la periodicità scompare, ma i battiti sono sempre rari ed assai deboli.

B. — *Azione dell'estratto etereo alcalino sopra il sangue.*

Mentre facevo queste esperienze ho notato il seguente fatto. Tutte le volte che ad un siero, che conteneva in sospensione dei globuli rossi, si aggiungeva la soluzione di cloridrato di estratto etereo alcalino, il liquido risultante prendeva un colore scuro. Se invece si aggiungeva la soluzione di cloridrato di neurina il colore rimaneva rosso rutilante.

Esame spettroscopico. Lo spettroscopio era disposto in modo che la stria di assorbimento del sodio si estendeva dalla divisione 95 alla 100 della scala micrometrica. Una soluzione di sangue normale esaminata in queste condizioni presenta le due strie solite dell'ossiemoglobina, di cui la prima occupa lo spazio tra le divisioni 100 e 114, la seconda che è più sfumata va da 125 a 150. Si aggiungono otto goccie di neurina 25 °/₀. Non si osserva alcuna modificazione anche un'ora dopo. Aggiungo 15 goccie. Un'ora dopo si fa nuovamente l'esame che è affatto negativo. Dunque la soluzione di neurina da me adoperata non produsse alcuna alterazione nella sostanza colorante del sangue.

Faccio la stessa esperienza con la soluzione del cloridrato di estratto d'orina. Già dopo pochi minuti la soluzione di sangue, che ha reazione neutra, ha preso un colore scuro ed allo spettroscopio presenta una sola stria di assorbimento, ma così tenue che è impossibile stabilirne i limiti. Un'ora dopo la soluzione è diventata di colore caffè chiaro, e allo spettroscopio non si riesce a percepire alcuna stria di assorbimento ben distinto. La parte però di spettro che sta dopo il giallo ed il verde è leggermente oscurata.

Quindi bisogna concludere che il cloridrato della base estratta dalle orine si comporta, relativamente alla ossiemoglobina, in modo molto più energico del cloridrato di neurina. Mentre quest'ultimo non produce alcun cambiamento, quello invece trasforma dapprima l'ossiemoglobina in emoglobina ridotta quindi scompone ulteriormente la sostanza colorante del sangue.

Il prodotto ultimo della scomposizione è probabilmente dell'ematina, ma non ho potuto determinarlo con certezza, quantunque il colore della soluzione ottenuta me lo faccia credere. Così pure non ho potuto assicurarmi se vi fosse fermazione di metaemoglobina come primo stadio dell'azione della leucomaina

L'esame microscopico del sangue trattato con neurina e di quello trattato con la

base tossica dell'orina, non dimostrò alcuna reale differenza fra l'uno e l'altro. In entrambi i casi i globuli rossi (di rana) erano in massima parte ridotti ad un involucro incoloro, contenente il nucleo ora alla periferia ora al centro, di forma per lo più sferica raramente elittica. I nuclei erano quasi sempre rotondi e un poco rigonfiati. I globuli bianchi parevano inalterati.

C. — *Azione sopra i cuori linfatici.*

Tutte le volte che ho iniettato la base tossica a dose mortale, trovai sempre i cuori linfatici coccigei immobili, quando il cuore sanguigno funzionava ancora.

Perciò, dopo aver studiato l'azione della leucomaina messa direttamente a contatto col cuore sanguigno, ho fatto lo stesso studio pei cuori linfatici. Una piccola porzione di goccia della soluzione di cloridrato di leucomaina messa sui cuori linfatici li arresta quasi immediatamente. L'immobilità dura da dieci a quindici minuti. Poi il cuore linfatico ricomincia a funzionare prima contraendosi debolissimamente e di rado: man mano l'energia ed il numero dei movimenti aumentano fino al normale.

Le soluzioni di cloridrato di neurina allo stesso titolo si comportarono in modo identico. Al contrario, delle soluzioni molto più concentrate di muscarina, di curare, di acido cloridrico, di cloruro di sodio manifestarono un'azione molto più debole.

Mentre era sufficiente una porzione di goccia di cloridrato di estratto etereo alcalino o di cloridrato di neurina per produrre l'arresto istantaneo del cuore linfatico, erano necessarie parecchie goccie di soluzione più concentrata di muscarina o di curare per produrre lo stesso effetto.

Parecchie goccie di una soluzione di acido cloridrico così forte che i tessuti, coi quali veniva a contatto, cambiavano di colore e che i muscoli bagnati presentavano delle contrazioni fibrillari, non valsero ad arrestare i movimenti dei cuori linfatici così presto come il cloridrato di leucomaina.

Una soluzione di cloruro di sodio 0,75 $^0/_0$ non manifesta alcuna azione.

III.

Azione sulla respirazione.

Negli animali a sangue freddo le dosi non mortali producono o arresto passeggiero, o rallentamento del respiro. Dopo un tempo più o meno lungo la funzione respiratoria ridiventa normale.

Se la dose usata è mortale, il respiro si arresta dopo pochi minuti: assai prima che siano cessati i movimenti volontarî ed i movimenti riflessi.

Negli animali a sangue caldo le dosi mortali arrestano il respiro quasi contemporaneamente ai movimenti degli altri muscoli e del cuore. Le dosi non mortali o non alterano od aumentano leggermente la frequenza delle escursioni toraciche. Tanto negli animali a sangue caldo, quanto negli animali a sangue freddo si osserva questo fatto che le dosi non mortali modificano il ritmo respiratorio, rendendolo periodico. In alcune rane osservai distinta la forma intermittente, in un passero si presentò una forma remittente.

IV.

Azione sopra i centri nervosi, sopra i nervi e sopra i muscoli.

A. *Sistema nervoso.*

Nelle prime pagine di questo lavoro ho riferito una delle esperienze fatte sulle rane con dosi mortali. Da questa esperienza risulta che fu sempre possibile ottenere dei movimenti della zampa stimolando il nervo sciatico, oppure direttamente i muscoli. Anche quando l'avvelenamento era arrivato alle ultime conseguenze (cioè ad arrestare le contrazioni del cuore), i nervi motori ed i muscoli erano ancora capaci quelli di trasmettere, questi di ricevere gli impulsi che partivano da un punto del nervo situato tra la periferia ed il centro.

Al contrario gli stimoli anche fortissimi portati lungo la midolla spinale non destavano alcun movimento negli arti. Questo stato dei centri nervosi è sufficiente per spiegarci la scomparsa dei movimenti volontarî e dei movimenti riflessi.

Per confermare sempre più l'esattezza di queste osservazioni scoprii ed isolai in una rana uno degli sciatici, poscia strinsi con un laccio i tessuti della coscia in modo da impedire completamente la circolazione. Preparai cioè la rana come faceva C. Bernard nelle sue esperienze sopra il curare per dimostrare che esso agisce sopra i nervi motori e non sopra i nervi sensibili. In una rana così preparata la iniezione della dose mortale di estratto etereo alcalino agì in modo tale che, stimolando anche con correnti fortissime la pelle della rana in qualunque località, non si ebbe mai alcun movimento neppure nei muscoli dell'arto sottratto alla circolazione. Stimolando invece direttamente i nervi sciatici si aveva contrazione dei gastrocnemî corrispondenti tanto a destra che a sinistra. La contrazione però era assai meno energica dal lato non legato.

Il modo con cui avviene la scomparsa dei movimenti, che cioè prima scompaiono i volontarî mentre persistono ancora i riflessi, poi anche questi cessano, il modo con cui si comportano i nervi motori, che anche negli ultimi stadî dell'avvelenamento trasmettono gli stimoli ai muscoli, mi fa credere che l'azione di queste leucomaine, nelle dosi da me usate finora, si manifesti in modo preponderante sulle parti centrali del sistema nervoso lasciando relativamente illesi i nervi centrifughi e le loro terminazioni periferiche.

B. *Sistema neuro-muscolare.*

Notai già che gli animali avvelenati con l'estratto etereo alcalino delle orine sono facilmente esauribili. Tanto nelle rane, quanto nei passeri, sui quali ho esperimentato, osservai spesso che, dopo uno sforzo qualunque, o volontario per cambiare posizione o riflesso per uno stimolo periferico, cadevano affranti, come se fossero stremati di forze, con le membra rilasciate ed incapaci di reagire ad uno eccitamento, che sorvenisse subito dopo.

Messo su questa via ho fatto delle ricerche sopra i muscoli per studiarne il decorso della fatica prima e dopo la somministrazione della leucomaina.

Per fare questo studio avevo tre modi:

1° Fare le ricerche sopra uno stesso muscolo.

2° Fare le ricerche normali sopra il muscolo di un arto, e le ricerche dopo l'avvelenamento sopra il muscolo omonimo del lato opposto.

3° Ottenere il tracciato normale da un muscolo o dai due muscoli omonimi di uno stesso animale, ed il tracciato del muscolo avvelenato dallo stesso muscolo o dagli stessi muscoli di un altro animale.

Per ragioni facili a comprendersi non ho seguìto il primo metodo. Un muscolo, che ha già lavorato per un tempo relativamente lungo, non si può considerare come normale, anche dopo un riposo sufficiente. Tutte le manipolazioni operatorie, per quanto fatte con cautela, hanno influenza sulla sua vitalità. Il secondo metodo mi pare offra bastante garanzia. Le prove di controllo che ho fatto mi han dimostrato che le curve dei due muscoli omonimi, scritte anche a breve distanza, differiscono pochissimo.

Quanto al terzo metodo è necessario scegliere rane dello stesso peso, della stessa specie, del medesimo sesso. Attenendosi a queste precauzioni mi sono convinto che le curve della fatica hanno presso a poco la stessa durata, quando siano prese però in condizioni di tempo eguali.

Naturalmente dovevano rimanere invariati tutti gli apparecchi destinati a trasmettere ed a ricevere il movimento ed anche gli apparecchi destinati a provocarlo.

Per ottenere la grafica della fatica mi sono servito del metodo che usarono Pflüger (1), Kronecker (2) e Tiegel (3), per studiare le leggi della eccitabilità e della fatica nei nervi e nei muscoli. Questo metodo servì pure a Guareschi e Mosso (4), per studiare la curva della fatica nelle rane avvelenate con le ptomaine estratte dalla fibrina e dal cervello putrefatti.

Però, siccome nel caso presente si trattava essenzialmente di studiare l'azione della sostanza estratta dalle orine sopra i muscoli e sopra le terminazioni nervose nei muscoli, feci alcune esperienze eccitando il nervo sciatico e ne feci altre portando direttamente gli elettrodi sopra il muscolo gastrocnemio.

1ª Esperienza

Si scrive la curva della fatica del gastrocnemio di sinistra. L'eccitamento che si adopera in questa come nelle seguenti esperienze è una corrente indotta ottenuta da un apparecchio a slitta di Du Bois-Reymond fabbricato da Krüger di Berlino. Questo apparecchio presenta la particolarità di avere da un lato una graduazione in unità elettriche, dall'altro la solita graduazione in centimetri. Inoltre, per graduare la intensità della corrente indotta, fino ad un certo punto (200 unità) si scosta il rocchetto secondario dal primario, in seguito si inclina più o meno il secondario sul

(1) Pflüger, *Untersuchungen über die Physiologie des Elektrotonus*. Berlin, 1859, p. 130.

(2) H. Kronecker. *Ueber die Ermüdung und Erholung der quergestreiften Muskeln*. Arbeiten des physiol. Instit. zu Leipzig. Berichte der königl. Gesellschaft der Wiss. zu Leipzig, 1872, p. 690.

(3) E. Tiegel, *Ueber den Einfluss einiger willkürlich Veränderlichen auf die Zuckungshöhe des untermaximal gereizten Muskels*. Aus dem physiologischen Institut zu Leipzig. Berichte d. Königl. Gesellschaft d. Wiss. zu Leipzig, 1875, p. 81.

(4) S. Guareschi et A. Mosso, *Les ptomaïnes*. Archives italiennes de biologie, t. II, 1882, p. 399.

primario. La corrente costante proviene da 2 pile Leclanché. Metto i due rocchetti ad una distanza tale che il muscolo risponda solo alla corrente indotta di apertura. Lo stimolo si ripete ad ogni minuto secondo ed ha una intensità uguale a 100. Il cilindro che porta la carta affumicata fa un giro in 10 minuti primi.

Prima che il muscolo sia esaurito il cilindro fa un intero giro, vale a dire che il muscolo ha eseguito circa 600 scosse. La maggior parte delle scosse è rappresentata dalla fig. VII.

Dopo stancato il gastrocnemio sinistro si inietta $^1/_2$ cc. di soluzione di cloridrato di ptomaina (cioè gr. 0,00396 di sostanza) sotto la pelle del dorso. Dopo 15 minuti di azione si scrive la curva della fatica del gastrocnemio destro facendo uso di uno stimolo pure uguale a 100 (fig. VIII). Il muscolo fa 141 scosse poi non risponde più agli stimoli. Le prime 60 scosse (le quali per economia di spazio vennero in parte soppresse nella figura) sono regolari, meno alte però delle prime del muscolo sinistro. Già in queste scosse, che sono circa la metà delle altre, la scossa quarantacinquesima manca affatto. Dopo le prime 60 scosse il muscolo risponde in modo irregolare agli stimoli; frequentemente non risponde ad uno stimolo. Poi non risponde a due, a tre, a quattro stimoli successivi, infine cessa completamente di rispondere.

Dopo 50 minuti di azione scrivo un altro tracciato. Il muscolo fa 81 scossa sopra 110 stimoli (fig. IX).

Per ottenere una curva regolare bisogna raddoppiare l'intensità dello stimolo (200). Però anche con uno stimolo doppio le scosse sono molto più basse (fig. X).

2ª *Esperienza* (*eccitazione del nervo*).

In una rana normale, che pesa 50 gr., si scrive la curva della stanchezza del gastrocnemio sinistro (fig. XI tav. II). Poi, dopo 15 minuti di riposo, si scrive quella del gastrocnemio destro (fig. XII). La intensità dello stimolo è uguale a 100. Il peso da sollevare è di 50 gr. (Miografo di Pflüger). I due gastrocnemii danno una curva analoga per altezza, per durata, per decorso. Sono circa 600 scosse delle quali le prime hanno un'altezza di 2 cm. circa. Le scosse, dopo un primo periodo in cui hanno tutte la stessa altezza, per modo che riunendo gli apici con una linea, questa forma una linea retta orizzontale, vanno man mano e regolarmente decrescendo finchè si confondono con l'ascissa. Riunendo gli apici di queste scosse con una linea, questa è una linea retta obliqua che si avvicina sempre più all'ascissa fino a toccarla. Che tale sia il decorso della fatica nelle rane è cosa nota dopo le ricerche di Kronecker e di Tiegel.

3ª *Esperienza* (*eccitazione del nervo*).

Rana che pesa 59 grammi; dello stesso sesso della precedente.

ore 9,7. Movimenti dell'apparato ioideo 135 in 60″.
ore 9,8. Movimenti dell'apparato ioideo 134 in 60″.
ore 9,9. Movimenti dell'apparato ioideo 138 in 60″.

Il colore della pelle è verde bigio chiaro. Dalle 9,14 alle 10,4 si inietta 1 cc. di soluzione di cloridrato di leucomaina nel sacco linfatico dorsale (cioè gr. 0,00792 di sostanza).

ore 10,6. 60 movimenti ioidei in 60″. Irregolari nel ritmo e nell'ampiezza.
ore 10,14. Anche girando rapidissimamente il piatto, nessun movimento.

ore 10,17. Il respiro si è arrestato del tutto.

ore 10,30. Il colore della pelle è molto più cupo. Già da parecchi minuti la rana non si muove più. Solo eccitamenti fortissimi la fanno reagire con dei salti. Si vede però che questi movimenti spossano l'animale. Infatti, se, dopo che li ha eseguiti, solleviamo l'animale, afferrandolo per una delle zampe anteriori, esso rimane penzoloni con le membra rilasciate ed inerti. Il che non avviene mai in rana normale.

ore 10,45. Sta in tutte le posizioni che le si danno. Quando si allungano forzatamente le estremità posteriori, le ritira lentamente. Osservando il torace per riflessione si contano 30 battiti cardiaci in 30″.

ore 10,49. Messa nell'acqua fa dei salti, incurvando il capo ed il tronco come per tuffarsi. Voltata sul dorso si raddrizza subito. Ripetendo la prova rimane sul dorso un tempo sempre maggiore.

ore 11. Schiacciandole le zampe non reagisce più. Ha la nittitante chiusa. La pupilla dilatata. Una corrente indotta, che appena si sopporta sulla lingua, non provoca che movimenti locali. Nulla se applicata lungo la colonna vertebrale. La rana è immobile, abbandonata sul muso, sul torace e sull'addome, con le zampe anteriori inerti e divaricate, le posteriori flaccide ed allungate. I bulbi oculari accasciati, si direbbe morta. Nessun riflesso.

ore 11,8. Dopo aver preparato lo sciatico sinistro si scrive la curva della fatica del gastrocnemio corrispondente (fig. XIII). Poi, dopo 15 minuti di riposo, si scrive quella dell'altro gastrocnemio (fig. XIV). A sinistra basta uno stimolo eguale a 100. A destra, dove il veleno ha agito per un tempo più lungo, si dovette aumentarlo fino a 400, perchè il muscolo rispondesse.

Se prendiamo a considerare queste due curve, vediamo: 1° Che l'esaurimento per la stanchezza compare molto più presto in questi muscoli che in quelli normali, e presso a poco nella metà del tempo. 2° Che la forma della curva non è più regolare come nell'esperienza precedente. Il muscolo della rana avvelenata da leucomaina, dopo aver compiuto una serie di scosse regolarmente decrescenti, ne fa un'altra serie lunghissima in cui l'altezza della scossa decresce molto più lentamente. La forma generale della curva della fatica non è più una linea retta regolarmente obliqua, ma una linea irregolare. Dapprima si ha in questa linea un tratto, che è una curva con la convessità rivolta verso l'ascissa. Poi si ha un secondo tratto più o meno lungo in cui la linea della fatica è una curva con la convessità diretta in senso opposto. Viene in seguito un tratto più lungo in cui la linea della fatica è retta ed obliqua regolarmente come nel tracciato normale. Infine vi è un ultimo tratto molto più lungo, nel quale la linea della fatica è quasi parallela alla ascissa. In questo ultimo tratto l'altezza delle singole scosse diminuisce di quantità quasi impercettibili. 3° Le scosse del gastrocnemio avvelenato rispondono ai primi eccitamenti con energia minore di quella con cui risponde il gastrocnemio normale.

4ª Esperienza.

20 luglio 1886. Ore 3,15 p. Si inietta nel sacco dorsale di una rana $^1/_2$ cc. di soluzione di cloridrato di neurina equivalente a gr. 0,006.

Dopo 10 minuti la rana non respira più. È completamente immobile e sta in qualunque posizione la si metta. Si vede il cuore battere; gli occhi sono chiusi; la pupilla miotica; aboliti i riflessi. Si vorrebbe scrivere la curva della fatica del gastrocnemio, ma si trova che degli eccitamenti uguali a 100, 200, 400, 800, 2000, 4000, 8000, applicati sullo sciatico non producono alcuna contrazione, sia a destra sia a sinistra. Applicati direttamente sul muscolo provocano delle energiche contrazioni e l'esaurimento avviene assai tardi. Ore 5,50. Il cuore batte ancora con forza.

5ª Esperienza (eccitazione diretta del muscolo).

Rana esculenta normale.

Si scrive la curva della fatica del gastrocnemio di sinistra (fig. XV). Dopo 15 minuti di riposo si scrive quella del gastrocnemio destro (fig. XVI). In entrambi i casi si porta lo stimolo direttamente sopra il muscolo. Il peso da sollevare è di 10 gr. Lo stimolo ha una intensità uguale a 100 e si ripete ad ogni minuto secondo. Nel muscolo si scarica sempre la sola corrente indotta di apertura. Tanto il gastrocnemio di destra, quanto quello di sinistra, eseguiscono circa 600 scosse, compiute le quali, non sono ancora completamente esauriti. Le prime scosse hanno l'altezza di 23 mm. circa. La linea, che riunisce gli apici delle singole scosse, e che rappresenta il decorso vero della fatica, si conserva per un certo tratto parallela alla ascissa (finchè, cioè, l'intensità dell'eccitamento non diventa, per le nuove condizioni in cui passa il muscolo, tale da rendere quello stimolo lo stimolo massimo, vale a dire lo stimolo capace di far sviluppare al muscolo tutta la sua contrattilità). Poi si avvicina gradatamente e regolarmente (ad ogni secondo di una quantità eguale) alla ascissa.

6ª Esperienza (eccitazione diretta del muscolo).

Inietto sotto la pelle del dorso di una rana, come le precedenti, 1 cc. di soluzione del cloridrato della base cioè gr. 0,0058 di sostanza. Dopo 20 minuti circa la rana è come morta. Null'altro ci dimostra che la rana vive se non il battito del cuore. Non si muove, non risponde agli stimoli elettrici, meccanici e chimici. Se però lo stimolo elettrico si porta sul decorso dello sciatico si ha contrazione. Dopo che il veleno ha agito per più di mezz'ora si scrive il tracciato della fatica del gastrocnemio sinistro (fig. XVII) e dopo 15 minuti quello dell'altro gastrocnemio (fig. XVIII). La esperienza è disposta come la precedente, vale a dire che si stimolano direttamente le fibre muscolari.In un tempo eguale alla metà di quello impiegato dal gastrocnemio sinistro normale il gastrocnemio sinistro avvelenato è esaurito. Il gastrocnemio destro si esaurisce in un tempo anche minore. Le prime scosse del gastrocnemio sinistro sono alte cm. 1,72: quelle del gastrocnemio destro cm. 0,7. La forma della linea che riunisce gli apici della scossa è analoga a quella descritta nella 3ª esperienza, nella quale si trattava pure di una rana avvelenata con l'estratto etereo alcalino.

Da queste esperienze risulta che, per l'azione del cloridrato degli estratti eterei alcalini ricavati dalle orine emesse nel riposo e nella fatica, i nervi motori ed i muscoli diventano molto esauribili (1). Un muscolo di rana avvelenata con tale estratto si affatica notevolmente più presto di un muscolo di rana normale. La curva della fatica nel muscolo gastrocnemio della rana avvelenata acquista un andamento caratteristico.

La neurina, per ciò che riguarda l'azione sui centri nervosi, sui nervi e sui

(1) È difficile stabilire con le presenti esperienze se, quando si porta lo stimolo sul nervo, l'esaurimento si manifesti specialmente nel nervo, o nella terminazione nervosa, o nel muscolo. D'altronde la questione è così complicata che richiederebbe una serie speciale di ricerche che io non ebbi nè il tempo nè i mezzi di fare.

muscoli, non può essere paragonata allo estratto etereo alcalino di orina. Essa ha un'azione schiettamente paragonabile al curare mentre l'estratto delle orine paralizza i centri ed affievolisce l'eccitabilità dei nervi e dei muscoli.

Queste ricerche fatte sopra la curva della fatica vennero confermate da altre che ho istituite allo scopo di studiare la scossa muscolare.

In quest'altra serie di ricerche ho determinato l'altezza, la forma, la durata della scossa in complesso e delle sue singole parti: periodo di eccitazione latente, periodo di energia crescente e periodo di energia decrescente.

La rana veniva fissata sopra una tavoletta di sughero dopo la sezione della midolla. Si scopriva lo sciatico e lo si poneva sugli elettrodi oppure si portavano gli elettrodi sul muscolo stesso. Il tendine di Achille per mezzo di un filo era messo in comunicazione con la leva del miografo di Marey. Questo scriveva sopra un cilindro affumicato, che girava con la velocità di un giro in 1 secondo. Come stimolo usai la corrente indotta di apertura prodotta nella slitta, che ho già descritta. La corrente costante era generata da una pila Grenet e nel suo circuito si trovava: 1° un interruttore, che si apriva e si chiudeva ad ogni giro del cilindro rotante; 2° Un segnale elettro-magnetico Deprêz, che scriveva il momento della chiusura sura e dell'apertura sul cilindro rotante esattamente al disotto della punta della leva miografica; 3° la slitta con l'interruttore chiuso. Il tempo veniva scritto con un diapason di 200 vibrazioni doppie al minuto secondo.

Rana normale.

Nella rana normale, essendo la temperatura ambiente eguale a 27° C. ed il peso da sollevare eguale a 20 gr. e l'intensità dello stimolo eguale a 50, ho trovato che la curva della scossa del gastrocnemio durava 17 duecentesimi di minuto secondo, dei quali $^{2}/_{200}$ per il tempo perduto, $^{8}/_{200}$ per il periodo di energia crescente, $^{7}/_{200}$ per il periodo di energia decrescente. Altezza della curva cm. 3,5.

Con uno stimolo doppio (100) l'intera scossa durò 15, $5/_{200}$ di secondo; cioè

Periodo di eccitazione latente	$^{2}/_{200}$
" " energia crescente	$^{7}/_{200}$
" " " decrescente	$^{6,5}/_{200}$

L'altezza della scossa fu di 4 cm. Questo si vede nella fig. XIX, dove, come nelle seguenti, *a* rappresenta la scossa del muscolo, *b* i duecentesimi di secondo, *c* l'istante in cui lo stimolo si scarica nel muscolo. È inutile dire che queste curve sono dirette da sinistra verso destra.

Rana avvelenata.

In una rana dello stesso peso e sesso della precedente, ma avvelenata con 1 cc. di soluzione di cloridrato di estratto etereo alcalino (gr. 0,0058), essendo identica la temperatura esterna, identico il peso da sollevare, si trova che gli eccitamenti eguali a 50,100 non bastano per produrre movimento. Uno stimolo eguale a 200 produce un leggerissimo, quasi impercettibile movimento. Per uno stimolo = 400

Periodo latente . . . . . $= ^{3}/_{200}$
" energia crescente $= ^{5}/_{200}$
" " decrescente; incerta la durata perchè la curva

impiega lungo tempo per tornare all'ascissa. In ogni modo è più lungo asssai del periodo di energia crescente. La scossa è alta cm. 0,7 (fig. XX).

Per uno stimolo eguale ad 800 trovasi:

Tempo latente = $^3/_{200}$

Periodo energia crescente = $^8/_{200}$

" " decrescente molto più lungo. Altezza della scossa = cm. 1,2 (fig. XXI).

Allo stesso risultato si perviene irritando direttamente la fibra muscolare.

Come si vede da queste esperienze la curva della scossa muscolare in seguito all'azione del cloridrato dell'estratto etereo alcalino dell'orina, prende l'aspetto di quelle della scossa di un muscolo affaticato. Aumenta il periodo di eccitazione latente, il muscolo ritorna molto più lentamente alla lunghezza primitiva, l'altezza della scossa è molto minore.

V.

Azione sopra le cellule pigmentali.

In tutte le esperienze da me fatte osservai che sotto l'azione dell'estratto etereo alcalino di orina, le rane diventano molto più scure e che, cessata l'azione del veleno oppure dopo la morte dell'animale, la pelle riacquistava il primitivo colore. Dei pezzi di cute di rane avvelenate, trattati immediatamenre con acido osmico 1 °/₀ per fissare gli elementi, presentavano delle cellule pigmentate fornite di numerosissime ed intricate ramificazioni intralciantisi quelle di una cellula con quelle delle cellule vicine. Al contrario un pezzo di cute della stessa rana, diventata più chiara, presentava le cellule del pigmento o globose e senza ramificazioni o irregolari e con delle ramificazioni cortissime e semplici. — Il fatto dell'oscurarsi della cute venne già osservato da altri per l'azione di diverse sostanze e lo produce anche la neurina, ma non con tanta evidenza. = Per ora non saprei darne la vera ragione.

***

Arrivato al termine di questo studio sopra l'azione dell'estratto etereo alcalino di orine in condizioni fisiologiche non sarà inutile di ricordare alcune cose relativamente a ciò che si è già fatto sopra tale argomento e di cercare se il veleno da me studiato abbia dei rapporti di somiglianza con altri veleni conosciuti.

G. Pouchet, allievo di Gautier, estrasse nel 1880 (¹) dalle orine normali un alcaloide fisso, ossidabile, a cloroaurato e cloroplatinati ben cristallizzabili e deliquescenti, a cloridrato neutro e cristallino, d'un'energia tossica considerevole.

B. Bocci (²) nel 1882 trovò che l'iniezione sottocutanea ed endovasale di orine normali ha sopra i nervi motori l'azione del curare.

(¹) *Contribution à l'étude des matières extractives de l'urine.* Paris.

(²) *Influenza paralizzatrice dell'orina umana iniettata nelle rane.* Archivio per le scienze mediche vol. VI, p. 388-409.

Schoffer [1] nell'anno seguente analizzò ulteriormente il problema della causa della tossicità delle orine.

Per via di esclusione venne a concludere che le orine sono tossiche perchè contengono una sostanza analoga alle ptomaine o alla sostanza *luftverderbender* di Pettenkofer, o alla cosidetta antropotoxina di Du Bois-Reymond. Secondo Schoffer iniettando dell'orina di uomo, cane, coniglio ridotta a consistenza sciropposa si ha anzitutto uno stadio di depressione, susseguito poi da uno di irritazione. L' eccitabilità muscolare diretta è conservata, ma sono paralizzati i centri [2].

Debbo fermarmi alquanto sulle ricerche di Bouchard, il quale avrebbe trovato che le orine elaborate nella veglia hanno un'azione deprimente, mentre quelle elaborate nel sonno hanno un'azione convulsivante. Le ricerche mie furono fatte, è vero, in modo diverso da quelle di Bouchard ed inoltre Bouchard non prese in considerazione le basi alcaloidee che si possono trovare nelle orine; nondimeno noterò che i risultati da me ottenuti non mi permetterebbero finora di confermare la conclusione a cui è venuto Bouchard. L'estratto etereo alcalino ottenuto dalle varie porzioni di orina, alcune preparate nel sonno, altre nella veglia, manifestò sempre azione deprimente paralizzante nei batraci ed azione convulsivante negli animali a sangue caldo. Può darsi che, estraendo con altri solventi oltrecchè con l'etere, si sarebbero avute delle sostanze di azione diversa. Ma io non ho ancora potuto fare questa ricerca.

Lo stesso Bouchard [3] trovò che la tossicità della orina diminuisce durante la fatica muscolare e continua a diminuire durante il riposo ed il sonno successivo. Le mie ricerche finora mi permettono solo di confermare che le orine delle ore di riposo e specialmente di sonno notturno, che tengono dietro ad un giorno di esercizio muscolare, forniscono una quantità di base tossica minore di quella, che si ha dalle orine del giorno di fatica.

Guareschi e Mosso nel lavoro già più volte citato estrassero dal cervello e dalla fibrina putrefatti delle sostanze basiche la quali per la loro azione tossica hanno dei punti di somiglianza con le base da me ricavata dalle orine. L'analogia si manifesta specialmente nell'azione sopra il sistema neuro-muscolare. Le rane avvelenate con l'estratto di cervello e di fibrina sono rapidamente spossate dagli stimoli. Tra le due sorta di veleni vi è però una differenza. Quello ottenuto dalle orine anche alla dose mortale non ha un' azione specifica sui nervi motori o loro terminazioni, tutto al più ne diminuisce l'eccitabilità. Per effetto di tale veleno i nervi motori si troverebbero in uno stato di eccitabilità facilmente *deprimibile*, per cui sotto l'azione degli stimoli passerebbero rapidamente attraverso ai quattro periodi di eccitabilità descritti da Guareschi e Mosso come effetto caratteristico dei veleni che hanno azione curarica.

Inoltre la base da me ottenuta ha probabilmente azione anche sulla fibra muscolare striata cui rende facile ad esaurirsi. Per alcuni riguardi si può dire la stessa cosa del veleno che Capparelli estrasse dal *Triton cristatus* [4].

[1] *Ueber eine toxische Substanz in Harn.* Deutsche med. Wochenschrift. Vol. 16, p. 229-231.

[2] Si possono trovare più diffusi ragguagli sopra la storia della tossicità delle orine nel libro di Ch. Bouchard: *Leçons sur les autointoxications dans les maladies* (quarta lezione).

[3] Vedi lavoro citato p. 45.

[4] Capparelli, *Recherches sur le venin du Triton cristatus.* Arch. it. de biologie. Anno II. T. IV, p. 72-80.

Accennerò ancora che V. Anrep (¹) servendosi dei processi di Stass-Otto e di Brieger, ottenne dalle carni di pesci, che avevano dato luogo ad un avvelenamento, e dai visceri degli individui avvelenati una ptomaina molto stabile, intensamente tossica anche a dosi minime, il cui effetto principale era quello di paralizzare la midolla spinale, il bulbo ed il tessuto muscolare liscio.

Ho già nel corso del lavoro fatto notare che la base delle orine dei soldati differisce per la sua azione sul cuore, e sul sistema nervoso dalla neurina (base vinilica) (²). Lo stesso si può dire della colina (base ossietilica) la quale, secondo le ricerche di Boehm (³) ha una azione paragonabile a quella della neurina ma assai meno energica.

Analizzando gli effetti prodotti dall'estratto etereo alcalino delle orine sui varî organi e sistemi si vede che, questa sostanza, se per alcuni riguardi ha delle analogie di azione con alcuni veleni conosciuti, dall'altra per l'insieme dei fenomeni prodotti non può identificarsi con alcun altro veleno.

Conclusioni generali

1° Dalle orine umane emesse prima, durante e dopo un esercizio muscolare faticoso si può estrarre una base azotata avente le proprietà generali degli alcaloidi.

2° Questa base è prodotta in quantità maggiore durante la fatica e minore nel periodo di riposo e di sonno notturno successivi.

3° Il cloridrato di questa base ha una energia tossica grande. Negli animali a sangue freddo agisce come deprimente: in quelli a sangue caldo è più attivo, e dà luogo a dei fenomeni generali di eccitazione. Le dosi non mortali rendono tanto gli animali poichilotermi quanto gli omoiotermi facilmente esauribili.

4° L'estratto etereo alcalino delle orine emesse prima, durante e dopo la fatica è costituito da una stessa e medesima sostanza, che, cioè, in ogni caso ha le stesse reazioni chimiche e la stessa azione fisiologica.

5° Le proprietà chimiche e fisiologiche escludono che la base in discorso sia neurina, o colina.

Queste ricerche vennero fatte nel Laboratorio di Fisiologia della R. Università di Torino, per iniziativa del prof. A. Mosso, al quale debbo i più sentiti ringraziamenti per i consigli e gli aiuti di cui mi fu sempre largo.

(¹) V. Anrep, *L'intoxication par le ptomaïnes.* Archives slaves de biologie. T. I, 1886, p. 341-355.

(²) V. Cervello, *Sur l'action physiologique de la neurine.* Archives italiennes de biologie. T. VII, 1886, p. 172-197. — A. Moriggia, Atti della R. Accademia dei Lincei. Serie III. Transunti, fascicolo X, pag. 232.

(³) R. Boehm, *Ueber das Vorkommen und die Wirkungen des Cholins und der kunstlichen Muscarine.* Arch. f. exper. Path. und Pharm. XIX, 1885, p. 87-100.

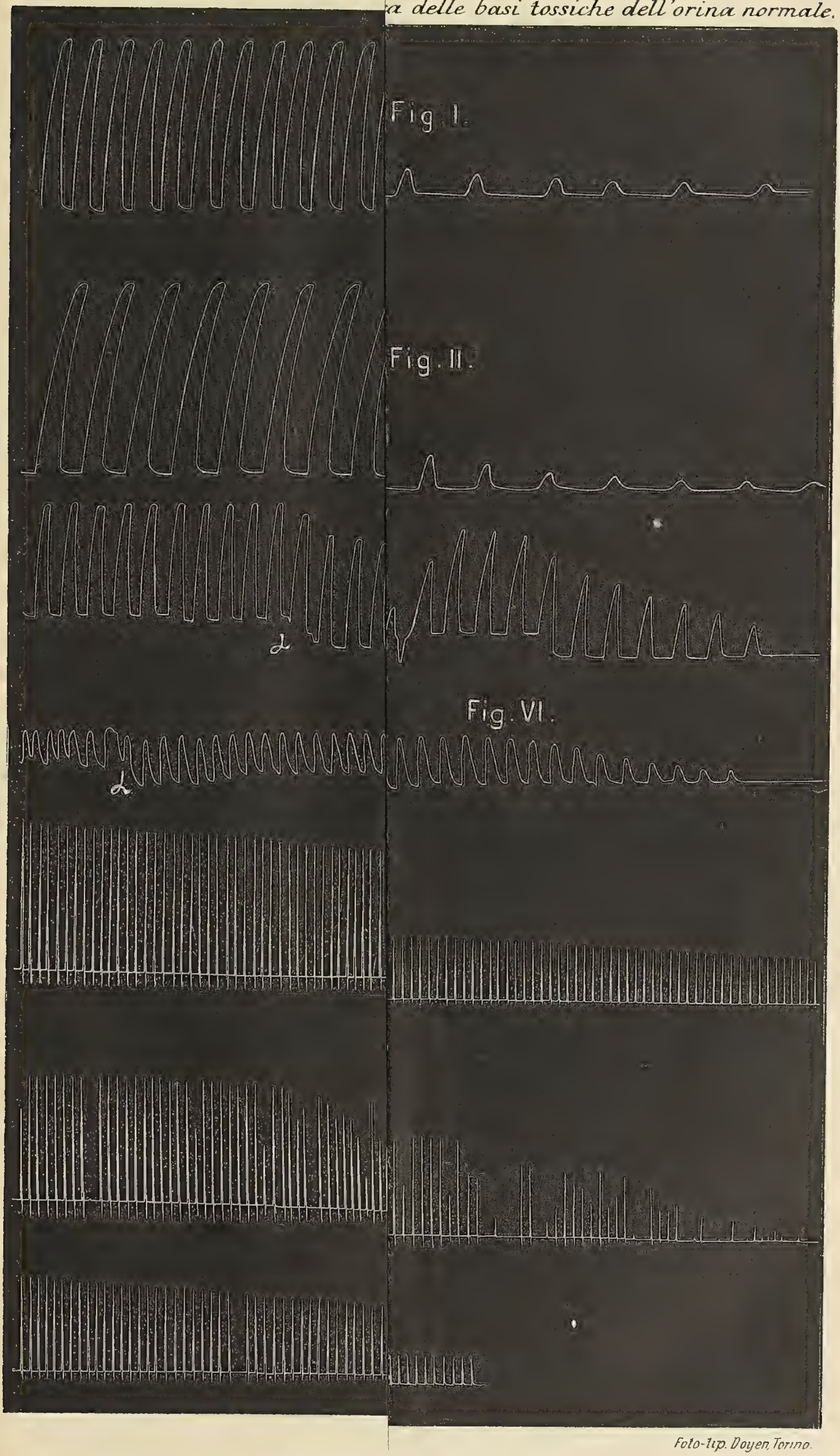


Foto-tip. Doyen, Torino.

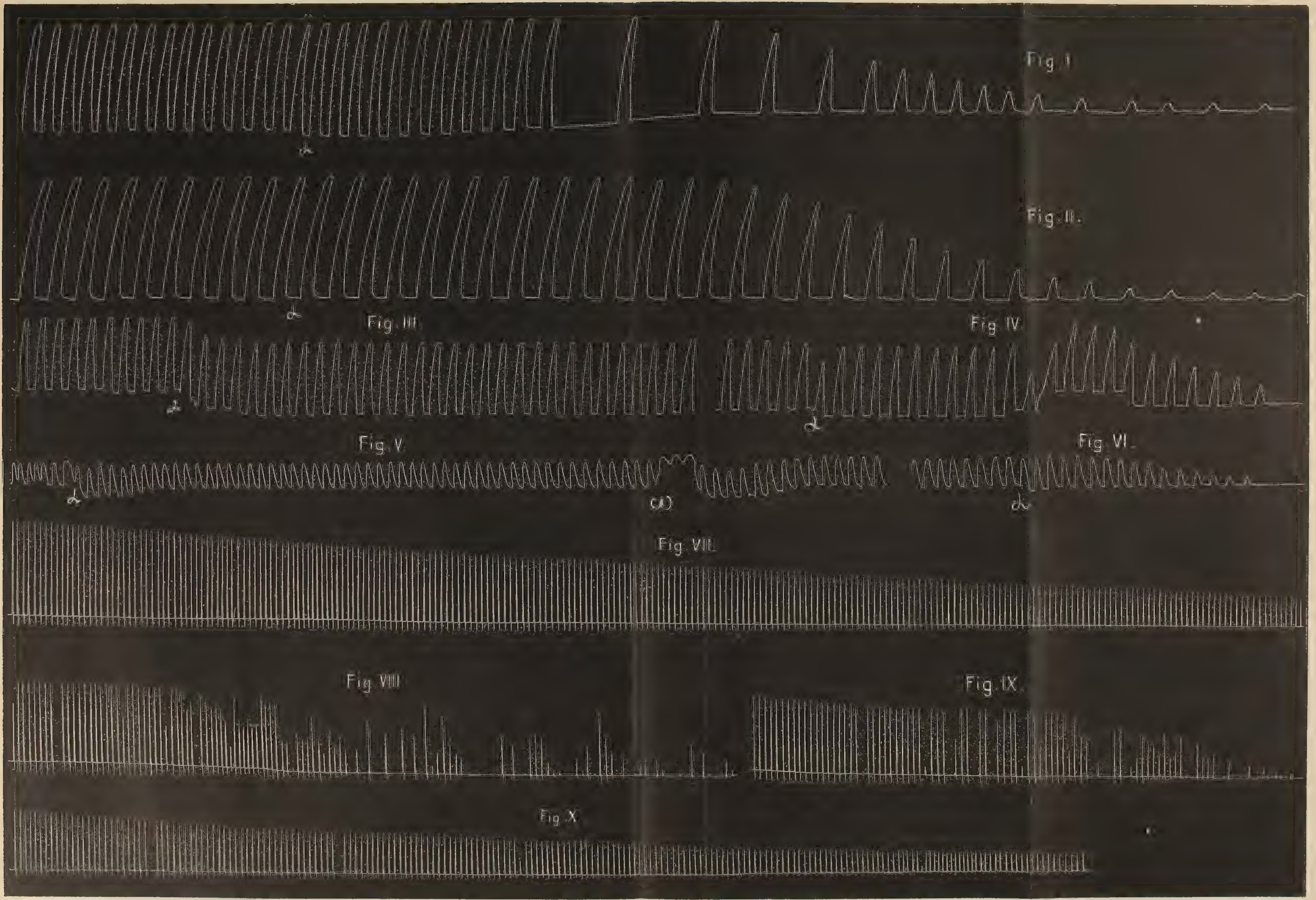


Foto-tip. Doyen Torino

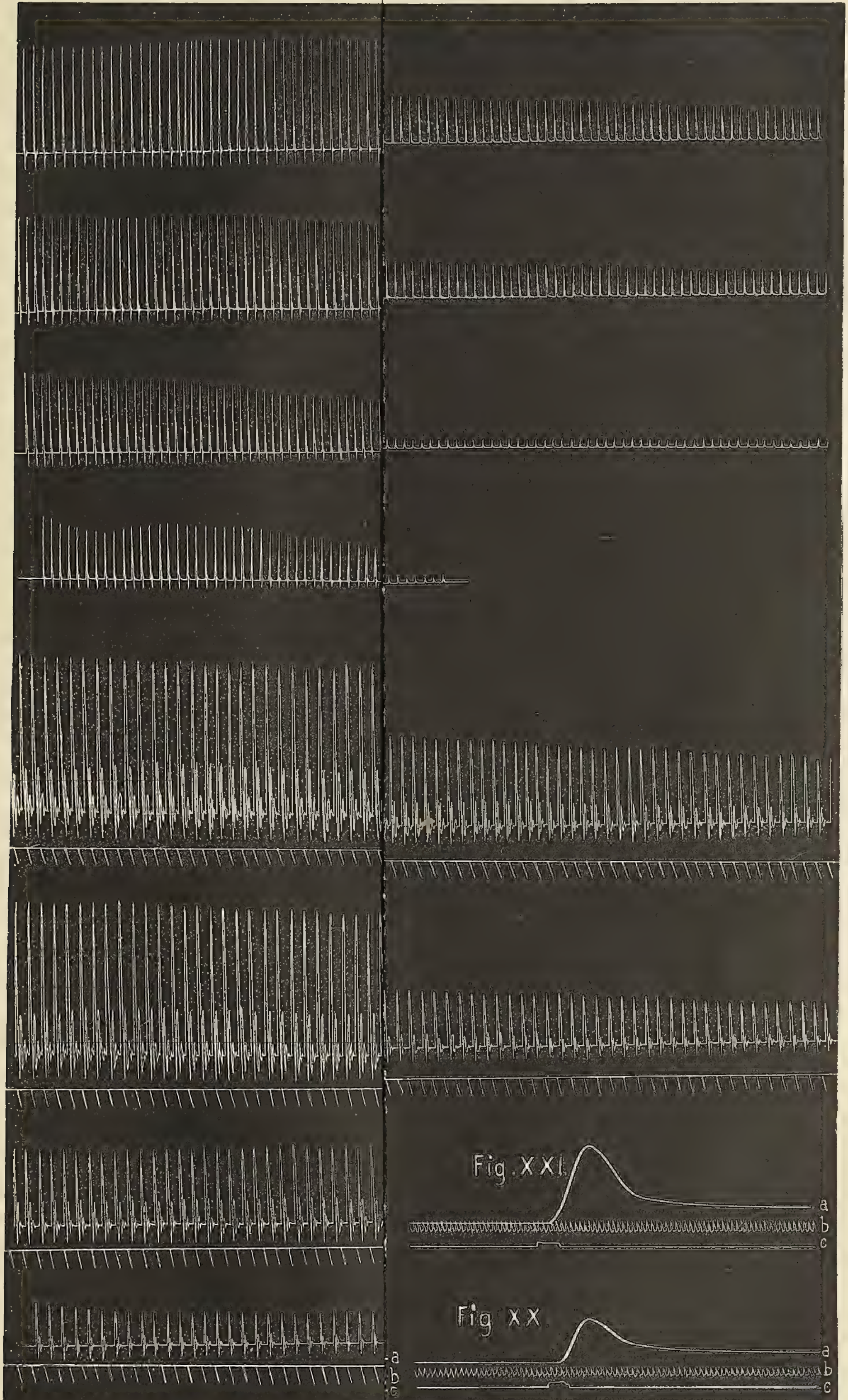


Foto-lit. F.lli Doyen, Torino. 771

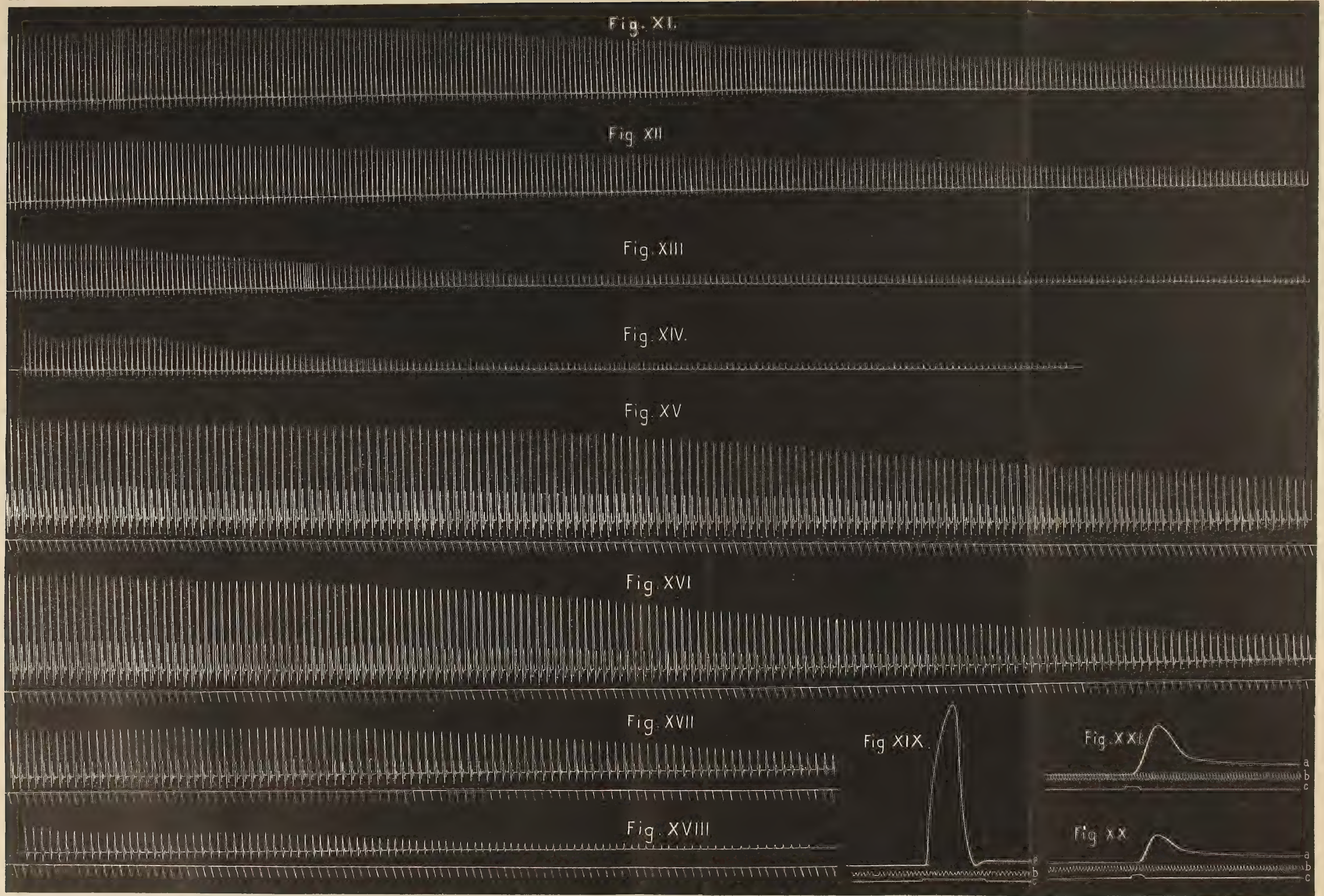


Foto-lit. F.lli Doyen. Torino 171

Anatomia comparata dei Tisanuri e considerazioni generali sull'organizzazione degli Insetti.

Memoria del Corrispondente BATTISTA GRASSI

presentata al Presidente durante le ferie accademiche 1887.

(Con cinque tavole)

INTRODUZIONE

Nella presente Memoria mi sforzerò di ordinare col metodo comparativo i miei studî sull'anatomia dei tisanuri, e ciò allo scopo di indurne una serie di considerazioni morfologiche riguardanti i varî sistemi organici degli insetti e di rischiarare parecchi punti del mio lavoro intorno allo sviluppo dell'ape nell'uovo.

La morfologia dei tisanuri era un campo quasi del tutto vergine, perciò io ho dovuto dedicare ad essi moltissimo tempo, quasi quattro anni di lavoro. Sono frutto di queste lunghe ricerche, parecchie migliaia di preparati e parecchie centinaia di disegni copiati dal naturale. In questa Memoria però io non intendo d'esporre estesamente i risultati che ne ho ricavati, ma voglio limitarmi invece a darne un semplice riassunto un po' diffuso. Mi corre l'obbligo di dichiarare che le figure qui annesse sono in gran parte schematiche; mi spiego: quasi ogni figura è fatta coll'aiuto di diversi preparati o disegni copiati dal naturale; se ciò non avessi fatto, il numero delle tavole illustrative sarebbe riuscito soverchio. Nelle tavole, e quindi anche nel testo, la parte istologica è stata in parte tralasciata: io però non credo che per questo la mia Memoria perda di valore, formando l'istologia, in quanto riguarda animali superiori come gli insetti, materia a sè, la quale non giova che in piccola parte a risolvere i problemi che, come quelli di cui io qui mi occupo, appartengono al campo della morfologia speciale; la piccola parte utile a questo fine è quella appunto che ho introdotta nel presente lavoro; il resto sarà oggetto d'un successivo lavoro di morfologia generale sui tessuti dei tisanuri. In breve io ho adottato la via seguita dal Gegenbaur nel suo classico trattato d'anatomia comparata.

A chi guarda superficialmente può sembrare che il metodo della morfologia sia stato ben determinato, e già da parecchio tempo; che anzi v' è chi crede che non occorra ritornare sull'argomento. Per certo, osservo io, l'evoluzione viene generalmente riconosciuta come punto di partenza d'ogni ragionamento morfologico, e si sa che le conclusioni possono scaturire dalla paleontologia, dalla zoologia, dall'anatomia comparata e

dall'embriologia. I disaccordi cominciano però subito quando si tratta di trovare il movente della trasformazione per es. di un dato sistema organico, allora la via che si prende è differente a seconda che si adotta l'una o l'altra delle varie teorie proposte per spiegar l'evoluzione. Queste difficoltà crescono ancora quando si tratta di stabilire il peso che si deve concedere alle singole materie sopranominate nel determinare una speciale trasformazione. Infine la quistione si complica ancor di più perchè l'enorme varietà delle forme e delle disposizioni non lascia di leggeri distinguere l'accessorio dal principale, non permette cioè di stabilire, con sicurezza indiscutibile, delle norme sul valore che meritano i singoli fatti.

Tante e sì gravi difficoltà hanno condotto i naturalisti su strade svariate e spesso opposte, tali per cui coi medesimi fatti uno arriva ad una conclusione ed un altro ad un'altra del tutto contraria. Gli esempî di questo genere abbondano, io voglio soltanto ricordare le recenti discussioni sui capezzoli delle mammelle, quelle sui nervi cranici, quelle sulla posizione sistematica dei Tunicati ecc.

Se il lettore ammette che gli or citati disaccordi siano reali, non troverà fuor di luogo ch'io esponga brevemente il metodo ch'io seguo nello studio della morfologia. È lungi da me la pretesa di portare una riforma in un argomento tanto scabroso: io sarò pienamente soddisfatto se quel poco ch'io esporrò susciterà un po' di discussione, discussione che, a mio parere, è diventata ormai necessaria.

La meta del morfologo, come ho già quasi accennato, è ben definita: ricostruire l'albero genealogico degli animali e dei vegetali per poi intuire le leggi che regolano la discendenza e concorrere a spiegare l'organizzazione dei singoli esseri viventi. I mezzi di cui disponiamo vennero da me or ora ricordati: la zoologia, la paleontologia, l'anatomia comparata e l'embriologia. Mi fermo prima di tutto ad un punto di veduta comune a tutt'e quattro queste branche della morfologia. Incomincio a distinguere coloro che inducono le loro conclusioni dallo studio d'un solo sistema organico da coloro che le inducono basandosi sull'intiera organizzazione. Com'ebbi già occasione di dire in altro lavoro, non esito a schierarmi tra i secondi perchè io vado convinto che i primi sono sopra una falsa via, anche quando si servono, ciò che però non fanno sempre, d'un sistema organico di primaria importanza, quale sarebbe per es. la colonna vertebrale pei vertebrati, l'apparato boccale e le ali per gli Insetti. Così per es. mi fu già dato di sollevare dei dubbi sulla naturalezza del sistema degli Elasmobranchi, fondato dall'illustre Hasse sulla colonna vertebrale. Vedremo in questa Memoria che se si badasse soltanto all'apparato boccale, Japyx e Campodea dovrebbero scostarsi enormemente per es. da Machilis. Se si considerasse soltanto il pronefro, i teleostei dovrebbero ritenersi più primitivi degli elasmobranchi; se si badasse appena alla vescica natatoria, quelli dovrebbero essere più prossimi di questi ai vertebrati superiori. Tenendo d'occhio appena gli organi di senso, l'anfiosso può definirsi un animale orribilmente degenerato ecc. Contentarsi d'un sol sistema organico equivale al contentarsi di leggere un libro, sia pure un libro d'autore celebre, sopra un dato argomento, mentre si sa che questo stesso argomento è stato discusso in cento altri.

Una volta ammesso che si debba tener conto dell'intiera organizzazione, resta ancora di decidere sulla scelta delle forme da studiare. Pigliamo per es. gli insetti; l'ideale sarebbe di studiarli tutti quanti e compararli l'uno coll'altro; certamente il

risultato sarebbe il migliore possibile, ma chi mai potrebbe assumere lo studio di più di duecentomila insetti, chè a tanti appunto sommano gli insetti finora noti alla scienza? Purtroppo occorre di limitare le nostre ricerche ad un tenuissimo numero di forme; egli è perciò necessario di decidere se si debbano preferire certe forme, od invece se possiamo attenerci alle prime che ci cadono sottocchio. Mentre molti non credono che sia necessaria una scelta, io invece sono d'opinione che occorra accordare ad essa una grande importanza, specialmente considerando il periodo attuale, ancor quasi infantile della nostra scienza. Oggigiorno nonostante che numerosa e strenua sia la schiera dei zoologi, il cognito è tuttavia ben poca cosa in confronto all'incognito, ed intere classi sono state appena appena sfiorate. Perciò specialmente mi pare necessario di cercare le forme semplici, quelle primitive, e di preferenza attenerci ad esse, od almeno da esse prendere le mosse. Chi si limita a studiare le forme più complesse, potrà forse fornire la base a problemi fisiologici, ma non risolverà quasi mai le quistioni morfologiche. Le forme semplici rivelano in un istante quel che mille forme perfezionate, od aberranti non potrebbero far conoscere al più abile osservatore. Così è per es. della colonna vertebrale dei teleostei che diventa enormemente strana se la si studia, come si faceva una volta, nella perca e che per contrario si rannoda mirabilmente a quella degli elasmobranchi, se si prende per punto di partenza il luccio. Le ricerche embriologiche di Goette sugli anfibi anuri hanno dato un profitto molto piccolo, perchè questi animali appartengono ad un ramo collaterale e molto aberrante dal tipo principale dei vertebrati. L'accuratissima opera di Carus sui genitali dei coleotteri ha contribuito pochissimo alla conoscenza fondamentale di questo apparato negli insetti; invece le brevissime ricerche di Joly, di Meinert e di Palmen sui genitali delle Efimere e delle Forficule hanno dato frutti interessantissimi. Naturalmente studiate una volta le forme primitive, per acquistarci un concetto completo del ramo, di cui ci occupiamo, occorre esaminare anche le forme più complesse, dal cui studio accade poi di dover ritornare a quello delle forme primitive perchè certe disposizioni, fortemente sviluppate nelle forme complesse, sono invece debolmente accennate in quelle primitive, e sfuggono quindi a chi esamina soltanto queste ultime. Si noti però che la scelta delle forme primitive vuolsi specialmente applicare al caso in cui si comparano organi già sviluppati. Essa ha invece meno valore quando si tratta di formazione dei foglietti germinativi e di origine degli organi da questi, e ciò perchè si è veduto che, per questi fenomeni, esiste una certa costanza anche in piuttosto estesi gruppi d'animali.

Siamo così arrivati a due conclusioni: bisogna considerare tutti i sistemi organici, bisogna prescegliere le forme primitive.

Queste due conclusioni che, per quanto io so, hanno per genitore Gegenbaur e da lui e dai suoi scolari vennero metodicamente applicate, non sono già, come pretende taluno, qualche cosa che schematizza la natura senza alcun profitto, ma sono invece una potente ed efficace guida, l'unico filo per chi non vuol perdersi in un labirinto inestricabile. Del resto non si deve perder d'occhio la circostanza che qualunque metodo, o qualunque teoria, alla fin fine ha in sè qualcosa di schematico. Certo è però d'altra parte che bisogna essere molto guardinghi e non confondere le forme degenerate con quelle primitive.

Intendo la degenerazione molto discretamente, e non già nel senso lato di parecchi autori, che tendono a trovar degenerato tutto quello che è semplice. In proposito voglio dire che il termine degenerazione non è molto proprio e non esprime bene quel che accade in natura: in natura uno o parecchi sistemi organici si perfezionano o tutt'al più restano immobili, mentre gli altri per effetto del non uso si riducono e degenerano; così è per es. della tenia che è ridotta nell'apparato digerente e negli organi di senso, restata immobile, per così dire, nell'apparato escretore, perfezionata invece nell'apparato riproduttore e negli organi d'attacco sull'oste ecc.; perciò il dire che i cestodi sono animali degenerati non è esatto. La degenerazione vera dovrebbe essere totale; in realtà però una degenerazione totale forse non si verifica, o per lo meno non è stato ancor dimostrata con sicurezza. Per ora quando c'imbattiamo in una forma semplice in tutti i suoi apparati, qual è l'anfiosso, noi non siamo autorizzati a ritenerla degenerata [1]. Teoricamente si può però ammettere che un animale, adattandosi a condizioni di vita più semplice, si semplifichi. Ma questa semplificazione, a mio parere, consisterà essenzialmente, se non interamente, nell'arrestarsi e riprodursi in condizioni giovanili, nel fermarsi dello sviluppo degli organi, ad eccezione di quelli genitali. Ma in questo caso noi avremo un ritorno a condizione ataviche e gli animali che hanno fatto questo ritorno serviranno istessamente pella filogenesi, indicheranno istessamente la strada che noi cerchiamo. Perciò io credo che p. es. lo studio del poligordio, ancorchè quest'animale si dimostri semplificato, riuscirà sempre utile alla morfologia degli anellidi.

Ma lasciamo questa digressione che non ho saputo evitare perchè ci tornerà utile più avanti e ritorniamo al nostro argomento. La necessità di considerare tutti i sistemi organici e di prescegliere le forme primitive, naturalmente si deve applicare a ciascuna delle quattro materie sopraindicate, cioè alla zoologia, alla embriologia, all'anatomia comparata e alla paleontologia. Conviene ora accennare quale importanza debba assumere ciascuna di queste scienze. Nessun dubbio che ognuna può potentemente contribuire a raggiungere lo scopo che si prefigge la morfologia. Noi assistiamo però oggigiorno al predominare d'uno di esse, l'embriologia, ed è appunto su questo argomento che mi piace d'intrattenermi per un istante. Dopochè specialmente per opera di Fritz Müller si accettò e si divulgò l'ipotesi di Oken che l'embriologia ripete la

[1] I moventi principali della degenerazione di molti apparati organici sono la vita sedentaria ed il parassitismo. Colla vita sedentaria si collega anche quella nel fango che sottosta ad uno strato maggiore o minore d'acqua e nel terreno, o terriccio che resta umido, perchè coperto di pietre non mosse da lungo tempo, ovvero perchè vicino all'acqua ecc. In queste località trovasi, oltre ad animali, del tutto adatti alla vita libera nell'acqua o nell'aria, che vi cercano temporario rifugio o qui fanno la loro preda, una serie d'altre forme che vi conducono intiera la loro vita e che perciò sono adatte soltanto a vivere in esse. Tra queste ultime si devono cercare i parenti più prossimi e meno trasformati dei nostri animali terrestri, gli anelli di congiunzione tra le forme acquatiche e quelle terrestri, le forme che tendono a diventare terrestri, quelle che tentarono invano di diventar tali, e perciò appunto si conservano in condizioni primitive. Tutto ciò è in armonia coi dati geologici, secondo i quali gli animali una volta erano tutti acquatici, e poi in parte man mano andarono adattandosi alla vita terrestre. I fatti corrispondono esattamente a queste induzioni teoriche. Nel terreno più o meno umido troviamo molte forme primitive.

filogenia, l'interesse pell'embriologia crebbe grandemente e molti si dedicarono ad essa con immenso vantaggio della morfologia, la quale per di lei mezzo acquistò traccie sicure d'una storia che, mancando negli archivî paleontologici, pareva irremisibilmente perduta. Indi, come era troppo naturale, la speranza di poter rischiarar tutto coll'embriologia, ed un grande entusiasmo per questa scienza, entusiasmo che ha ben fondate ragioni quando si considera per es. che certi organi giovanili scompariscono nell'adulto (per es. la corda dorsale delle ascidie) senza lasciar traccia alcuna. Questi trionfi, per quanto grandiosi, non possono però far obliare gli insuccessi, derivati sopratutto da ciò che l'ontogenia ripete di spesso la filogenia raccorciandola di troppo (uno dei mille esempî: la piccola parte degli archi branchiali, che si riproduce nell'embrione dei mammiferi), oppure la ripete in una forma molto alterata (si ricordino le grandi modalità prodotte nella formazione dei foglietti dalla presenza del tuorlo), oppure senza rispettare le epoche (formazione dell'apparato tracheale negli insetti superiori), o senza tener conto della parità o imparità (il ganglio sopraesofageo della Moina nasce sotto forma d'un ispessimento mediano impari, mentre negli altri artropodi si sviluppa sotto forma di due ispessimenti uno destro e l'altro sinistro; il fenomeno della Moina si ripete anche negli pteropodi, mentre negli altri molluschi accade lo sviluppo pari come negli altri artropodi). Oltracciò l'embriologia, in un certo senso, è una materia che, cedevole più della cera, si presta a ricevere le più svariate impronte. Mi spiego; un embrione durante il suo sviluppo presenta innumerevoli cambiamenti di forma, perciò non è difficile di riscontrare uno stadio consono ai preconcetti teorici dell'osservatore; se questi lo sorprende e lo ammette come principale, potrà facilmente appoggiarvi la sua ipotesi, molto più che non di rado le linee appunto perchè in via di trasformazione sono, a così dire, poco accentuate. In questo senso l'anatomia comparata è ben più solida perchè essa non si presta a tante interpretazioni. Vero è che l'anatomo può correre il rischio di dichiarar omologhi due organi che non lo sono in realtà, tratto in inganno dalla mancanza attuale delle forme intermedie tra i due animali a cui appartengono gli organi in discorso. L'embriologo corre però il rischio di pigliar per stadio filogenetico ciò che è un adattamento embrionale. Le or cennate difficoltà ampiamente confortate da una esperienza ormai lunga, avrebbero forse dovuto moderare alquanto l'entusiasmo degli embriologi, ma ciò non è accaduto ed è ancora molto autorevole l'opinione che l'anatomia comparata dovrà sempre più limitarsi a porre i problemi, mentre l'esatta loro comprensione e soluzione sarà opera dell'embriologia [1]. Ciò è vero in certi casi, ma il farne un assioma e l'elevarlo a metodo, s'io non m'inganno fortemente, è un'esagerazione. Il sostituirsi degli organi, come ha splendidamente dimostrato il Kleinenberg, è un fenomeno molto interessante che sfugge all'anatomia comparata, ma non bisogna però ingrandire di troppo la di lui importanza. Io sono condotto a questa conclusione appunto dagli insetti invocati come un prezioso oggetto per provare il valore delle sostituzioni degli organi. Ammetto che negli insetti superiori le sostituzioni sono all'ordine del giorno, ma, se noi annettiamo troppo valore a queste sostituzioni, veniamo a negare delle omologie

[1] Basta dire che questa opinione viene sostenuta per es. dal geniale Kleinenberg nel suo classico ed originalissimo lavoro: *Die Entstehung des Annelids* ecc. in Zeitsch. f. wiss. Zoologie, 1886.

sulla cui realtà nessuno può ardire di dubitare. Così per es. accadono delle sostituzioni tra il sistema nervoso della larva e quello dell'imagine dei lepidotteri, dei ditteri ecc. Ma potremmo noi da ciò indurre che non esiste omologia tra il sistema nervoso della larva e quello dell'imagine? Ma allora il sistema nervoso dell'ortottero adulto (non esssendovi di certo sostituzioni tra il sistema nervoso dell'ortottero adulto e quello della sua larva) non potrebbe essere omologo a quello del lepidottero e del dittero adulto. È possibile che l'embriologia arrivi a far credere che il cervello degli ortotteri non è omologo a quello dei lepidotteri? In breve io credo che nell'apprezzamento delle sostituzioni si deve andar molto cauti e si deve ricordare sempre che la legge della variazione s'impone in ogni epoca della vita e non appena nell'adulto; occorre tener conto della fisiologia dell'embrione la quale perchè il più delle volte è sconosciuta non si suol calcolare affatto, occorre sopratutto apprezzare gli adattamenti embrionali; insomma evitar di credere che la filogenia venga ripetuta esattamente dalla ontogenia [1]. Ciò equivarrebbe al credere che la storia di Tito Livio si dovesse accogliere come un'esposizione di fatti fedele e indiscutibile, come vera storia!

D'altra parte, in molti casi, le sostituzioni si possono escludere *a priori*. Per es. il lavoro di Ruge [2] sui muscoli della faccia è un lavoro di pura anatomia comparata al quale secondo me, l'embriologia non potrà togliere nulla di essenziale. In breve io ripeto che a mio debole parere, l'embriologia fa da potentissimo sussidio alla morfologia, ma non bisogna credere che sia un *passe-par-tout* buono per aprire qualunque serratura. Da sola essa è di regola insufficiente, come da sole sono insufficienti la zoologia, l'anatomia e la paleontologia. Tutt'e quattro queste sorelle vogliono essere associate per fondare una buona ipotesi. Il morfologo deve ordinare e far armonizzare i loro responsi per modo che risulti la posizione d'un dato ramo dell'albero genealogico. Egli si trova quasi nelle condizioni di chi per es. volesse ricostruire un castello medioevale tipico, coi ruderi di quei castelli che si trovano qua e là sparsi in Italia. Questi dovrebbe esaminare tutti i ruderi ed ora servirsi di quelli d'un castello, ora di quelli d'un altro, a seconda che il punto in ricostruzione è conservato nell'uno e nell'altro. Siccome le lacune che incontriamo nelle scienze in discorso non sono regolari, ma sibbene almeno, per quanto finora sappiamo, sono casuali come nel confronto col castello, così s'intende che in certi casi si deve badare più all'una che all'altra scienza.

Abbiamo fin qui cercato di renderci conto d'una parte delle divergenze che

[1] Colla teoria delle sostituzioni si vuol spiegare anche la persistenza degli organi rudimentali che servirebbero come *Vermittlungsorgane: auf die Anregung oder mit Hilfe des späteren rudimentären Organes treten im Embryo die bleibenden Theile hervor u. werden in ihrer Entwickelung geleitet* (Kleinenberg l. c.). Ciò aveva supposto anch'io intanto che studiavo lo sviluppo della colonna vertebrale dei pesci, in cui avvengono classiche sostituzioni, ma prima di finire questo studio mi sono ricreduto perchè questa supposizione mi parve non ben consona ai fatti che incontravo (per es. l'ipotesi in discorso non spiegava perchè tutti gli archi vertebrali di tutti i Teleostei si preformano più o meno estesamente cartilaginei, tranne un certo numero di quelli dei Ciprinoidi). Uno dei moventi della scomparsa o permanenza degli organi rudimentali sta forse nella rapidità maggiore o minore dello sviluppo (l'uovo dei Ciprinoidi ha rapidissimo sviluppo).

[2] *Untersuch. ü. d. Gesichtsmuskulatur der Primaten.* Leipzig, 1887.

esistono tra i morfologi. Un'altra parte diventa abbastanza chiara se si tien conto delle varie teorie ammesse per spiegar la discendenza. I più si basano ancora sul vantaggio che presentano i varî organi nella lotta per l'esistenza. Appena pochi cominciano ad applicare le nuove teorie sorte dalle rovine di quella darwiniana, cominciano cioè a far risaltare l'importanza della lotta delle parti nell'organismo (lotta basata sul principio che lo stimolo funzionale agisce anche come stimolo trofico) e l'importanza ancor maggiore delle cause interne (idioplasma). Naturalmente a secondo che si adotta la prima, la seconda o la terza di queste teorie, ne risulta differente la maniera onde spiegare il comparire di nuovi organi ed il perfezionarsi di quelli già esistenti. Da ciò gravi differenze nell'apprezzamento dei fatti speciali.

Tutte le divergenze sopraccennate risaltano vivamente quando si tratta di dare un valore assoluto alla *omologia*. Questo termine perciò minaccia di avere una storia come quella del termine *specie*. Una volta introdotto il Darwinismo, pareva di poter dare all'omologia un valore assoluto, ma i fatti vennero presto a dimostrare che si trattava soltanto d'una parvenza. Strettamente parlando dovrebbero essere omologhi soltanto gli organi che hanno una medesima origine, quindi *dal medesimo foglietto germinativo*, in un *punto simile* quanto al rapporto cogli altri organi e in un *modo simile*. Ma pur troppo ben poche sarebbero le omologie, e molte indubitabili scomparirebbero se si volesse usare tanto rigore nel fissarle; per es. scomparirebbe l'omologia delle ghiandole genitali negli insetti e molto probabilmente anche l'omologia della corda dorsale nei varî gruppi dei vertebrati. Anche ammettendo due foglietti, germinativi invece di tre (1), molte difficoltà non vengono rimosse. In breve io credo che in rarissimi casi si possa perfino ammettere un'omologia senza che vi sia alcuna delle indicate condizioni; in quella stessa maniera che può avvenire uno spostamento d'un organo durante il suo sviluppo (per es. si consideri il labbro inferiore degli insetti), così un organo può anche originare già spostato; l'omologia, ciò non ostante, esiste, e per ammetterla, occorre soltanto di render verosimile che è potuto avvenire questo spostamento; ciò che dico per lo spostamento, vale anche per i rapporti cogli altri organi, per il modo di svilupparsi etc.

Con ciò ho ammesso che l'omologia debba avere un valore molto lato, ma io tendo ad allargarlo ancora di più di quanto ho fin qui accennato, o, più esattamente, io credo che si debba tener calcolo d'un altra sorta di confronti, che vorrei denominare *convergenza*. Denominerei così il ripetersi di certe disposizioni organiche in un tipo, in una classe, in un ordine, in una famiglia, in un genere senza che questi organi siano tra loro omologhi. C'è bisogno di un organo della vista in un artropodo cieco? L'idioplasma tende a formarlo sul tipo dell'occhio degli artropodi, cioè come e là dove l'animale lo possedeva prima di diventar cieco, per es. un

(1) Io non riesco a ben rilevare i vantaggi, che risulterebbero dal negare il mesoderma specialmente negli animali superiori. A me pare che tutto concorra a dimostrare fondata l'ipotesi del Balfour che il mesoderma sia una formazione secondaria, tardiva, puramente embriologica, un adattamento embrionale quindi senza riscontro nella filogenia e in rapporto invece colla generale tendenza dell'ontogenia ad abbreviare la filogenia. Negli insetti se non si ammette il mesoderma, si casca in un caos orribile perchè in essi l'alterazione della filogenia è tale che compare prima il mesoderma e poi da esso si sviluppa l'entoderma o, se si vuole, si forma un foglietto che si può dire meso-entoderma, da cui più tardi si sviluppa il mesoderma e l'entoderma (V. la mia Memoria sulle api).

occhio composto vicino alle antenne. C'è bisogno in un insetto d'un organo protettore della superficie del corpo, regolante anche la respirazione cutanea? Si formano le squamme; si ricordino le squamme dei collemboli, dei tisanuri, degli aracnocefali, di certi ditteri, dei lepidotteri etc. Le circonvoluzioni cerebrali dei mammiferi si sono formate indipendentemente nei singoli ordini. L'occhio dei molluschi è caratterizzato da ciò che la retina e lo strato pimmentato formano una vescicola, la vescicola oculare (*Bütschli*): questa caratteristica si riscontra sì negli occhi del capo del mollusco cefaloforo che in quelli del mantello del pettine. Convergente è lo scheletro cutaneo nei varî gruppi di vertebrati. Per adattare interamente alla vita acquatica certi mammiferi (cetacei), la natura, se così mi è permesso d'esprimermi, li modifica in modo che possiedano molti organi proprî di quei vertebrati inferiori che sono adatti alla vita acquatica (notevole è la pinna dorsale, un organo che pare senza funzione importante nella maggior parte dei pesci) (1). Ho dato alcuni esempî per rischiarare il mio concetto; potrei aggiungerne molti altri, ma non lo farò perchè il lettore se li può trovar da sè stesso senza difficoltà. In breve, una volta ammesse le cause interne, a me pare che le convergenze meritino special considerazione. Credo ch'esse esprimano un certo grado di parentela tra gli organismi e trovino un certo riscontro nell'omonomia e nell'omodinamia. Esse ci permettono di spiegare la comparsa d'un medesimo organo in forme non legate da stretto grado di affinità, esse ci permettono di ammettere monofiletiche due classi, nonostante che un dato organo manchi per es. nelle forme più semplici d'una o d'ambedue queste classi, d'ammetterle, ripeto, monofiletiche, senza supporre degenerate le forme semplici. Veggo benissimo che l'argomento della convergenza si presta a molti abusi, ma ciò è proprio di molte cose che pur sono buone.

Queste premesse mi hanno guidato nel comporre la presente Memoria, la quale, se esse non parranno serie, si troverà gravemente difettosa. Del che però io spero che in ogni caso mi otterranno perdono i molti fatti da me scoperti nei varî tisanuri, animaluzzi che quasi tutti mal si prestano ad indagini anatomiche e che in genere non si trovano senza molta fatica, essendo anzi alcuni di essi veramente rari (per es. *Nicoletia* e *Lespismina*).

---

§. I. *Scheletro esterno e segmenti.*

Questo scheletro, segregato dall'ipoderma, è in *Campodea* molto delicato, lo che è in rapporto da una parte col poco sviluppo e col debolissimo differenziamento della muscolatura, dall'altra colla funzione respiratoria, la quale si compie evidentemente in gran parte attraverso gl'integumenti. La cuticula è molto sottile: le lamine dorsali e ventrali sono abbastanza distinte al torace, appena rilevabili all'addome. Notansi apodemi (cioè creste dello scheletro esterno nell'interno del corpo, o, com'altri dice, scheletro interno) in corrispondenza ai muscoli degli arti boccali, ai terghi e agli sterni

(1) Nota Albrecht che nei delfini *sind Reste eines auf die grossen Hörner des Zungenbeins folgenden Kiemenbogens gesehen worden* (Anat. Anz. n. 13, 1886).

toracici; devo aggiungere che in questi ultimi essi sono nient'altro che cortissime creste longitudinali, mediane ed impari. Si può forse descrivere cogli apodemi anche la sutura epicraniale.

In *Japyx solifugus* la cuticula è alquanto meno sottile che in *Campodea*; perciò le lamine dorsali e ventrali sono più sviluppate. Si trovano degli apodemi nelle stesse regioni che in *Campodea*, ma sono più robusti; oltracciò agli sterni toracici, essi hanno quasi forma di forche (Tav. I, fig. 9); è infine evidente uno special apodema degli sterni in corrispondenza all'inserzione di ciascuna pseudozampa. La sutura epicraniale benchè differente di forma, trova riscontro in *Campodea*.

In *Machilis* la cuticula, benchè non più tanto sottile, è però assai meno sviluppata che negli insetti superiori. I terghi si prolungano sui lati del corpo e vengono a finire quasi a livello dei margini laterali degli sterni; quelli si congiungono a questi ultimi per mezzo di pleure sottili che in complesso vengono nascoste a mo' di pieghe sotto quelle parti dei terghi che restano vicine agli sterni (Tav. I, fig. 13). Quindi, mentre in *Campodea* e in *Japyx* gli sterni si comportavano come per es. nelle locustide, nei lepidotteri e nei neurotteri, il *Machilis* imita per es. gli odonati, i ditteri e gli imenotteri. Apodemi esistono anche in *Machilis*. Ai singoli anelli del torace sono notevoli gli apodemi in corrispondenza all'inserzione delle zampe, sono pari, uno dà appoggio ad una zampa e l'altro all'altra. Si può ritenere che corrispondono in certo modo alle due braccia anteriori della forca di *Japyx*, braccia che si sarebbero staccate l'una dall'altra e allontanate dalla linea mediana (Tav. I, fig. 14). Invece gli sterni dell'addome presentano delle cosidette suture che trovano riscontro nelle forche toraciche di *Japyx* (Tav. I, fig. 2 *a* e *b*), e di questo paragone trarremo profitto più avanti. In complesso lo scheletro di *Machilis* è poco più differenziato di quello di *Japyx*.

Quanto alle *Lepismide* le mie ricerche sono deficienti; qui noterò soltanto che la cuticula pel suo spessore ricorda *Machilis*. Sterni e terghi appaiono quasi come in *Campodea*. Agli sterni addominali mancano le suture a forca.

Alla cuticola vanno annessi peli e squamme. Io considero queste squamme come ordinarî peli, o setole, appiattiti ed allargati (intendo quei peli che hanno una semplice funzione meccanica, non sensitiva). Esse dipendono da una cellula dell'ipoderma (ciò è evidente, almeno in certi periodi della vita, nel *Machilis*) appunto come i peli (Tav. I, fig. 1).

In *Campodea*, in rapporto colla cuticula molto sottile non notasi muta, tranne che, per quanto io ho veduto, in corrispondenza ai lobi interni delle mascelle ed ai tarsi. Trattasi quindi di una muta parziale. Io non ho verificato una vera muta neppure in *Japyx*, tranne che anch'esso cambia la cuticula in certi punti, per es. al forcipe. Negli altri tisanuri notasi una muta totale della cuticula dell'integumento, del sistema tracheale e degli intestini anteriori e posteriori.

Come indica già la cuticula, i segmenti sono evidentemente in numero di tre al torace e di dieci all'addome. Ciò si riferisce a tutti quanti i tisanuri. Le valve anali, contrariamente a quanto sostengono parecchi autori, non possono contare come un segmento e ciò dimostrano *ad evidentiam* le forme che possiedono ad un tempo un cerco impari e le valve (es. *Machilis*); siccome il cerco forma una vera continuazione

dell'addome a guisa della coda nei telifoni e nelle koenenie, così è in esso che si dovranno cercare i segmenti rudimentali.

I tisanuri provano con sicurezza che l'addome tipico degli insetti consta di dieci segmenti, i quali si formano anche nell'embrione di molti insetti superiori, per es. in quello dell'ape.

Nei tisanuri i terghi e gli sterni del terzo anello toracico sono ben distinti dai terghi e dagli sterni del primo anello addominale (segmento mediale).

Il servirsi, come hanno fatto parecchi autori, della sutura epicranica per determinare quanti segmenti entrino nel capo a me non sembra permesso.

§ II. *Muscolatura.*

La muscolatura degli insetti è un capitolo ancora quasi inesplorato, almeno nella direzione imposta dalla moderna morfologia; perciò con molta esitanza io mi decisi a studiare quella dei tisanuri, e più ancora ho esitato a renderne pubblicamente conto, pensando che per degnamente apprezzarla bisognava ch'io ne riprendessi lo studio negli insetti superiori, studio pel quale al presente mi manca il tempo. Se ad onta di questa lacuna mi sono risolto a darne qualche cenno, sì è perchè mi parve che alcune sue condizioni meritassero di esser segnalate indipendentemente da ogni confronto.

Il mio lavoro quindi per ora si limiterà a tracciare alcune linee dell'edifizio.

La *Campodea* (Tav. I, fig. 3, 4 e 5) offre condizioni mirabili di primitività nel sistema muscolare, come nella maggior parte degli altri organi. In rapporto con la cuticula, pochissimo sviluppata, e con la metameria uniforme, riscontrasi una grande semplicità, e, relativamente agli altri insetti, una monotona uniformità della muscolatura. In complesso, dal secondo al settimo metamero dell'addome e, relativamente con poche modificazioni nei metameri successivi, noto per ogni metamero da ogni lato: (1°) un muscolo dorsale piuttosto largo, appena più lungo del tergo e poco lontano dalla linea mediana (*m. longitudinalis dorsi*); (2°) un muscolo obliquo, dorsale, che anteriormente s'inserisce a ridosso dell'inserzione del (1°), esso attraversa la parte anteriore dello stesso (1°) tenendosi però più superficiale, cioè più vicino alla faccia dorsale, e posteriormente s'inserisce più in fuori, ma allo stesso suo livello (*m. obliquus dorsi*); (3°) parecchi muscoletti dorso-ventrali (*m. dorso-ventrales*) che vanno dal dorso al ventre; (4°) un muscolo ventrale simile al (1°), ma più lontano dalla linea mediana (*m. longitudinalis ventris*); (5°) un muscolo subganglionare, cioè collocato tra l'intestino e la catena ganglionare: è obliquo, s'inserisce anteriormente sulla linea mediana verso la metà della lunghezza del segmento, e precisamente sotto al ganglio, posteriormente, ossia lateralmente, vicino all'inserzione posteriore del *longitudinalis ventris*: per quanto dissi, il muscolo subganglionare d'un lato forma con quello dell'altro un Λ. Questi muscoli (*m. subganglionares*) accennano alla formazione di quel sepimento ventrale che venne descritto dal Graber come parte integrante dell'apparato vascolare negli insetti superiori. Esistono oltracciò dei corti muscoletti longitudinali, al lato esterno del *longitudinalis ventris* dal quale sono però ben separati; di essi uno almeno va alla pseudozampa, e gli altri alla vescicola addominale (*m. retrahentes*

pseudopodum et vesicularum). Questi muscoli uniformi per le pseudozampe e le vescicole, tenderebbero a confortare l'ipotesi che gli organi or nominati siano rami d'un unico arto (V. più avanti). Accennerò infine anche l'esistenza d'altri muscoletti ventrali (*obliqui et transversi ventrales*).

In *Japyx*, in rapporto allo sviluppo alquanto maggiore della cuticula, la muscolatura è più sviluppata e più complessa. La accenno, tenendo per termine di confronto la *Campodea* (Tav. I, fig. 6 e 7). Nei segmenti sopraccennati per la *Campodea*, oltre ai muscoli (1°) e (2°), esistono altri muscoli obliqui e trasversali del dorso. Il (3°) trova riscontro: esistono molti altri muscoletti obliqui e trasversali dorso-ventrali. Il (4°) è suddiviso in parecchi muscoli con direzione in parte alquanto differente. Il (5°) trova perfetto riscontro. Oltracciò esistono parecchi muscoletti obliqui e trasversali ventrali, come in *Campodea*. Simili a quelli della *Campodea*, sono i muscoli delle pseudozampe.

In *Machilis*, sempre nella regione in discorso, la muscolatura è molto diversamente disposta (Tav. I, fig. 8). Ciò è in rapporto specialmente col fatto che il corpo, invece di esser più o meno appiattito, è cilindrico ed i terghi molto sviluppati s'estendono fino agli sterni, che sono piuttosto stretti, mentre le pleure sono ridotte a sottili pieghe (Tav. I, fig. 13). La muscolatura ventrale di *Japyx* e di *Campodea* si trova spinta nelle parti laterali del corpo e si prolunga fin molto vicino ai muscoli dorsali: oltracciò la massa di questa muscolatura è maggiore di quella di *Japyx* e *Campodea*. Mi preme far rilevare in modo speciale, al dorso (*muscolatura obliqua dorsale*), due muscoli, obliqui, l'uno in senso opposto all'altro e l'uno sovrastante all'altro; noto ai lati (*muscolatura obliqua laterale*) due muscoli ad essi simili ed un terzo, più esterno, corrispondente probabilmente al longitudinale del ventre di *Japyx* e *Campodea*.

Tanto al di dentro, quanto al di fuori di questa muscolatura laterale, cioè tra essa e l'intestino, quanto tra essa e l'integumento esiste un muscolo dorso-ventrale (Tav. I, fig. 13). Par che manchi un muscolo paragonabile al subganglionare. Simili a quelli di *Campodea* sono i muscoli retrattori delle pseudozampe e delle vescicole.

La muscolatura toracica dei tisanuri è molto complicata per la presenza delle zampe (Tav. I fig. 9 e 10). In complesso troviamo tanto in *Japyx*, quanto in *Campodea*, i muscoli longitudinali e obliqui del dorso. I longitudinali del ventre non sono più riconoscibili con sicurezza. I muscoli dorso-ventrali vanno in parte alle zampe e così pure gli obliqui ventrali (alcuni di questi rappresentano forse i subganglionari). In corrispondenza agli sterni (V. § precedente) del torace notasi in *Japyx* la così detta forca (Y), che è rappresentata da una semplice e corta cresta mediana longitudinale in *Campodea*. È in rapporto con ciò, una maggior complicazione e una differente disposizione della muscolatura di *Japyx*, in confronto di quella di *Campodea*, nella regione in discorso.

Mentre in *Japyx*, in *Campodea* e fino ad un certo punto anche in *Machilis*, la muscolatura longitudinale e obliqua-longitudinale, specialmente agli anelli addominali sopraccennati, si può ritener regolarmente divisa in miotommi, corrispondenti ai singoli segmenti; in *Lepisma* invece questo carattere primitivo si è considerevolmente

alterato: alla regione dorsale in *Lepisma* s'incontra cioè una parziale e complicata fusione dei miotommi. Con ciò è probabilmente in rapporto da una parte l'impiccolirsi dell'addome in confronto col torace (ciò che è una caratteristica della *Lepisma*) e dall'altra la disposizione dei visceri della cavità addominale. La muscolatura di *Lepisma* assomiglia più a quella di *Japyx* e di *Campodea*, che a quella di *Machilis*, non essendo avvenuto il sopraricordato spostamento della muscolatura ventrale, verso la parte laterale del corpo. È notevole che i muscoli subganglionari di *Campodea* e di *Japyx* sono qui in *Lepisma* sopraganglionari, cioè hanno un rapporto opposto con la catena ganglionare.

Le quistioni principali ch'io voleva risolvere con lo studio della muscolatura dei tisanuri, sono le seguenti:

1° si può dalla sua disposizione arguire che una volta i tisanuri abbiano avuto ali, e poi le abbiano perdute, come presuppongono la teoria della degenerazione e della neotenia?

2° si può da essa indurre che siano esistite una volta delle zampe ai segmenti addominali?

Io non ho incontrato alcuna disposizione che autorizzi ad ammettere la prima supposizione. Soltanto si può dire che i tisanuri, come vanno forniti di prolungamenti laterali dei terghi adatti a trasformarsi in ali ed anche in branchie, così sono provvisti di muscoli adatti a trasformarsi in muscoli per le ali e per le branchie. Questi muscoli, che sono i sagittali o dorso-ventrali, è importante notarlo, esistono non appena ai singoli anelli toracici, ma anche a quelli addominali. Così per es., i muscoli dorso-ventrali dell'addome di *Machilis* possono paragonarsi al *flexor* e all'*extensor alae* degli ortotteri quali vengono descritti dal Lucks.

Al secondo quesito si deve forse rispondere che i muscoli delle pseudozampe e delle vescicole si possono ritener residuo della muscolatura delle zampe, e precisamente paragonare agli estremi distali di essa. In ogni modo la disposizione della muscolatura non vieta l'induzione in discorso, induzione che è sorretta da molti altri argomenti.

Voglio infine far notare che la muscolatura dei tisanuri, benchè in parte fondamentalmente divisa in porzione dorsale e ventrale con campi laterali e linee mediane dorsali e ventrali, non si può direttamente rannodare a quella degli anellidi, come ha fatto il Lucks. Essa non ha neppure intimi rapporti con quella del Peripatus.

§ III. *Sistema respiratorio.*

A) *Stigmi.* Sono collocati nelle pleure. In *Campodea* (Tav. II, fig. 15 e 16) esistono tre stigmi, il primo viene dopo il margine anteriore del secondo sterno; il secondo è a livello quasi dell'inserzione del secondo paio di zampe, il terzo del terzo paio Mi pare evidente che amendue corrispondono davanti al margine posteriore del relativo tergo. Il primo è laterale, piuttosto ventrale, il secondo e il terzo sono dorsali-laterali.

In *Japyx solifugus* (Tav. II, fig. 17 e 18) gli stigmi sono undici, il primo corrisponde al primo di *Campodea*, ma è collocato al davanti del margine posteriore del primo sterno; il secondo corrisponde anche per la posizione al secondo di *Campodea*; il terzo, che evidentemente manca in *Campodea*, è ventral laterale ed è vicino al

margine anteriore del terzo sterno (non mi è riuscito di determinare questo punto con maggior esattezza), il quarto corrisponde perfettamente al terzo di *Campodea*. Gli altri sette corrispondono appena al davanti del margine posteriore dei primi sette sterni addominali e sono laterali ventrali. In *Japyx Isabellae* (Grassi) (Tav. II, fig. 19) è notevolissima la mancanza degli stigmi corrispondenti al 2° e al 4° di *Japyx solifugus*.

In *Machilis* (Tav. II, fig. 20, 21, 22) gli stigmi sono nove: uno laterale tra il primo ed il secondo anello toracico, uno lateral ventrale tra il secondo ed il terzo e sette laterali ventrali in corrispondenza al terzo anteriore del secondo, terzo, quarto, quinto, sesto, settimo ed ottavo sterno addominale. Il primo corrisponde certamente al primo di *Japyx solifugus*, di *Japyx Isabellae* e di *Campodea*; il secondo, io credo, al terzo di *Japyx solifugus* ed al secondo di *Japyx Isabellae*. Quanto agli altri sette io li ritengo corrispondenti agli ultimi sette di *Japyx solifugus* ed *Isabellae*, nonostante che presentino una differenza e cioè, invece di stare davanti del margine posteriore dei primi sette anelli addominali, si trovino al terzo anteriore del segmento secondo e seguenti fino all'ottavo compreso. Mancano quindi in *Machilis* il secondo ed il quarto di *Japyx solifugus*, il secondo ed il terzo di *Campodea*; il *Machilis* si comporta perciò come l'*Japyx Isabellae*.

Nicoletia (Tav. II, fig. 23 e 24) possiede dieci stigmi. Il primo è laterale, corrisponde certamente al primo delle forme sopra nominate; esso è collocato a livello della parte anteriore del secondo sterno, cioè come in *Campodea*. Il secondo pure laterale sta a livello della parte anteriore del terzo sterno, lo credo omologo al terzo di *Japyx solifugus* e al secondo di *Japyx Isabellae* e di *Machilis*. Gli otto successivi stanno in una posizione laterale ventrale e sono riferibili agli intersegmenti tra il terzo sterno toracico ed il primo addominale ed ai successivi fino a quello tra il settimo e l'ottavo sterno addominale. Gli ultimi sette stigmi sono evidentemente corrispondenti agli ultimi sette di *Japyx* e di *Machilis*. Si può fondatamente credere che il terzo, quello cioè che sta tra il terzo anello toracico ed il primo addominale corrisponde al quarto di *Japyx solifugus* ed al terzo di *Campodea*. Pare quindi che in *Nicoletia* manchi appena il secondo di *Japyx solifugus*.

In *Lepismina* gli stigmi sono dieci; sono laterali ventrali; stanno collocati a livello degli intersegmenti tra il primo e il secondo sterno toracico e nei successivi fino a quello tra il settimo e l'ottavo addominale. Lo stesso fatto ripetesi in *Lepisma* (Palmen). Si può adunque dire che gli stigmi di *Lepismina* e *Lepisma* corrispondono a quelli di *Nicoletia*: valgono quindi per esse i raffronti stabiliti per quest'ultima.

Dalle qui riferite disposizioni risulta anzi tutto che gli stigmi non hanno una posizione assolutamente fissa: così per es. il primo in *Japyx solifugus* è più anteriore del primo degli altri tisanuri, ciò che trova forse la sua ragione nel maggior numero di stigmi di quest'animale. Questi spostamenti sono evidenti specialmente nel senso dell'asse longitudinale dell'animale.

Io mi ritengo autorizzato ad ammettere come omologie i surriferiti riscontri tra i varî tisanuri. *Indubbiamente la condizione di Japyx solifugus è la più primitiva e deve formare il punto di partenza per giudicare gli stigmi di tutti quanti gli altri insetti. Perciò ritengo che nell'insetto più primitivo che noi conosciamo per rapporto agli stigmi, gli stigmi toracici siano quattro e sette gli addominali.*

Quindi, riassumendo, *in Campodea non esistono che tre stigmi toracici, mancano il terzo e gli ultimi sette di Japyx solifugus. In Japyx Isabellae ne esistono due toracici e sette addominali, manca perciò il secondo ed il quarto di Japyx solifugus; lo stesso in Machilis. Nelle Lepismide ne esistono molto probabilmente tre toracici e sette addominali; manca il secondo di Japyx solifugus.*

Il fatto che l'*Japyx solifugus* ha quattro stigmi nel torace, permette l'illazione che la *posizione originaria degli stigmi toracici non è segmentale,* essendo evidentemente appena tre i segmenti toracici di *Japyx solifugus.* Il supporre che lo stigma sopranumerario sia derivato per spostamento d'uno stigma dalla testa o dall'addome, a me sembra infondato. Invece l'ammettere che gli stigmi originariamente non hanno una vera disposizione segmentale, ci permette di avvicinare i tisanuri alle condizioni del peripato, nel quale appunto troviamo molto numerosi stigmi, collocati nelle regioni intersegmentali senza un ordine determinabile (Gaffron).

Notisi fin d'ora che le condizioni delle Lepismide si continuano nelle blatte e in genere negli ortotteri. Esse si riproducono anche nell'embrione dell'ape.

È inutile soggiungere che questi fatti obbligano a modificare profondamente molte conclusioni fondamentali della famosa opera di Palmen sul sistema tracheale degli insetti. Tre sono i punti principali in cui io discordo da quest'egregio autore, vale a dire: 1° si deve ritenere con Gerstäcker che molti insetti hanno ancor oggi tre stigmi toracici e non appena due, come vuol Palmen; 2° dalle condizioni dei tisanuri si passa direttamente a quelle di blatta e degli ortotteri; 3° *Japyx* non ha due, ma quattro stigmi toracici [1]. Il secondo punto verrà qui sotto da me ulteriormente rischiarato collo studio delle trachee.

B) *Trachee*: (V. le figure già citate per gli stigmi).

In *Campodea* i rami tracheali sono molto pochi e non esistono anastomosi sicchè i rami derivati da uno stigma sono indipendenti da quelli derivati dall'altro.

In *Japyx* si sviluppa invece un tronco longitudinale: esso sta avvicinato più alla superficie ventrale, che alla dorsale e fa comunicare tra di loro i bronchi degli stigmi. Tra le trachee d'un lato e quelle dell'altro lato non esiste che un'anastomosi sola; essa è trasversal dorsale tra l'ottavo e il nono segmento addominale.

In *Machilis* mancano tanto le anastomosi longitudinali, quanto quelle trasversali, e perciò ripetonsi le condizioni di *Campodea;* i rami tracheali sono però relativamente abbastanza numerosi, presso a poco come in *Japyx.*

In *Nicoletia* e in *Lepismina* i rami tracheali sono ancora più abbondanti; raggiungono il massimo sviluppo in *Lepisma.* Esistono in tutte le lepismide due tronchi longitudinali, come in *Japyx*, colla notevole differenza ch'essi sono avvicinati alla faccia dorsale. Manca l'anastomosi dorsale di *Japyx;* s'incontra invece una serie di anastomosi trasversali ventrali, in generale una per ogni segmento, tranne che pei segmenti toracici che ne presentano parecchie. Abbiamo per ciò nelle lepismide un perfezionamento in confronto agli altri tisanuri. Le differenze tra gli *Japyx* e le lepismide sono veramente considerevoli.

[1] Palmen ammetteva con Meinert che *Japyx* avesse soltanto dieci stigmi. V. *Zur Morphologie d. Tracheensystems.* Helsingfors, 1877.

Essenzialmente il sistema tracheale dei tisanuri trova riscontro negli ortotteri.

Nella blatta troviamo delle condizioni, che compendiano in certo modo quelle di *Japyx* e delle lepismide, infatti i due tronchi ventrali longitudinali di *Japyx* trovano riscontro nei due longitudinali ventrali di blatta, i due longitudinali dorsali di lepismida nei due longitudinali dorsali di blatta; oltracciò esiste in blatta (¹) l'anastomosi dorsal trasversale di *Japyx* e quelle trasversali ventrali delle lepismide. Notisi però che in blatta riscontransi altri tronchi longitudinali ed altre anastomosi che non esistono nei tisanuri; gli altri ortotteri si rannodano intimamente ai tisanuri. Secondo il Dohrn citato dal Nussbaum (²) nel grillotalpa non esistono anastomosi di sorta nè longitudinali nè trasversali. Se ciò è vero, *Campodea* e *Machilis* si avvicinano al grillotalpa per un'importante caratteristica.

Il sistema tracheale dell'embrione dell'ape, dopo di essere passato per uno stadio in cui ricorda *Machilis* e *Campodea*, diventa similissimo a quello delle lepismide pei tronchi longitudinali e per le anastomosi trasversali: anche gli stigmi, come già dissi, corrispondono benissimo.

Notevole si è che mentre nelle api il sistema tracheale compare relativamente con molta precocità, nei tisanuri invece il suo sviluppo è tardivo. Nella *Campodea* neonata, nell'embrione dell'japyx già inoltrato molto nello sviluppo dentro l'uovo, non ne potei rilevare traccia alcuna! Perchè si verifichino queste differenze d'epoca è cosa difficile ad esplicare. Ricordando che noi vediamo talvolta anticipare lo sviluppo embrionale di quegli organi che assumono grande complicazione nell'adulto, potremmo ritener anticipato lo sviluppo nell'ape, il cui sistema tracheale diventa complicatissimo. Si potrebbe sospettare invece che il ritardo nei tisanuri indicasse che il loro sistema tracheale è in via di regressione. Non voglio però tacere che il sistema tracheale anche in peripato ha uno sviluppo relativamente tardivo (Kennel). Questo ritardo nei tisanuri ed in peripato, insieme colla relazione da me sopra ammessa tra gli stigmi di peripato e quelli dei tisanuri, fa inclinare a credere che non esiste alcuna omologia tra il sistema tracheale e gli organi segmentali (nefridi), ciò che però non esclude che questi sistemi possano esser convergenti (V. il § sulla posizione sistematica dei tisanuri).

Colla formazione delle trachee dei tracheati e dei protracheati si deve, secondo me, collegare la formazione dei processi interni dello scheletro (apodemi V. § 1); questi si sviluppano come quelli. Un'introflessione dell'ipoderma è il punto di partenza per lo sviluppo tanto degli apodemi, quanto delle trachee: se l'introflessione si riempie interamente, o quasi di cuticula (chitina) segregata dall'ipoderma stesso introflesso, abbiamo un apodema; se la cuticula si limita invece a rivestire la superficie libera dell'ipoderma, abbiamo un canaletto tappezzato di cuticula, cioè la trachea col relativo stigma.

Al capo degli insetti alati (lepidotteri per es.) si sviluppano dei canali che si possono, a mio credere, ritener stigmi e trachee embrionali, ma che più tardi si riempiono più o meno di cuticula sicchè diventano apodemi. Un paio di canali simili venne da me scoperto negli embrioni dell'ape; si rammenti in proposito che la

(¹) *The structure and life-history of the Cockroach of Miall a. Deny.* London, 1886.

(²) La Memoria di Nussbaum forma un capitolo dell'opera citata nella nota (¹).

scolopendrella (un miriapodo non molto lontano dai tisanuri) ha uno stigma cefalico e che c' è luogo al sospetto che uno stigma simile esista anche in alcuni collemboli. Trovasi nella scolopendrella (Grassi) e nelle larve delle efemeride (Palmen) una serie di apodemi disposti in ordine segmentale, i quali sono con ogni verosimiglianza derivati da trasformazione di veri stigmi coi relativi bronchi. In certi casi l'apodema non è tutto solido, ma presenta delle lacune irregolari più o meno chiaramente canaliculari; allora la sua somiglianza colle trachee è meglio evidente (es. in scolopendrella, ma più chiaramente alla testa del *Bombyx Mori*).

Si aggiunga che il rapporto tra la formazione degli apodemi e quella del sistema tracheale dev'essere molto intimo anche dal punto di vista fisiologico, infatti: I) deve esistere una correlazione tra l'ispessirsi della cuticula e la formazione delle trachee: il primo fatto viene a sopprimere la respirazione cutanea e a produrre le necessità di nuovi organi respiratori; II) l'ispessirsi della cuticula d'altra parte permette un maggior sviluppo della muscolatura, la quale alla sua volta tende a produrre infossamenti dell'ipoderma e della cuticula a cui possa prendere più esteso attacco, tende a far nascere cioè degli apodemi. In breve l'ispessirsi della cuticula e il correlativo complicarsi della muscolatura sono il movente della formazione degli apodemi e del sistema tracheale [1].

§ IV. *Sistema nervoso e organi di senso.*

I) *Sistema nervoso.* Nel sistema nervoso di *Campodea* notiamo un ganglio sopraesofageo ed una catena ganglionare formata da un ganglio cefalico (sottoesofageo) (Tav. III, fig. 29), da tre gangli toracici e da sette gangli addominali, l'ultimo dei quali è alquanto più grosso dei precedenti: ogni anello toracico e ciascuno dei primi sette addominali vengono così a possedere un proprio ganglio. In *Japyx* (Tav. III, fig. 28) troviamo un ganglio di più, per cui anche l'ottavo anello addominale resta provvisto d'un proprio ganglio; quest'ultimo è più grosso dei precedenti. Per essere più esatti si deve dire che, in rapporto col maggior sviluppo che assume in *Japyx* l'apparato genitale, la porzione addominale della catena ganglionare, la quale originariamente (per es. nell'embrione dell'ape) possiede dieci gangli (uno per ciascuno dei dieci segmenti onde si compone l'addome), invece di ridursi a sette gangli, si riduce soltanto ad otto: invece di presentare cioè come in *Campodea*, in corrispondenza al settimo segmento, un ganglio che serve anche per gli anelli seguenti, ne presenta due, uno in corrispondenza al settimo e l'altro all'ottavo, quest'ultimo serve anche per gli anelli seguenti (nono e decimo). Con altri termini, dalla struttura e dalla grossezza del settimo ed ultimo ganglio addominale di *Campodea* e dell'ottavo ed ultimo ganglio di *Japyx* è lecito indurre che il primo è formato dalla fusione e parziale riduzione degli ultimi quattro gangli embrionali, il secondo dalla fusione e parziale riduzione degli ultimi tre. Non fa d'uopo aggiungere che queste fusioni sono in rapporto colla quasi mancante indipendenza reciproca degli ultimi anelli dell'addome, e colla loro attuale tendenza a ridursi, continuando così su una via che l'estremità dell'addome segue già

[1] In proposito i seni tracheali dei diplopodi meritano un ulteriore studio.

da molto tempo, come prova il cerco impari dei tisanuri, la coda dei Telifoni e di Koenenia (V. più avanti) ed il postaddome degli scorpionidi.

Machilis presentasi come *Japyx* colla sola differenza che l'ottavo ganglio addominale non si limita all'ottavo anello, ma si estende anche alla parte anteriore del nono, ciò che è in rapporto col maggior sviluppo dei genitali esterni a spese sopratutto del nono anello, ossia colla grave servitù di questo anello verso l'ottavo e colla conseguente imperfetta separazione dell'uno dall'altro.

Le condizioni di *Nicoletia* e di *Lepismina* sono come quelle di *Machilis:* lo stesso dicasi di *Lepisma.*

In tutti i tisanuri troviamo commissure pari tra i gangli addominali; esse sono più o meno addossate l'una all'altra. In *Japyx* sono relativamente lunghe. Almeno in alcune specie del genere *Lepisma* (Tav. III, fig. 30) il settimo ganglio addominale passa nell'ottavo senza commissura distinta, vale a dire la parte cellulare dell'uno si continua nella parte cellulare dell'altro senza interruzione ed il confine dei due gangli viene perciò segnato da un semplice strozzamento. Si noti che un fatto simile si ripete almeno per parecchi altri gangli della catena ganglionare ventrale nelle lepisme neonate. In queste condizioni la catena ganglionare rassomiglia a quella di scolopendrella. Ciò viene a confermare che la condizione di scolopendrella è più primitiva di quella di lepisma. Aggiungasi in proposito che nell'embrione p. es. dell'ape lo sviluppo delle commissure è più tardivo di quello dei gangli.

Quanto al ganglio sopraesofageo (Tav. III, fig. 25, 26 e 27) le mie ricerche sono incomplete, non essendo io riuscito a seguire dentro di esso il decorso dei fasci nervosi nè in *Campodea*, nè in *Japyx.* In tutti i tisanuri è evidente l'accenno della primitiva composizione per mezzo di due gangli, uno destro e l'altro sinistro. In complesso si possono ammettere in ogni metà del cervello tre lobi: uno *anteriore* da cui si diparte il nervo delle antenne, uno *laterale*, più o meno lateral anteriore o posteriore, che serve per gli occhi (lobo ottico) ed è più o meno rudimentale nelle forme senz'occhi (*Campodea*, *Japyx*, *Nicoletia* e *Lepismina*), ben sviluppato invece nelle forme fornite di occhi (*Machilis* e *Lepisma*), ed uno infine *posteriore*, da cui probabilmente si dipartono i nervi viscerali pari. La struttura intima del cervello di *Lepisma* si rannoda a quella dello stesso organo nella Blatta.

Nel *Machilis* e nelle *Lepismide* ho potuto constatare una speciale commissura sottoesofagea che riunisce la metà destra colla sinistra del ganglio sopraesofageo: in *Machilis* essa mi apparve doppia: nasce appunto da ciascuna metà del ganglio sopraesofageo press'a poco insieme colla commissura che unisce ciascuna metà del ganglio stesso al ganglio sottoesofageo (quest'ultima commissura è molto corta nelle *Lepismide*). Ricordo che una commissura simile esiste in svariati crostacei, miriapodi ed insetti, compresi tra quest'ultimi anche gli ortotteri (Blatta etc.).

Esiste in tutte le forme un sistema nervoso stomatogastrico (viscerale); esso risulta d'un ganglio frontale formato da due nervi derivati dalla parte anteriore del cervello, come in tutti gli insetti. Si sviluppa inoltre dal ganglio frontale un nervo ricorrente. Esistono anche dei ganglietti pari (gangli pariesofagei o gangli viscerali pari): li ho trovati in tutte le forme, eccetto in *Campodea;* i nervi che li formano (viscerali pari) probabilmente come or ora dissi, si dipartono dai lobi posteriori del

cervello. Un sistema simpatico indipendente, cioè coi relativi gangli, manca in tutti i tisanuri.

Nella catena ganglionare di *Japyx* (Tav. III, fig. 30) esistono in complesso sei nervi per ogni ganglio, tre a destra e tre a sinistra: uno è anteriore, un secondo è medio ed il terzo è posteriore: questo è apparentemente derivato dalle commissure longitudinali e può denominarsi commissurale. Esiste un ramo che va da esso al nervo anteriore del ganglio successivo. Per me è probabile che questo ramo comunicante ed altri che stabiliscono comunicazioni tra i tre nervi in discorso debbansi ritenere come un accenno del simpatico. Rami simili coi caratteri ascritti al simpatico esistono nelle *Lepismide*. In *Machilis* poi si trovano anche dei nervi mediani impari che evidentemente alludono al simpatico e se ne distinguono soltanto per la mancanza dei rigonfiamenti ganglionari.

Ad ogni modo ripeto che un simpatico indipendente non esiste, e ciò non è esclusivo dei tisanuri, ma di parecchi altri insetti tra cui specialmente meritano menzione alcuni ortotteri.

Gli occhi non esistono che in *Lepisma* ed in *Machilis*. Sono composti ed in numero di due. Vanno caratterizzati dalla mancanza della lamina retinica (ganglio periottico, ganglio ottico esterno di Berger). Una simile condizione ripetesi in *Periplaneta*, in *Nepa* ed in *Forficula;* notisi inoltre che in quegli insetti, che hanno questa lamina retinica, essa si forma relativamente tardi. Gli occhi composti sono euconi: i coni sono molto molli nel *Machilis*, lo che si ripete negli insetti d'altre classi compresi gli ortotteri. I rabdomi sono ben separati dalle cellule che li hanno segregati. Queste cellule (retiniche) sono fornite di pigmento.

Voglio aggiungere che in certe sezioni di *Thermophila Furnorum* il rabdoma all'indietro diventa molto sottile e presenta così una sorta di coda che va a finire molto probabilmente in una fibrilla del nervo ottico. Questo nervo in *Thermophila* e *Lepisma* è relativamente lungo, è invece appena accennato in *Machilis*, il cui occhio è perciò addossato ai lobi ottici.

In complesso l'occhio composto dei tisanuri è fabbricato sul tipo di quello degli altri insetti e specialmente degli ortotteri. Il ritenerlo con Brauer eterofiletico a me sembra del tutto ingiustificato.

Io non ho potuto constatare nei tisanuri organi cordotonali.

Di altre speciali terminazioni nervose alle antenne, ai palpi mascellari, al lobo mascellare esterno e al palpo labiale parlerò nella promessa Memoria istologica.

In conclusione il sistema nervoso e l'occhio dei tisanuri mentre hanno nettamente il tipo degli stessi apparati negli altri insetti, se ne differenziano soltanto per una relativa semplicità.

Al proposito è importante aggiungere che il sistema nervoso di *Campodea* è ancora in stretto rapporto coll'ipoderma; in certi punti corrispondenti alla massima grossezza dei gangliî esso è interamente riunito coll'ipoderma, senza che si possa dimostrare traccia del gangliolemma divisore, il quale viene ad essere perciò incompleto.

Questa gangliolemma in *Japyx* ed in altri tisanuri, come pure là dov'esso esiste in Campodea, consta d'un semplice strato di cellule piatte senza fibre muscolari. In Japyx tra il gangliolemma ed il ganglio esiste una lacuna relativamente ampia.

§ V. *Intestino.*

L'intestino dei tisanuri va complicandosi andando da *Campodea* a *Lepisma*.

In *Campodea* ed in *Japyx* è uguale a quello dell'embrione degli insetti superiori, per es. dell'ape. Vi distinguo le tre parti caratteristiche, intestino anteriore (ectodermico), medio (entodermico) e posteriore (ectodermico).

A) *Intestino anteriore.*

In complesso in *Japyx* e *Campodea* (Tav. III, fig. 32 e 31) è molto stretto; ha calibro uniforme, tranne all'indietro in cui la strettezza è alquanto minore, lo che però non è sempre evidente. Là dove sbocca nell'intestino medio forma un cercine sporgente nel lume di quest'ultimo. Ho osservato che questo intestino anteriore presenta lo strato epiteliale colla relativa cuticula disposto in guisa da formare delle delicatissime pieghe longitudinali.

In *Machilis* (Tav. III, fig. 33) comportasi in modo del tutto simile tranne che la lieve dilatazione posteriore è meno oscura; si ripetono anche le pieghe longitudinali le quali, almeno in un certo tratto, sono in numero di sei.

In *Nicoletia* (Tav. III, fig. 34) l'intestino anteriore è più lungo che in *Japyx*, in *Campodea* ed in *Machilis*; si estende cioè fino al principio del secondo segmento addominale, lo che è in rapporto con un ulteriore differenziamento ch'esso ha subìto. Le pieghe interne e la poco spiccata dilatazione della parte posteriore nelle precedenti forme hanno in *Nicoletia* assunto uno sviluppo ben definito. Precisiamo: circa la metà posteriore dell'intestino anteriore offresi ben dilatata; la dilatazione in avanti sviluppasi gradualmente; invece all'estremità posteriore cessa quasi bruscamente; lo sbocco nell'intestino medio è molto stretto; nel brevissimo tratto che corre dal punto in cui la dilatazione comincia a restringersi fino allo sbocco nell'intestino medio, la cuticula col rispettivo epitelio presentasi disposta in sei larghe papille che nella loro parte anteriore sono fornite di spine (semplici processi della cuticula) (Tav. III, fig. 36). Queste papille hanno un'evidente derivazione dalle pieghe di sopra ricordate.

In *Lepismina* l'intestino anteriore è simile a quello di *Nicoletia*. All'indietro s'allarga e poi presenta un restringimento allo sbocco nell'intestino medio. In corrispondenza allo sbocco, notansi traccie di sei papille, molto meno nette però che in *Nicoletia*.

Evidentemente in *Nicoletia* e anche in *Lepismina* queste modificazioni della parte posteriore accennano alla formazione di un'ingluvie e d'un ventriglio (proventricolo) (gisiere). Mentre le sei papille sopraindicate conducono nettamente alla formazione del ventriglio, la dilatazione conduce alla formazione dell'ingluvie.

Tutto ciò è nettamente esplicato in *Lepisma* (Tav. III, fig. 35). Qui esiste in corrispondenza al capo uno stretto esofago, a cui fa seguito un'ingluvie rivestita di cuticula spinosa (le spine sono gracilissime) notevolmente allargata alla sua parte posteriore, la quale passa, senza molto restringersi, in un ventriglio fornito di sei papille con sei denti chitinosi. L'ingluvie comincia al principio del torace, s'estende per tutta la sua lunghezza e finisce al principio dell'addome; il ventriglio occupa la parte anteriore di questo. In confronto a *Campodea*, *Japyx* e *Machilis* quest'intestino anteriore di *Lepisma* è molto lungo; è un po' più lungo di quello di *Nicoletia* e anche di quello di *Lepismina*.

Le condizioni che abbiamo descritto in *Lepisma* hanno perfetto riscontro in blatta e in altri ortotteri.

Voglio notare che l'embrione dell'ape ancora nell'uovo passa per uno stadio in cui il suo intestino anteriore anche per le pieghe rassomiglia a quello di *Campodea*, di *Japyx* e di *Machilis*; nell'adulto acquista caratteri che trovano riscontro in *Lepisma* cioè presenta nettamente una differenziazione in parti omologhe all'ingluvie e al ventriglio ([1]).

B) *Intestino medio* (V. le figure precedenti).

Esso è in *Campodea* e in *Japyx* un semplice tubo che decorrendo dritto arriva fino circa all'ottavo anello addominale; è piuttosto largo, specialmente in avanti.

In *Machilis* presentasi molto simile, soltanto che alla sua estremità anteriore presenta due diverticoli, uno destro, l'altro sinistro; sono paragonabili a quei diverticoli che esistono in parecchie classi di vermi (es. in certi chetognati), se ne differenziano soltanto perchè ciascuno possiede tre corti diverticoli secondarî (Rovelli).

In *Nicoletia* mancano le borse ventricolari, perciò essa conserva le condizioni di *Japyx* e *Campodea.*

Lepismina è del tutto uguale a *Nicoletia.* Certe lepisme (*Thermophila furnorum*, *Lepisma subvittata*, *Lepisma ciliata*) hanno numerose borse ventricolari, certe (*Lepisma n. sp.?*) ne hanno appena due, una destra, l'altra sinistra, certe altre infine (*Lepisma saccharina*) non ne hanno nessuna (Rovelli). È notevole che la parte anteriore è molto dilatata (a guisa di calice) in *Lepisma*, lo che era appena accennato negli altri tisanuri. Quest'intestino medio, che era diritto o quasi nei precedenti tisanuri, in *Lepisma* alla parte posteriore subisce una curva che probabilmente deve rapportarsi alla grande estensione che ha assunto l'intestino anteriore; di questa curva dovrò riparlare a proposito dell'intestino posteriore.

La comparsa delle borse ventricolari nei tisanuri superiori è molto notevole; essa impartisce ai tisanuri il carattere d'ortottero ([2]).

Io ritengo come primitivo l'intestino medio di *Japyx*, di *Campodea*, di *Machilis*, di *Nicoletia* e di *Lepismina.* Segue una forma con due borse ventricolari, una destra e l'altra sinistra. Le altre forme si devono, secondo me, dedurre da questa ultima.

Lo strato epiteliale (Tav. III, fig. 37 *a*) è fatto di cellule cilindriche uniformi in *Japyx* ed in *Campodea.* In *Machilis* (Tav. III, fig. 37 *b*) e in *Nicoletia* esiste uno strato epiteliale cilindrico (epitelio intestinale p. d.) tra le cui cellule s'intercalano più o meno numerosi follicoli o cripte: queste cripte non sono altro che parecchie cellule piuttosto basse, che stanno collocate in mezzo all'epitelio intestinale p. d.; esse formano una sorta di sacchetto piriforme che s'apre nel lume intestinale. Qualcosa di molto simile esiste nelle *Lepisme*, però, almeno in certe specie, è talvolta evidente Tav. III, fig. 37 *c*) che nei punti circostanti alle cripte l'epitelio intestinale p. d. si incurva verso di esse, per cui sui tagli verticali, i nuclei delle sue cellule cilindriche sono disposti in modo che descrivono tanti archi di cerchio a convessità rivolta verso il lume dell'intestino; a ciascuno dei due estremi d'un arco corrisponde una cripta.

([1]) V. specialmente Schönfeld in Bienenzeitung, 1886.

([2]) V. specialmente Rovelli, *Ricerche sul tubo digerente degli atteri, ortotteri etc.* Como 1884.

Abbiamo quindi nel primo caso (*Machilis*, *Nicoletia* e certe *Lepisme*) dei semplici follicoli interposti tra le cellule cilindriche, nel secondo caso (certe *Lepisme*) pare che i follicoli vogliano trascinar dentro il canalicolo di sbocco le cellule epiteliali cilindriche. Ciò si è esplicato nella *Lepismina* (Tav. III, fig. 37 *d*). Qui troviamo che il foglietto epiteliale dell'intestino è relativamente alto, e consta nient'altro che di tuboli cilindrici, la cui base (parte prossimale) è chiusa e formata dalle cellule della cripta; il resto del tubolo (parte distale) è tappezzato di cellule epiteliali che corrispondono all'epitelio intestinale p. d. dei tisanuri sopraricordati. Aggiungasi che una condizione molto simile a quella di *Lepismina* notasi all'estremità posteriore dell'intestino medio di *Machilis*.

C) *Intestino posteriore* (vedi le figure precedenti).

In *Campodea* è piuttosto stretto e decorre diritto dall'estremità posteriore dell'intestino medio all'estremità posteriore del corpo dell'animale. Epitelio e cuticula sono disposti in modo da formare numerose pieghe o papille che vogliansi dire, quasi longitudinali; nella parte posteriore queste pieghe diventano in numero di tre e poi scompaiono. Questa parte posteriore è molto dilatabile per effetto di muscoli radiali che s'attaccano alle regioni dorsali laterali e ventrali laterali degli integumenti ed il suo strato epiteliale presenta numerose cellule molto grosse, di natura ghiandolare. In *Japyx* esistono condizioni alquanto differenti: le cellule ghiandolari non sono ancora evidenti, le pieghe sono limitate alla parte anteriore e infine la parte posteriore è poco dilatabile; specialmente quest'ultima differenza è in rapporto col molto sviluppo della muscolatura del forcipe, la quale riempie quasi gli anelli posteriori.

In *Machilis* l'intestino posteriore rassomiglia a quello di *Campodea*, la sua parte posteriore è notevolmente dilatabile e verificasi anche una dilatazione anteriore.

In *Nicoletia* e *Lepismina* esso è poco dissimile da quello di *Campodea*, soltanto mancano le cellule grosse della parte posteriore.

In *Lepisma* suol presentarsi anteriormente alquanto dilatato; nella parte media è ristretto e posteriormente presenta numerosi diverticoli internamente tappezzati di un epitelio a cellule quasi cubiche con grosso nucleo tondo e con protoplasma che facilmente assume le sostanze coloranti (cellule probabilmente ghiandolari). Nelle parti anteriore e media notansi le solite pieghe. Ho detto di sopra che l'intestino medio posteriormente, cioè nella sua parte ristretta subisce una curva; una curva subisce anche la parte anteriore dell'intestino posteriore: si può dunque dire che i due intestini s'incontrano facendo una curva. Con altre parole, l'intestino è più lungo del corpo dell'animale, perciò tanto l'intestino medio, quanto il posteriore presentano una curva, che ha, per così dire, il suo centro là dove l'uno va nell'altro. Queste curve esistono in molti ordini d'insetti e mi paiono assai mutabili di direzione.

In complesso comparando l'intestino posteriore dei vari tisanuri risulta che già in *Campodea*, come nell'embrione dell'ape ancora nell'uovo, è distinto un retto (*rectum*) e che questo organo si ripete in *Machilis* e va complicandosi in *Lepisma*. Invece esso è segnato soltanto. da una maggiore, o minore dilatazione in *Japyx*, in *Nicoletia* ed in *Lepismina*. Le pieghe che si trovano nel retto di vari tisanuri sono vere *plicae rectales*. Evidentemente queste pieghe del retto morfologicamente non si possono considerare disgiunte da quelle che presenta il resto dell'intestino posteriore (ileo-crasso). Come le papille o pieghe del ventriglio vennero da me considerate quali differenziazioni

delle delicate pieghe longitudinali estese a tutto l'esofago, così le pieghe rettali degli insetti per me devono essere interpretate come differenziazione di piccole pieghe originariamente estese in generale a tutto l'intestino posteriore: i fatti suesposti pei tisanuri appoggiano la mia opinione.

L'ipotesi che le pieghe rettali siano vere branchie d'insetti diventate rudimentali, ipotesi messa innanzi, io credo, da Gegenbaur e poi accettata da vari autori, riceve una forte scossa dal fatto ch'esse esistono anche nei Tisanuri, ciò che risulterà più chiaro in un seguente paragrafo.

Le appendici del tubo digerente sono, come negli altri insetti, i tubi malpighiani e le ghiandole salivari. I tubi malpigliani sboccano tutti ad un medesimo livello in corrispondenza all'estremo anteriore dell'intestino posteriore.

In *Japyx* i tubi malpighiani mancano. In *Campodea* essi sono invece numerosi, circa sedici, ma oltremodo corti. Negli altri tisanuri sono invece lunghi; in *Machilis* sono dodici, ma si riuniscono allo sbocco nell'intestino posteriore, o più esattamente si possono considerare in numero di sei bifidi fino al loro punto di sbocco nell'intestino; sono sei anche in *Nicoletia* ed in *Lepismina*, ciascuno con uno sbocco proprio; sono da quattro ad otto nelle varie Lepisme (Rovelli, Schindler).

Io credo che in complesso queste condizioni dei tubi malpighiani collimino coll'ipotesi che i tubi malpighiani siano formazioni omodinamiche agli stigmi colle relative trachee, ipotesi da me sostenuta in base ad un fatto da me scoperto nell'ape, vale a dire che i tubi malpighiani si formano come gli stigmi e si mettono in rapporto coll'intestino posteriore appena secondariamente.

Ho a suo tempo fatto osservare che nell'ape si sviluppano appena due paia di tubi malpighiani e gli stigmi mancano ai due ultimi segmenti addominali e che nei bachi da seta si sviluppano tre paia di tubi e gli stigmi mancano ai tre ultimi segmenti.

Pei tisanuri è bene osservare che in *Campodea* possiamo ammettere l'esistenza di sedici tubi malpighiani, mentre gli stigmi mancano interamente al suo addome; gli *Japyx*, che sono gl'insetti col massimo numero di stigmi, non hanno tubi malpighiani; *Nicoletia* e *Lepismina* che hanno sette paia di stigmi addominali hanno tre paia di tubi; lo stesso vale per *Machilis*.

Non voglio tacere che, anche il fatto che i tubi malpighiani di grillotalpa sboccano verso la metà dell'intestino posteriore (Frenzel) (1), appoggia sempre più l'ipotesi sopraindicata.

In *Campodea* le ghiandole salivari stanno nel celoma della parte posteriore del capo (regione lateral-ventrale e laterale), sono pari, una cioè destra e l'altra sinistra ed hanno figura di tubi ravvolti a gomitolo. Il loro sbocco è unico, cioè il tubo d'un lato s'avvicina a quello dell'altro; essi si raggiungono alla linea mediana ventrale; si forma così un canale unico poco avanti dell'estremità posteriore del labbro inferiore. Questo canale decorre per brevissimo tratto lungo la linea mediana, alla superficie esterna del ganglio sottoesofageo; s'apre quindi fra le due metà del labbro inferiore poco prima della di lui estremità anteriore. In *Japyx* esistono pure due ghiandole salivari simili a quelle di *Campodea*; il loro sbocco sembra pari. Poco differentemente che

(1) Archiv f. mikr. Anat. 1886.

in Campodea si comportano le ghiandole salivari di *Machilis*, di *Lepismina*, e di *Nicoletia*. In *Lepisma*, in rapporto col maggior differenziamento di tutto il tubo digerente, notasi che le ghiandole salivari sono più complicate che negli altri tisanuri; la complicazione è data specialmente da ciò che il canale impari là dove formasi per l'incontro del tubo destro col sinistro presenta due diverticoli che accennano quasi ad un secondo paio di ghiandole salivari. Con questa disposizione abbiamo accennata la condizione della blatta in cui questi diverticoli si sono trasformati in ricettacoli delle ghiandole salivari.

Nell'embrione e almeno nella giovine larva dell'ape e di altri insetti esiste un paio di ghiandole salivari del tutto simili a quelle di *Campodea*, *Machilis* ecc. Notisi che queste ghiandole dell'Ape hanno in principio uno sbocco separato al di dietro del terzo paio d'arti boccali (labbro inferiore). Più tardi si congiungono assieme e si comportano allora come quelle di *Campodea*, *Machilis* ecc., anche pel loro rapporto col ganglio sottoesofageo. A proposito del ganglio sottoesofageo, il trovarsi esso più profondo del condotto impari delle ghiandole, come sopra si è detto, implica forse che questo condotto deve svilupparsi secondariamente, come nell'ape e che perciò come in questa, dev'esservi in *Campodea* e in *Machilis* ecc., uno stadio embrionale in cui ognuna delle due ghiandole salivari ha un proprio sbocco all'esterno.

Tutto ciò conforta l'omodinamia da me sostenuta nel mio lavoro sull'ape tra le ghiandole sericee e gli stigmi. Essa viene appoggiata anche dalla presenza degli stigmi cefalici in scolopendrella.

La condizione definitiva delle ghiandole salivari dei tisanuri è molto più primitiva di quella dell'ape. Filogeneticamente si deve ammettere che le ghiandole salivari dei tisanuri mutarono parzialmente funzione in rapporto col subentrare delle metamorfosi e quindi del bisogno d'una secrezione sericea.

Con altre parole esse diedero origine tanto alle ghiandole sericee quanto a quelle salivari degli insetti superiori.

Ritornando ora per un istante al tubo digerente in generale, dirò che la complicazione massima si osserva in *Lepisma*, la quale s'avvicina agli ortotteri genuini anche per il ventriglio molto sviluppato, per le curve dell'intestino medio e posteriore, per i diverticoli dell'intestino retto ed infine per l'apparato salivare.

§ VI. *Sistema circolatorio e corpo adiposo.*

Il vaso dorsale è essenzialmente formato come in tutti gli altri insetti; così pure l'aorta. In *Campodea*, in *Japyx* (Tav. IV, fig. 38) e in *Machilis* e forse in tutti i Tisanuri il vaso dorsale s'estende fino al margine posteriore del secondo anello toracico e perciò l'aorta resta relativamente corta. Un fatto simile si riscontra anche in blatta, mentre negli altri insetti il vaso dorsale pare sempre limitato all'addome. Per questa disposizione tisanuri e blatta s'avvicinano ai miriapodi, gli ostî venosi sono per lo meno nove paia; corrispondono agli intersegmenti; il primo paio è tra il secondo e il terzo anello toracico, gli altri si trovano negli otto intersegmenti successivi.

Muscoli aliformi ben distinti non vennero da me riscontrati in alcun Tisanuro.

Questo fatto è molto interessante perchè essi sono stati trovati, a quanto pare,

in tutti gli ordini degli insetti, compresi i collemboli. Il diaframma dorsale o pericardico (Graber) esiste in quasi tutti i tisanuri, ma è assai imperfetto.

In parecchi tisanuri, e specialmente in *Machilis*, è qua e là evidente la traccia d'un sepimento che riunisce il vaso dorsale all'intestino. Ciò dimostra l'intimo rapporto di questi due organi, rapporto che, per quanto si sa, è scomparso in tutti gli altri ordini d'insetti. Notisi che il vaso dorsale nell'ape si sviluppa dal mesoderma nel tratto dove il foglietto superficiale di questo passa in quello profondo (detto anche viscerale, o intestinale); ciò che conferma in altro modo l'intimità che corre tra il vaso dorsale e l'intestino. Questi fatti anatomici ed embriologici servono a stabilire l'omologia del vaso dorsale degli insetti con quello degli anellidi.

Nei tisanuri tutti, ma più evidentemente in *Lepismina*, distinguesi una speciale lacuna sanguigna tra la catena ganglionare e l'intestino. Questo fatto richiama le condizioni dei chilognati e più da lontano il vaso sopraspinale di scolopendrella e dei chilopodi.

Il sangue è incoloro, più o meno ricco di corpuscoli sanguigni.

Insieme col sistema circolatorio voglio accennare un'altra formazione mesodermica, cioè il corpo adiposo [1], che occupa gran parte del celoma, lasciando delle lacune complicate in cui circola il sangue. Si può dire che questo corpo adiposo ha una disposizione in certo modo segmentale. Col corpo adiposo, devonsi descrivere certi corpi speciali, che trovansi nel capo e attorno all'esofago in *Campodea* ed in *Japyx* e fors'anche negli altri tisanuri, ed il cui significato fisiologico è del tutto sconosciuto; istologicamente risultano di cellule più o meno nettamente cubiche ed addossate le une alle altre; il loro protoplasma è evidentemente reticolare; le maglie del reticolo contengono una sostanza liquida che all'aspetto non pare adiposa.

§ VII. *Organi genitali.*

A) *Ovarî e Tube.*

Gli ovarî sono in *Campodea* (Tav. IV, fig. 43) un semplice paio, cioè uno destro e l'altro sinistro. Hanno forma di tubolo assottigliato alla estremità anteriore; nella loro parte non assottigliata, se l'individuo è prossimo alla maturanza, notansi alcune uova disposte in una linea longitudinale e occupanti quasi tutta la grossezza del tubolo.

In *Japyx* (Tav. IV, fig. 44) invece di un lungo tubolo ovarico, disposto longitudinalmente, notansi tanti tuboli simili ma corti (ovarioli) ed in direzione obliqua, colla loro estremità sottile avvicinata al vaso dorsale. Questa disposizione, che è nettamente metamerica, preserva l'ovario dal pericolo di venir leso o alterato in qualche modo. Il pericolo esiste specialmente quando le uova sono prossime alla maturanza, ed è dato da ciò che il differenziamento segmentale della muscolatura e della cuticula in *Japyx* è avanzato tanto che i metameri hanno acquistato grande indipendenza di movimenti. Questa indipendenza è molto minore in *Campodea*, e perciò le manca l'or indicata disposizione.

L'ordinamento segmentale degli ovarî di *Japyx* ripetesi in *Machilis*. Questa ripetizione in forme molte lontane l'una dall'altra, come sono appunto *Japyx* e *Machilis*, tende a dare al fatto un serio valore morfologico. I tuboli ovarici in *Machilis* sono sette per ogni lato.

(1) Io ho rilevato evidente la sua origine mesodermica nell'ape.

Nella giovane *Lepisma* (Tav. IV, fig. 45) si può ancora notare una disposizione metamerica dei tuboli ovarici. Nell'adulto questo carattere non è più evidente. I tuboli sono soltanto cinque per ogni lato.

In una maniera simile comportansi *Lepismina* e *Nicoletia*.

Le tube (dette anche condotti eliminatori primitivi, od ovidotti) che sono cortissime in *Campodea*, in conseguenza del segmentarsi dei tuboli ovarici assumono una lunghezza considerevole in *Japyx* e in *Machilis*, e secondariamente s'accorciano nelle lepismide; in queste appaiono relativamente corte, sopratutto quando si esaminano gli adulti.

Se si ammette che, come risulta dagli studî di parecchi autori e specialmente dello Schneider e del Nussbaum, tube e ovario derivano da un unico accenno, dobbiamo spiegarci l'allungarsi delle tube mettendolo a spese dell'ovario. Io però non ho ancora avuto occasione di accertare la realtà del suddetto processo embriologico. In *Campodea* poi trovo che, ad un certo periodo di sviluppo, la tuba è affatto separata dall'ovario. Questo fatto è, secondo me, di grande importanza in quantochè può condurci ad ammettere che i condotti genitali sono organi escretori trasformati. Così la *Campodea*, unica tra gli insetti per quanto finora si sa, riproduce uno stadio in cui i suoi organi genitali richiamano da vicino i fillopodi (Claus), il peripato (Kennel) e gli anellidi.

Ma torniamo all'accorciamento delle tube. Pensiamolo appena un po' maggiore che nelle lepismide e avremo le condizioni di molti insetti, per es. delle blatte. Un ulteriore accorciamento conduce alla disposizione propria per es. dell'ape. Aggiungasi che i tuboli ovarici possono crescere molto di numero probabilmente per successive bisezioni di quelli primitivamente esistenti.

Filogeneticamente la *Campodea* rappresenta la condizione la più primitiva. L'*Japyx* ed il *Machilis* dimostrano una condizione successiva; le lepismide una condizione successiva a quella di *Japyx* e di *Machilis*; poi viene quella di blatta e infine quella per es. dell'ape.

Gli ovarî di *Campodea* sono come nelle forme più semplici delle altre classi d'artropodi. Questo riscontro acquista maggior valore quando si tien conto anche della posizione degli organi in discorso. Nella giovine *Campodea* gli ovarî sono nettamente collocati nella regione lateraldorsale; man mano che la *Campodea* matura, essi ingrossano e vanno guadagnando la parte dorsale del corpo: si avvicinano così l'uno all'altro fino a toccarsi sulla linea mediana, insinuandosi perciò tra l'intestino e il vaso dorsale. Ho notato anche nell'ape che questi organi si spostano durante lo sviluppo dai lati del corpo dell'embrione verso il vaso dorsale. Quindi la posizione primitiva degli ovarî è alle regioni laterali del corpo. Essa è perciò molto simile a quella che si riscontra nei fillopodi, e non molto dissimile da quella che presentano il peripato, i chilognati, la scolopendrella, la koenenia ecc. Aggiungasi che tutte le or citate forme, eccetto koenenia, hanno ovarî pari come la *Campodea*. Io credo che l'ovaio impari sia secondario e che quello pari rappresenti la forma primitiva.

Finirò accennando alle cellule nutritizie. L'ovario in *Campodea*, come in parecchie classi di insetti superiori, possiede queste cellule; esse mancano invece agli altri tisanuri, i quali perciò rassomigliano ai collemboli, agli ortotteri ecc. Credo che le cellule nutritizie degli insetti formino un bel esempio di convergenza nel senso da me adottato nell'introduzione.

B) *Testicoli e condotti deferenti.*

Abbiamo in *Campodea* (Tav. IV, fig. 39) condizioni identiche a quelle dell'ovajo; cioè lunghi testicoli tubulari e un condotto deferente.

Le condizioni di *Japyx* (Tav. IV, fig. 40) sono molto simili a quelle di *Campodea.* Tanto il testicolo, quanto il canale deferente, sono però molto lunghi e tortuosi; il canal deferente presenta inoltre un lungo diverticolo (vescicola spermatica). Il testicolo occupa anche parte del torace.

In *Machilis* (Tav. IV, fig. 42) la disposizione è singolarissima. Esistono per ogni lato tre corti testicoli disposti quasi trasversalmente e collocati nella parte anteriore dell'addome. I condotti deferenti sono due per lato, uno interno o mediano che porta i testicoli, l'altro esterno o laterale. L'interno anteriormente si anastomizza coll'esterno; si è, prima che vi si anastomizzi, che gli si attaccano i tre testicoli, l'uno a poca distanza dall'altro. Portandosi indietro questi due condotti deferenti ben presto si riuniscono assieme e prontamente si ridividono. Nel loro ulteriore decorso presentano tanti cortissimi canaletti trasversali che li riuniscono assieme. Precisamente questi canaletti sono in numero di quattro e stanno collocati press'a poco negli intersegmenti addominali: cioè a livello dell'intersegmento tra il quarto e il quinto segmento e dei successivi fino a quello tra il settimo e l'ottavo.

A livello dell'intersegmento tra l'ottavo e il nono i due condotti si riuniscono assieme formando un solo canale impari, il quale, descrivendo quasi una cifra otto si porta sulla linea mediana, dove quello d'un lato si fonde con quello dell'altro lato formando un canale ejaculatore.

In *Nicoletia* esistono numerosi testicoli senza alcun accenno chiaro ad una disposizione metamerica. In *Lepismina* ho trovato due testicoli a destra e due a sinistra. In certe *Lepisme* (Tav. IV, fig. 41) esistono sei testicoli ad ogni lato. I canali deferenti sono semplici in *Lepismina* e *Lepisma*, presentansi però molto lunghi e descrivono molte anse tra le quali è più notevole quella che corrisponde alla loro parte posteriore. Questa ha in realtà la figura d'un enne maiuscolo. I canali deferenti di solito si presentano dilatati, ma ciò è molto più spiccato in corrispondenza all'enne, che funziona quindi da vescicola spermatica. In *Nicoletia* esiste, per quanto ho potuto vedere, una lunga vescicola spermatica simile a quella di *Japyx* (1).

Si può in generale ammettere che il testicolo, dopochè ha sorpassata la condizione semplice di *Campodea* e di *Japyx*, si suddivide, ma senza acquistare però l'ordine metamerico. Quest'ordine che vien offerto dall'ovaio e ch'io ho dianzi subordinato all'indipendenza dei segmenti addominali, non è necessario perchè i testicoli maturando crescono bensì di volume, ma si tengono sempre lontani dall'enorme sviluppo, che raggiungono gli ovarî per la maturazione delle uova.

Quanto ai condotti deferenti è strana oltremodo la disposizione offerta da *Machilis.* L'unico riscontro sicuro ch'io conosco viene dato dalla blatta, i cui condotti deferenti

(1) I rapporti dei testicoli coi canali deferenti e il numero dei testicoli nelle lepismide vogliono essere meglio indagati. Il metodo delle sezioni microscopiche a me almeno è riuscito insufficiente. Colle dissezioni ho determinato alcuni punti, ed altri ne avrei potuto forse determinare, se avessi potuto avere un buon microscopio semplice.

hanno due anastomosi simili, cioè, i canali deferenti si dividono una o due volte in due branche, che immediatamente si ricongiungono assieme. Ammettendo la già menzionata origine unica del condotto deferente e del testicolo si potrebbe forse riconoscere un certo rapporto tra i genitali maschili del *Machilis* e quelli dello scorpione. Se le vescicole spermatiche debbansi mettere in rapporto col canale deferente doppio, oppure considerarsi semplici estroflessioni del canale deferente semplice, è cosa difficile a stabilirsi; l'*Japyx* farebbe inclinare alla seconda di queste due possibilità.

I concetti, che ho dianzi svolti pel differenziamento filogenetico degli ovarî e delle tube, si possono ripetere anche pei testicoli e pei canali deferenti; occorre soltanto di tralasciare il periodo della disposizione metamerica e di pigliare in considerazione le complicazioni offerte dai canali deferenti. Le condizioni del testicolo di *Campodea* e di *Japyx* sono dunque primitive, come quelle dell'ovaio di *Campodea*.

Quanto alla posizione in rapporto cogli altri visceri, valgono pei genitali maschili quelle osservazioni che ho già esposte pei femminili.

C) *Genitali esterni femminili.*

Ho trovato che nelle femmine di tutti i tisanuri i canali genitali esterni sono impari.

In *Campodea* (Tav. V, fig. 50) le tube si riuniscono assieme in un condotto impari e brevissimo, che è, a differenza di esse, tappezzato di cuticula e che si può denominare vagina; questa sbocca con una vulva in corrispondenza dell'ottava sternite. Considero come un diverticolo dorsale della vagina, una borsa copulatrice che probabilmente funziona anche come ghiandola e come vescicola spermatica.

In *Japyx* (Tav. V, fig. 52) le tube fondendosi assieme formano un cortissimo canaletto impari (utero od ovidotto) il quale si prolunga in una vagina pure impari. La vulva è ampia e corrisponde tra l'ottavo ed il nono segmento. L'utero non è tappezzato di cuticula, la quale si riscontra invece sulla vagina. Alla vagina è annessa una borsa copulatrice che è collocata, come nella *Campodea*, più profonda rispetto alla vagina e che si può, come in questa, considerare un diverticolo dorsale della vagina stessa. Come risulta dalle date descrizioni, nell'usare i termini vagina ed utero od ovidotto ho seguito il criterio istologico, secondo il quale la vagina (e quindi anche la borsa copulatrice) dev'essere tappezzata di cuticula e l'utero od ovidotto ne deve esser privo. In questo senso ho appunto ammesso un utero od ovidotto in *Japyx* e non in *Campodea*.

Adottando il concetto generalmente accettato che le parti tappezzate di cuticula sono ectodermiche e mesodermiche quelle che ne vanno sfornite, si può conchiudere che nell'*Japyx* le tube si sono fuse assieme per breve tratto (utero) e che ciò non è ancora accaduto in *Campodea*.

Esiste in *Machilis* un ovidotto che si continua senza una netta separazione in una vagina (continuo ad usare i termini ovidotto ed utero nel senso sopra indicato). La vulva viene a trovarsi al margine posteriore dell'ottava sternite. Non ho potuto constatare l'esistenza di una borsa copulatrice.

In *Nicoletia* (Tav. V, fig. 55) esiste un ovidotto e una vagina: quest'è un'insenatura dell'ottava sternite nascosta sotto ad una linguetta mediana impari. In questa vagina s'apre una borsa copulatrice, evidentemente omologa a quella di *Japyx* e di *Campodea*.

La vulva corrisponde al margine posteriore dell'ottavo segmento. *Lepismina* riproduce senza una notevole variazione le condizioni di *Nicoletia*. Nella *Lepisma* si trova un ovidotto cortissimo e una vagina che sbocca alla parte posteriore dell'ottava sternite; alla vagina è annessa una borsa copulatrice, la quale funziona, probabilmente come in tutti gli altri tisanuri, anche da ricettacolo del seme e fors'anche da ghiandola. Però questa borsa è molto più differenziata che negli altri tisanuri, ed infatti il suo fondo cieco è trilobo e la sua cavità è molto complicata; ciò mentre dimostra sempre più la superiorità di *Lepisma* in confronto agli altri tisanuri, accenna forse d'altra parte, alla divisione che riscontriamo in molti insetti superiori, divisione cioè in borsa copulatrice, ricettacolo del seme e ghiandola accessoria.

Alla condizione dei genitali femminili esterni dei tisanuri si collega bene quella degli stessi organi in blatta.

Riassumendo, i tisanuri hanno in generale un ovidotto (utero), una vagina e una borsa copulatrice. L'ovidotto manca soltanto in campodea, la quale perciò si comporta come una larva d'efemeride; invece gli altri tisanuri si comportano come i libellulidi. Lo schema fig. 90 di Palmen (¹) riproduce le condizioni di campodea, lo schema della fig. 96 quelle degli altri tisanuri. *Machilis* in quanto non ha borsa copulatrice, appare più semplice degli altri tisanuri.

Non occorre aggiungere che i fatti qui riferiti e in special modo quelli offerti da *Campodea*, se non provano direttamente la verità dell'ipotesi di Palmen (²) sui condotti genitali originariamente doppî, la confortano almeno sufficientemente.

La vulva che nella *Campodea* era nettamente all'ottava sternite, nell'*Japyx* viene a trovarsi fra l'ottava e la nona. Nelle *Lepismide* e nel *Machilis* però si può ancora riferire con sicurezza all'ottava.

Mancano in *Campodea*, in *Japyx* e in *Machilis* le ghiandole accessorie (sebacee). In *Nicoletia* esiste invece una ghiandola accessoria impari a fondo cieco bifido e rivolto all'indietro; essa sbocca dietro l'origine degli ovopositori. Questa ghiandola diventa pari in *Lepisma*: si trovano cioè in *Lepisma* due ghiandole lunghe che decorrono serpentine; alla loro estremità anteriore si fondono assieme presentando un unico sbocco dietro all'origine degli ovopositori (Tav. V, fig. 54). Le stesse ghiandole ripetonsi in *Lepismina*. In conclusione tutte le lepismide hanno ghiandole sebacee: esse appartengono al nono segmento.

Ghiandole omologhe esistono anche in blatta e in molti altri insetti.

Ci resta di parlare delle appendici genitali femminili esterne (*gonapofisi*) (vedi le figure precedenti). Esse sono rappresentate in alcuni tisanuri da semplici *papille*: in altri da veri *ovopositori*.

Al solito *Campodea* (Tav. V, fig. 50) offre le condizioni più semplici. La vulva sbocca sopra una papilla davanti alla quale ne stanno due altre, abbiamo così tre semplici papille: una posteriore impari e due anteriori, una delle quali lateral destra e l'altra lateral sinistra.

Nella vagina dell'*Japyx* (Tav. V, fig. 52) che corrisponde al confine tra l'ottavo

(¹) Palmen, *Die paarige Ausführungsgänge d. Geschlechtorgane b. Insecten*. Helsingfors, 1884.
(²) l. c. alla nota precedente.

e il nono segmento fanno sporgenza quattro papille [1]. Esse funzionano molto probabilmente come quelle di *Campodea*.

In *Machilis* (Tav. V, fig. 51) troviamo invece di queste quattro papille, quattro ovopositori, due anteriori spettanti alla parte posteriore dell'ottavo segmento, e due posteriori sorgenti dal margine anteriore del nono segmento. Io li ritengo omologhi alle papille di *Japyx*.

Esistono in *Nicoletia* (Tav. V, fig. 55) quattro ovopositori appunto come in *Machilis*: essi corrispondono o al confine dell'ottavo col nono anello, o alla parte anteriore del nono (mi pare che i criterî anatomici non bastino a decidere questa alternativa). Trovansi anche in *Lepisma* quattro ovopositori: parrebbe che gli anteriori spettassero all'ottavo anello e i posteriori al nono (Tav. V, fig. 53). Lo stesso ripetesi in *Lepismina*, colla sola differenza che in questa gli ovopositori sono molto corti.

Tenendo presenti appena le gonapofisi delle *Lepismide* e di *Machilis*, è facile lasciarsi indurre a considerarle come arti trasformati e a farle derivare da esagerata biforcazione delle zampe che esistevano una volta all'addome degli insetti. Ciò non viene però confortato nè da *Campodea*, nè da *Japyx*. Aggiungasi che nel loro sviluppo queste gonapofisi non hanno alcun rapporto colle pseudozampe, le quali si possono trovare anche sui segmenti ottavo e nono (es. *Nicoletia*).

Ho detto che le gonapofisi di *Campodea* sono all'ottavo segmento; che in *Japyx* si trovano invece in una introflessione tra l'ottavo ed il nono: che in *Machilis* due sono alla parte posteriore dell'ottavo e due all'anteriore del nono: poco differente dev'essere la loro posizione nelle *Lepismide*. Così a poco a poco il nono segmento nella sua parte ventrale diventa servo degli organi riproduttori; riguardo a ciò si ricordi anche lo sviluppo delle ghiandole sebacee su questo nono segmento.

A proposito di queste ghiandole possiamo ora aggiungere ch'esse sono presenti appena nei tisanuri forniti d'ovopositori; per questi appunto si sono esse sviluppate.

Machilis che ha ovopositori, come sopra dissi, supplisce forse alla mancanza delle ghiandole sebacee con due altre ghiandole corrispondenti all'estremo prossimale dei due ovopositori anteriori.

In *Campodea*, in *Japyx* e in *Machilis* l'ottava sternite non mostra disposizioni degne di special nota; lo stesso dicasi della nona in *Campodea*, non così però in *Japyx* e in *Machilis*. In *Japyx* (Tav. V, fig. 52) essa è divisa in due pezzi triangolari che vengono spostati uno a destra e l'altro a sinistra, incuneandosi tra di essi la decima sternite. In *Machilis* questi due pezzi si sono molto allungati a guisa di lamine, le quali tenendosi vicine l'una all'altra formano una sorta di doccia che nasconde e protegge la parte prossimale degli ovopositori. Che esse siano veramente derivazione della sternite lo prova il fatto che portano alla loro estremità distale le pseudozampe, come le sterniti dei precedenti segmenti. Si deve considerare che le sterniti addominali di *Machilis* (Tav. V, fig. 2 *a* e *b*) presentano, come sopra dissi, traccie di suture indicanti una divisione in tre pezzi, uno anteriore mediano e due laterali posteriori, e che i due laterali al margine posteriore sono separati, l'uno dall'altro, per un'insenatura,

[1] Una quinta, corrispondente allo sbocco della borsa copulatrice, non può qui esser presa in considerazione, dovendosi dedurre il suo sviluppo da questo ultimo organo.

onde si può dire che le sterniti addominali sono posteriormente bifide, accennando così alla disposizione che riscontrasi esagerata alla nona sternite. Quest'interpretazione della nona sternite è importante anche per rapporto all'*Japyx*, in quanto che il suo nono segmento lascia pensare che anche all'addome di quest'animale siano una volta esistite suture simili (forche) a quelle di *Machilis* e a quelle che si trovano ancora al torace dell'*Japyx* stesso per servizio dei muscoli delle zampe.

Anche nelle *Lepismide* (mentre mancano le forche) la divisione del nono segmento persiste; essa compare anche nell'ottavo.

Veniamo ai particolari. La nona sternite in *Nicoletia* (Tav. V, fig. 55) presenta una disposizione simile a quella di *Machilis*, colla sola differenza che le lamine sono meno sviluppate; l'ottava invece si può considerare come divisa in tre pezzi, uno anteriore mediano e due laterali posteriori, lo che in certo modo è già accennato in *Machilis*. Il pezzo anteriore mediano è però in *Nicoletia* molto sviluppato, perchè prende gran parte alla formazione della vagina. In *Lepisma* la nona sternite si comporta come in *Machilis* e in *Nicoletia*, l'ottava presentasi come in *Nicoletia*, soltanto il pezzo anteriore mediano è molto piccolo.

Risulta che la nona sternite in *Machilis* e nelle *Lepismide* serve per le funzioni genitali; abbiamo già visto come il nono segmento per gli ovopositori e per le ghiandole concorre all'esercizio della stessa funzione.

Risulta inoltre che l'ottava sternite si differenzia in modo speciale sempre per gli organi della riproduzione.

In complesso, andando da *Campodea* a *Lepisma*, le parti circostanti alla vulva vanno assumendo un grande sviluppo. Si formano così gli ovopositori, le loro ghiandole e le lamine speciali, in parte per gli ovopositori, in parte per la vagina.

Conchiudendo, l'ottavo segmento è il vero segmento vulvare. Il nono viene tratto secondariamente in servitù dell'ottavo.

D) *Genitali esterni maschili.*

Il canale eiaculatore (Tav. IV, fig. 46) in *Campodea* è brevissimo e fornito di cuticula come l'ovidotto.

In *Japyx* (Tav. IV, fig. 47) consta invece di due parti, la prima sfornita e la seconda (in corrispondenza alla campana genitale. V. sotto) fornita di cuticula: la prima omologa all'utero, la seconda alla vagina. *Machilis* e *Lepismide* comportansi press'a poco come *Japyx*.

In complesso si possono dunque ripetere pel condotto ejaculatore le stesse considerazioni che ho fatto per l'utero e per la vagina. Però è d'uopo aggiungere che si sviluppa un organo speciale, il pene. In *Campodea* la parte distale del condotto ejaculatore decorre in una papilla speciale (pene) dell'ottava sternite addominale e sbocca press'a poco alla punta di essa. In *Japyx* si può considerare come pene differenziato in una maniera tutta speciale, quell'organo che nella Memoria su quest'animale ho denominato campana, organo che sta nascosto tra l'ottavo e il nono segmento ed è capace di rovesciarsi in fuori a guisa di dito di guanto. Il canale ejaculatore s'apre in questa campana, la quale a sua volta s'apre all'esterno. In *Machilis* il canale ejaculatore dopo brevissimo tragitto, entra in una papilla e sbocca alla sua punta. Questa papilla, che è il pene, nasce non so se al confine tra l'ottavo e il nono segmento, ovvero al

margine anteriore del nono (Tav. V, fig. 48). Essenzialmente in modo simile comportasi il pene di *Nicoletia* e di *Lepismina*; si può dire che appartiene al nono segmento addominale ed è poco sviluppato; la sua apertura esterna è una fessura abbastanza lunga. In *Lepisma* esiste pure un pene, posteriormente bifido e appartenente al nono segmento; il condotto ejaculatore nella sua parte distale percorre appunto questo pene.

In complesso il pene di *Japyx* è una formazione speciale; gli altri tisanuri l'hanno similissimo, soltanto in *Campodea* e in *Machilis* è molto semplice, mentre invece nelle *Lepismide* va perfezionandosi specialmente per lo sviluppo di ghiandole unicellulari intorno al suo meato esterno. Più importante si è il fissare che quest'organo nella *Campodea* appartiene all'ottavo anello, mentre in *Japyx* (e in *Machilis ?*) è tra l'ottavo e il nono, e nelle *Lepismide* si trova nel territorio del nono. Così, ripetendosi esagerata quella tendenza che ho già fissata nella femmina, l'apertura genitale maschile viene a trovarsi al nono segmento. Basta confrontare le varie forme per venir alla conclusione che si tratta d'un semplice spostamento e che filogeneticamente lo sbocco appartiene anche nel maschio all'ottavo segmento.

Nel maschio di *Campodea* non esiste alcuna appendice genitale all'infuori del pene, che può supporsi omologo alla papilla impari posteriore della femmina. Nella campana genitale del maschio in *Japyx* notansi due papille (Tav. IV, fig. 47) non so se omologhe alle quattro che abbiamo vedute nella femmina (nelle femmine in questo caso le due del maschio si sarebbero bisecate) od appena a due di esse. Nel maschio di *Machilis* è molto notevole l'esistenza di quattro appendici evidentemente omologhe ai quattro ovopositori. Nella *Nicoletia* e in *Lepismina* esistono due sole appendici, probabilmente omologhe ai due ovopositori posteriori di *Machilis*. In *Lepisma* mancano anche queste due.

Le appendici esterne maschili hanno pertanto un'omologia appena parziale con quelle femminili.

Riassumendo: nessun organo omologo al pene nella femmina, tranne forse in *Campodea*; le appendici esterne sessuali secondarie mancano nel maschio di *Campodea*, si devono forse considerare in numero di due nella sua femmina (condizione primitiva), sono due nel maschio di *Japyx* e quattro nella sua femmina (condizione successiva a quella di *Campodea*); sono quattro tanto nel maschio quanto nella femmina di *Machilis* (condizione corrispondente a quella della femmina di *Japyx*); sono due nel maschio di *Nicoletia* e *Lepismina* (condizione paragonabile a quella di *Japyx*) e quattro nella loro femmina (come in *Machilis*); sono infine quattro (come in *Japyx*, *Nicoletia*, *Lepismina* e *Machilis*) nella femmina di *Lepisma* e non se ne trova alcuna nel suo maschio. Pel maschio di *Lepisma* vuolsi però far rilevare che in quel tratto del canale ejaculatore che decorre lungo il pene, notansi due creste speciali: io però non credo che possano omologhizzarsi alle appendici sessuali dianzi in discorso.

Anche lo studio dei maschi dei tisanuri ci fa escludere la possibilità di omologhizzare le appendici sessuali esterne colle zampe.

In complesso le appendici sessuali esterne dei tisanuri si continuano e si perfezionano negli altri insetti, restando però fondamentalmente omologhe. Ciò vale specialmente per gli ortotteri.

Se vogliamo ora passar a confrontare gli sbocchi genitali dei tisanuri con quelli

dei sinfili dobbiamo anzitutto fissare che tanto nell'*Japyx*, quanto nella *Campodea* il lato ventrale del primo anello addominale è caratterizzato da speciali papille. Nell'*Japyx* ve ne sono tre, una mediana e due laterali (Tav. V, fig. 58). Nella *Campodea* ve ne sono appena due: nel maschio queste due papille sono riunite assieme da una zona di corti peli (Tav. V, fig. 57), a cui quasi certamente corrispondono speciali terminazioni nervose. Questa zona, come risulta dalle mie ricerche, manca alla femmina (Tav. V, fig. 56); costituisce dunque un carattere sessuale secondario, proprio delle campodee.

In complesso queste disposizioni esprimono un'intima parentela dei tisanuri coi collemboli, i quali ultimi hanno il tanto caratteristico tubo ventrale o colloforo, appunto al primo anello addominale.

D'altra parte, io credo che il carattere sessuale secondario della *Campodea* accenna a ciò che i genitali ne' suoi progenitori sboccavano una volta anche al primo segmento addominale. La mia credenza è sodamente poggiata al fatto che nelle scolopendrelle, come io ho scoperto, lo sbocco dei genitali corrisponde appunto al quarto segmento del tronco, ossia, se si vuole, al primo segmento addominale. Lo sbocco dei genitali nella regione anteriore del tronco, nei diplopodi e nei pauropodi, ed anche il luogo di sbocco negli aracnidi e nei crostacei confortano sempre più la mia credenza.

Si consideri inoltre che dalle recenti ricerche del Kennel (1) sui genitali del peripato risulta che in questo animale le vie d'eliminazione dei prodotti sessuali sono organi segmentali trasformati. Tengasi anche a calcolo che dagli studî di Palmen (v. sotto) e di Nussbaum risulta che lo sbocco dei genitali negli insetti una volta era doppio. Si ricordi che lo sbocco dei genitali nei crostacei corrisponde fino ad un certo punto con quello degli aracnidi, della scolopendrella, dei pauropodi e dei diplopodi. Si richiamino in modo speciale le condizioni delle libellule e degli acari.

Tutti questi ultimi fatti, e i precedenti confronti che ho istituito per lo sbocco genitale della campodea e della scolopendrella, mi conducono a formulare la seguente ipotesi: *nei progenitori degli artropodi i prodotti sessuali venivano, come in certi anellidi, eliminati per mezzo degli organi segmentali: successivamente vennero assunti a questa funzione appena un paio anteriore ed un paio posteriore* (2) *di questi organi: più tardi ancora uno delle due paia si chiuse: in alcuni artropodi si chiuse il paio posteriore (crostacei, aracnidi, scolopendrelle, pauropodi, diplopodi e archipolipodi): in altri si chiuse il paio anteriore (insetti, chilopodi, onicofori): in alcune forme primitive esiste, a così dire, una spia del paio chiuso (l'organo sessuale secondario della campodea).*

O accogliamo questa ipotesi, o dobbiamo filogeneticamente dividere gli artropodi in due gruppi, cioè a sbocco genitale anteriore e a sbocco genitale posteriore; divisione contro la quale parlano fortemente moltissimi fatti che accenno più avanti.

(1) Arbeiten a. Zool. Inst. von Würzburg, Bd. VII, H. II; Bd. VIII, H. I.

(2) Nè il paio anteriore, nè quello posteriore sono omologhi in tutte le classi in discorso. — Haase (*Die Vorfahren d. Insecten* in Ges. Isis in Dresden 1886 Abth. II) crede sempre che i genitali di scolopondrella sbocchino in vicinanza all'ano. Spero che qualcuno ritorni sull'argomento. Io intanto dichiaro che la credenza di Haase è *erronea*.

M'occorre fin d'ora aggiungere che l'ipotesi da me avanzata non esercita influenza alcuna sul significato da concedersi alle vescicole ventrali degli atteri e delle scolopendrelle (V. più avanti). Mi spiego: il segmento a cui corrisponde lo sbocco genitale può essere fornito di vescicole ventrali ben sviluppate: da ciò non deriva però necessariamente che le vescicole ventrali non possano essere omologhe agli organi segmentali, potendosi benissimo supporre uno sdoppiamento degli organi segmentali e l'adattamento esclusivo di un canale per la eliminazione dei prodotti sessuali e dell'altro per i prodotti escrementizî; chè anzi a questo riguardo è notevole che in certi *Machilis* a certi segmenti corrispondono due paia di vescicole addominali, o ventrali che vogliansi dire.

§ VIII. *Appendici del corpo.*

I) *Arti boccali.*

Il *labrum* (labbro superiore) (V. Tav. V, fig. 64) non è differente da quello della maggiore parte degli altri insetti; è più o meno lungo a seconda delle varie forme. Quanto alle mandibole, alle mascelle e al labbro inferiore (*labium*) distinguo due tipi: uno rappresentato da *Japyx* e *Campodea*, l'altro dagli altri tisanuri.

In *Japyx* le mandibole hanno intieramente libera soltanto l'estremità distale (punta), la quale sporge nella cavità boccale; il resto della mandibola (corpo) sta internato nel capo tra i tessuti mesodermici. La punta è provvista di cuticola; il corpo presenta un rivestimento cuticolare appena a quella sua faccia che guarda lateralmente; è un rivestimento a forma di lamina, lo denomino *lamina laterale.* La faccia esterna di questa lamina sta libera nel celoma, la sua faccia interna dà attacco ad una complicata muscolatura che forma il corpo della mandibola e finisce poi nel capo. Le mascelle (Tav. V, fig. 65) risultano di cardine e di stipite a cui vanno annessi il lobo esterno, il lobo interno, il palpigero e il palpo. Lobi, palpigero e palpi sporgono nella cavità boccale come la punta delle mandibole. Cardine e stipite stanno nel capo con cui presentano rapporti quasi come quelli che ho indicati pelle mandibole. Le due metà del labbro inferiore (Tav. V, fig. 66) sono al margine anteriore divise l'una dall'altra, nel resto stanno saldate assieme e la loro primitiva divisione è indicata appena da un solco (sutura). Trovo in ogni metà del labbro due suture trasversali e traccie di una longitudinale. Alla parte anteriore del labbro inferiore è annesso un paio di papille protrattili: dalla parte posteriore si diparte un paio di palpi. Evvi una sorta di frangia che circonda la cavità boccale internamente ai pezzi boccali: si può forse paragonare all'epifaringe e all'ipofaringe: vi si distinguono una ligula e delle paraglosse. Mascelle e mandibole di *Campodea* trovano riscontro in *Japyx*; lo stesso vale pel *labium*, il quale però offre traccie soltanto d'una sutura trasversale ed invece delle due papille protrattili, ne presenta due non protrattili e in posizione differente.

Passiamo al secondo tipo d'apparato boccale, quello degli altri tisanuri. Mandibole e mascelle sono libere come negli ortotteri genuini. Quanto al labbro inferiore lobi e stipiti sono ben distinti. I lobi sono due per ciascuna metà in *Lepisma* (Tav. V, fig. 67); in *Nicoletia*, il lobo interno è ancora bifido (1), in *Machilis* lo è anche l'esterno

(1) Ciò è appena accennato in *Lepismina,* per mezzo d'una lieve sporgenza mediale anteriore del lobo interno.

(Tav. V, fig. 68). Gli stipiti tanto nelle *Lepismide*, quanto in *Machilis* sono separati l'uno dall'altro. Queste condizioni del labbro inferiore ci permettono d'interpretare lo stesso organo in *Japyx* e in *Campodea*. In questi gli stipiti e i lobi sono saldati assieme sicchè il labbro forma una sorta di piastra con più o meno evidenti traccie di suture. In *Japyx* la sutura trasversale posteriore potrebbe alludere alla primitiva esistenza d'un cardine. È importante notare che negli embrioni di *Japyx* gli arti boccali comportansi quasi come in *Machilis* e nelle Lepismide; ciò prova che le condizioni d'*Japyx* e quindi anche di *Campodea* sono secondarie.

Il lobo esterno (*galea*) delle mascelle che possiede speciali terminazioni nervose, presentasi semplice in tutti i tisanuri, eccetto in *Japyx* in cui è biarticolato. I palpi mascellari sono d'un articolo solo in *Campodea*, di due *Japyx*, di sette in *Machilis*, di sei in *Thermophila* (Rovelli) e di cinque negli altri tisanuri. I palpi labiali mancano in *Japyx Isabellae*, constano d'un articolo in *Japyx solifugus* e in *Campodea*, di tre in *Machilis* e nelle *Lepismide*. Risulta quindi che i palpi tendono ad impiccolirsi nelle forme fornite di mascelle e di mandibole internate nel capo.

Noteremo uno sprone speciale alla base del primo articolo dei palpi di *Machilis* e uno simile alla base dei palpi labiali di *Lepisma* e di *Nicoletia*, per cui i loro palpi a tutta prima paiono di quattro articoli [1].

Riassumendo, mentre *Japyx* e *Campodea* hanno uno speciale apparato boccale adatto al loro speciale nutrimento cioè al tritume vegetale, gli altri tisanuri hanno un apparato nettamente masticatorio.

La mandibola di *Japyx* e *Campodea* quanto all'approfondamento nel capo, rappresenta qualcosa *sui generis*, ricorda molto alla lontana quella di una parte degli insetti succhiatori. La mandibola degli altri tisanuri è molto simile a quella degli ortotteri genuini, dei dermatteri, dei corrodenti e degli odonati.

I confronti istituiti pelle mandibole si possono applicare anche alle mascelle, eccezione fatta per gli odonati.

Il labbro inferiore di *Japyx* e *Campodea* è anch'esso *sui generis*; si può sospettare che debbasi parzialmente paragonare a quello delle libelludide e delle efemeride, nelle quali gli stipiti ed i lobi interni sono fusi assieme, mentre i lobi esterni sono fusi col palpo. Lobi di ciascuna metà del labbro inferiore fusi assieme troviamo anche nei dermatteri, ma gli stipiti sono divisi profondamente. Il labbro inferiore di *Machilis* e delle *Lepismide* trova riscontri simili a quelli accennati pelle mandibole, eccetto per gli odonati. Gli stipiti degli or nominati tisanuri sono divisi, precisamente come nella forficula; questa divisione è imperfetta negli ortotteri genuini e nei corrodenti. I palpi labiali di tre articoli in parecchi tisanuri trovano riscontro nei dermatteri, negli ortotteri genuini e nelle termiti.

Con tutti questi confronti ho sempre più affermato che gli arti boccali dei tisanuri sono fatti su due tipi differenti per cui i tisanuri devono esser divisi in *entotrofi* e in *ectotrofi*.

Gli ectotrofi sono senza dubbio molto prossimi agli ortotteri genuini, ai corrodenti

(1) Ciò a giustificazione di un errore in cui siamo incorsi Lubbock prima (*Monograph of Collembola a. Thysanura* London 1873, p. 218) ed io dopo.

e anche ai dermatteri. *Tutti i tisanuri presentano una galea (lobo esterno delle mascelle). Quest'è un carattere che si ripete appena negli ortotteri e in alcuni neurotteri, che manca cioè a tutti gli altri insetti.* È appunto in base a questo carattere che i sistematici riunivano le lepisme agli ortotteri e ai neurotteri, e denominavano questi tre gruppi *galeata.*

È indubitato che gli ectotrofi sono più vicini degli endotrofi alla condizione primitiva. Tutti i dati dell'anatomia comparata e dell'embriologia concorrono a provare: I, che gli arti boccali una volta erano sporgenti e funzionavano soltanto come zampe anteriori; II, che a poco a poco queste zampe s'adattarono a funzionare anche come arti boccali esterni; III, che poscia perdettero la funzione di zampe e si limitarono ad esser arti boccali esterni; IV, infine che in certi casi andarono approfondandosi e saldandosi più o meno, così restarono meglio difesi e s'avviarono alla trasformazione in organi succhiatori. Un bell'esempio dello stadio primo è offerto dalle piemascelle del curioso aracnide da me descritto col nome di *Koenenia*; esempio del secondo stadio ci offrono i crostacei; esempio del terzo caso sono i tisanuri ectotrofi e gli Insetti masticatori; esempio del quarto *Japyx* e *Campodea.* L'apparato succhiatore, che potrebbe dirsi un quinto stadio, trovasi negli insetti succhiatori.

II) *Zampe.*

Niente di molto notevole nelle zampe. Noterò soltanto che in *Campodea* e in *Japyx* i tarsi sono indivisi. In *Machilis* constano di tre articoli, in *Nicoletia* e in *Lepismina* soltanto di due, ma il secondo porta traccie di divisione in tre subarticoli; in *Lepisma* possono essere bi-o triarticolati, con traccie di suddivisione in due del secondo articolo nel primo caso, del terzo nel secondo. È notevole un'apofisi speciale articolata colle coscie medie e posteriori in *Machilis* (v. sotto a proposito delle pseudo-zampe). Non credo che essa sia paragonabile ai *calcaria* che trovansi alle tibie delle lepismide.

Il tarso che, andando da *Campodea* e *Japyx* a *Lepisma*, aveva assunto una segmentazione maggiore, in blatta è ancora meglio segmentato e consta infatti di cinque ben distinti articoli. Però, considerando tutti gli ortotteri genuini, si deve dire che il tarso varia da due a cinque articoli e perciò trova riscontro nei tisanuri.

III) *Zampe rudimentali (pseudozampe,* o *calcaria di Haase* l. c.), *cerci caudali e vescicole addominali (segmentali* o *ventrali).*

Esistono all'addome delle speciali appendici che ritengo rudimenti delle zampe, non appena in senso filogenetico, ed infatti in *Machilis* per es. par certo ch'esse servono anche di sostegno al corpo e di aiuto nella locomozione, credo però che la loro funzione principale sia essenzialmente come organo tattile. Il numero di queste pseudozampe varia assai. In *Campodea* esistono dal secondo al settimo (secondo e settimo compreso) segmento addominale. In *Japyx* esistono anche al primo segmento (all'esterno delle papille che ho ricordato a proposito degli organi genitali). È notevole che negli *Japyx solifugus* hanno evidente traccia di bifidità; sono però assai più ridotte che in *Campodea.* Importantissimo fatto è quello offerto dall'*Japyx gigas* in cui le pseudozampe constano di parecchi articoli.

In *Machilis* sono presenti anche all'ottavo e al nono segmento addominale: le appendici che ho accennate alle coscie di quest' animale sono del tutto uguali alle pseudozampe.

In *Nicoletia* si trovano dal secondo al nono segmento addominale, secondo e nono compresi.

In *Lepismina* possono trovarsi alla maggior parte dei segmenti addominali, od appena a tre di essi (settimo, ottavo e nono).

In *Lepisma* s'incontrano appena a tre o a due (settimo, ottavo e nono oppure ottavo e nono) (1).

Ne risulta la possibile presenza delle pseudozampe a tutti i segmenti eccetto l'ultimo. In questo esse sono evidentemente sostituite dai cerci pari (il cerco impari è un prolungamento diretto della parte posteriore del corpo, come dissi più sopra). Pseudozampe e cerci sono articolati cogli sterni relativi e sono mossi da muscoli inserentisi con un estremo alla loro base e coll'altro agli sterni: non possiedono muscoli intrinseci (v. § sulla muscolatura).

Il forcipe di *Japyx* può paragonarsi a cerci trasformati, serve sopratutto come organo di difesa, non offre differenze sessuali.

Passiamo alle vescicole addominali (Tav. V, fig. 60, 61 e 62). Si trovano in corrispondenza all'addome.

In *Campodea* notansi tante vescicole quante sono le pseudozampe: esse stanno disposte al lato interno di queste, ció che verificasi anche negli altri tisanuri.

In *Japyx solifugus* mancano affatto: in *Japyx Isabellae* ne esistono due paia (uno al secondo e uno al terzo anello). Nel *Machilis* si riscontrano ai primi otto segmenti, ed in alcuni di essi ne esistono due paia, in altri un paio solo.

In Nicoletia esistono per lo meno dal secondo all'ottavo segmento, un paio per ogni segmento. *Lepismina* presenta due paia di organi paragonabili alle vescicole, uno al primo segmento e l'altro all'ottavo.

Le vescicole sono retrattili nella cavità addominale con cui comunicano ampiamente: si retraggono rovesciandosi indentro *a guisa di dito di guanto.* Ciò accade per l'azione di alcuni fasci muscolari longitudinali (V. § sulla muscolatura). Quando sono sporgenti, restano ripiene di sangue. Il loro sporgere avviene, si può ben dire, passivamente per il premer cioè che fa su di esse il sangue della cavità addominale, il quale man mano che s'arrovesciano in fuori, vi penetra dentro. In quali condizioni fisiologiche esse sporgano, io non lo so: certo è ch'esse sono destinate a sporgere, se no, non sarebbero fornite dei muscoli sopradetti. Almeno in *Campodea*, in *Japyx* e in *Nicoletia*, possiedono molto probabilmente anche un peculiare filamento nervoso, con una terminazione nervosa alla loro estremità distale, e sono rivestite di cuticula sottilissima; attorno alla ammessa terminazione nervosa notansi delle cellule molto probabilmente ghiandolari.

Organi omologhi a queste vescicole esistono anche in svariati miriapodi, soltanto essi mancano di muscoli proprî.

(1) In una recentissima Nota l'Haase (l. c.) descrive le pseudozampe come setole molto sviluppate e le paragona anche alle setole dorsali di *Lepisma.* Fra la setola e la pseudozampa la differenza è enorme; quella è il prodotto d'una cellula dell'ipoderma, questa è fatta di connettivo (mesoderma) involto da ipoderma e da cuticula con peli ecc. Haase si basa sulla mancanza di muscoli intrinseci, la quale è comune alle setole e alle pseudozampe. Ma ragionando come lui, si viene a ritenere setole anche i cerci di *Campodea,* della *Lepismide* e di *Machĭlis,* i flagelli delle antenne degli ectotrofi, e fors'anche i tarsi di molti artropodi etc.

È difficile pronunziarsi sul loro significato morfologico. Wood-Mason pel primo tentò di paragonarle agli organi segmentali degli anellidi e del peripato. Non trovo sufficienti ragioni in favore di questo confronto, al quale si può fare l'obbiezione che esistono in scolopendrella anche al segmento genitale, obbiezione che però si potrebbe attenuare (v. § sugli organi genitali) con serie considerazioni.

Fra le vescicole addominali e gli organi segmentali io non vedo di comune che la disposizione segmentale.

Aggiungasi che in peripato esistono altri organi paragonabili ad esse e sono le ghiandole cosidette *coxales* (1); il confronto non è però del tutto esatto perchè esse si trovano sul lato interno delle zampe.

Io rifiuto in ogni modo l'ipotesi di Wood-Mason (2) (riprodotta da Nassanow (3), come tante altre cose da me scoperte, senza le debite citazioni) sopratutto perchè mi pare molto più semplice di paragonare, come hanno già fatto parecchi autori francesi, (Nicolet p. es.), queste vescicole a branchie: le ritengo branchie rudimentali ed alquanto trasformate. Sono per me paragonabili in genere alle branchie degli altri insetti ed in speciale omologhe a quelle branchie che occupano una posizione simile alla loro. Vero è che le branchie degli insetti possiedono trachee, ma se si studia il loro sviluppo, come ha fatto Lubbock, si trova che ne vanno sfornite al loro comparire e che questa mancanza dura per un determinato periodo della vita larvale dell'insetto. Io insomma penso che le vescicole addominali (branchie) e le pseudozampe rappresentano due rami di un arto addominale bifido, ciò che viene appoggiato anche dall'ordinamento della rusculatura (v. relativo). Questa mia opinione fa parte integrante della seguente ipotesi, già stata da me avanzata quasi come qui lo riproduco, nella mia Memoria sulla scolopendrella. Ammetto che nei progenitori dei tracheati gli arti erano bi-triforcati (bi-triramosi) quasi come nei crostacei e che questa caratteristica è andata perduta nei tracheati attuali. Residuarono però qua e là traccie evidenti e sono:

I. Gli arti boccali cioè mascelle e labbro inferiore; è notevole a questo riguardo la scoperta d'un palpo mandibolare nelle larve d'alcuni lepidotteri;

II. Le doppie zampe dei diplopodi;

III. Le zampe accompagnate da pseudozampe e da vescicole segmentali (pseudobranchie) nelle scolopendrella;

IV. Forse le zampe medie e posteriori del *Machilis*, alle quali s'articolano pseudozampe (4);

V. Forse le pseudozampe comitate da vescicole nei tisanuri;

VI. Forse le pseudozampe bifide dell'*Japyx*.

Le doppie zampe dei diplopodi, le pseudozampe e le vescicole dei tisanuri accennano forse ad una bi-triforcazione dell'arto avanzatasi tanta da dividerlo interamente e produrne due, tre arti secondarî. Nel *Machilis* al torace la biforcazione non si sarebbe tanta avanzata; ciò almeno fa supporre la sopra ricordata appendice delle coscie.

(1) Balfour in The Quart. Journal of Microsc. Science 1883 April e Gaffron in Zool. Beiträge von A. Schneider, 1 Bd. p. 145-163, 1885.

(2) Proceed. Asiatic. Society of Bengal f. August 1876.

(3) Biologisches Centralblatt 1886, October.

(4) Da una Nota recentissima di Haase (l. c.) rilevo che le zampe medie e posteriori delle Blattide portano pseudozampe come in *Machilis*.

S'intende che a questo ramificarsi degli arti, sarebbero seguìti perfezionamento di certi rami e riduzione di certi altri per es. in scolopendrella.

Se anche le antenne devono considerarsi primitivamente bifide, non posso dirlo con certezza. Infatti io tendo ad omologhizzare questi organi dei tracheati con le antenne anteriori dei crostacei, le quali, secondo Claus, sono primitivamente semplici e non bifide. Esistono però certe apofisi nelle antenne d'alcuni tisanuri (*Machilis*, maschio di *Nicoletia* (Tav. V, fig. 63) e di *Lepismina* ecc.) le quali potrebbero ritenersi accenno di bifidità. Notisi inoltre che le antenne di *Pauropus* (Lubbock) sono evidentemente bifide. Così per completare l'argomento della ramificazione degli arti ho anticipato alcune notizie sulle antenne: ne domando venia al lettore.

Concludendo, quanto si riferisce alle pseudozampe e alle vescicole addominali, io ammetto con parecchi autori che in ogni anello del tronco dei tisanuri siano esistiti arti ventrali ramosi; questi arti però erano ben lontani dall'attuale perfezionamento; successivamente gli arti toracici andarono perfezionandosi (zampe toraciche) e riducendosi gli addominali (pseudozampe e vescicole addominali). Nei crostacei troviamo fatti analoghi, o dirò più esattamente convergenti. L'embriologia dei tracheati ha dimostrato molto comune l'accenno di arti addominali che poi scompaiono, ciò che è in armonia coll'ipotesi in discorso.

Riassumendo tutto quanto si riferisce agli arti, si può dire che una volta esistevano negli insetti per lo meno diciotto paia d'arti, diciasette ventrali (dieci di questi erano addominali, tre toracici, quattro boccali), uno dorsale anteriore (antenne).

Dei quattro boccali nell'insetto adulto non ne esistono che tre (mandibole, mascelle, labbro inferiore). Il quarto (forse corrispondente al secondo paio d'antenne dei crostacei) non esiste che nell'embrione (ape, termite).

Aggiungasi che è lecito supporre l'esistenza primitiva di altri segmenti addominali e perciò fors'anche d'altre paia d'arti.

IV) *Antenne.* Questi sono i punti saglienti:

I. La *Campodea* neonata presenta le antenne come nell'adulto riguardo al numero degli articoli: ciò verificasi anche in *Japyx*. Ciò è specialmente in rapporto col fatto che questi animali non hanno mute totali (nelle termiti per es. ogni muta porta un aumento del numero degli articoli delle antenne).

II. Le antenne di *Campodea* e di *Japyx* son profondamente differenti da quelle degli altri tisanuri. Tutti gli articoli vanno forniti di muscoli in quei primi, appena l'articolo basilare in quest'ultimi. Perciò in questi e non in quelli si distingue una base (stelo) e un flagello (filamento).

V) *Ali e branchie dorsali.* Ritengo che il punto di partenza per lo sviluppo delle ali debba cercarsi nei terghi (lamine dorsali) e precisamente nelle sporgenze della loro porzione laterale e lateral posteriore, sporgenze che si trovano già ben chiare p. es. in scolopendrella e in molti chilopodi (Haase). È quì d'uopo far notare che esse constano di quegli stessi strati che si distinguono nelle ali.

Sono appena accennate in *Campodea*, più sviluppate in *Japyx* (specialmente al settimo tergo addominale). Nei tre anelli toracici delle lepismide esse sono relativamente molto sviluppate e ricche di trachee; ciò vale sopratutto per *Lepisma* e *Lepismina* (Tav. V, fig. 59). Pare che qui esse servano principalmente a proteggere le faccie laterali del largo torace, le quali debbono trovarsi spesse volte in pericolo per la

grande agilità onde gli animali in discorso fuggono entro fenditure, screpolature, vani sotto le pietre ecc. Basterebbe che queste sporgenze della *Lepisma* e della *Lepismina* si separassero, per mezzo d'un'articolazione, dai terghi, basterebbe una leggera modificazione dei muscoli dorso-ventrali (inspiratori), e si avrebbero delle ali. Come dimostra la storia dello sviluppo di blatta e di termite, le ali passano per uno stadio embrionale in cui sono semplici sporgenze come nelle lepismide. Forse la separazione delle sporgenze dai terghi, filogeneticamente parlando, è avvenuta quand'esse avevano raggiunto un forte sviluppo, per cui ostacolavano certi movimenti delle zampe, e perciò, per continuare ad esser utili all'animale, dovevano diventar mobili. Mettendo a profitto questa nuova disposizione, poco a poco avrebbero cominciato a funzionare come organi di locomozione (ali). Questa nuova funzione, in quanto avrebbe portato l'animale a vivere in un nuovo ambiente, avrebbe resa vana quella primitiva. Da ciò la trasformazione totale della sporgenza in ala; da ciò anche il limitarsi a due anelli soltanto, probabilmente in rapporto col centro di gravità dell'animale. Distinguo perciò i seguenti stadî nello sviluppo delle ali:

I. Semplici sporgenze laterali o lateral-posteriori dei tre terghi toracici.

II. Sporgenze più estese ed articolate ai terghi stessi.

III. Vere ale al secondo e terzo anello toracico.

È importante aggiungere che in parecchi insetti viventi e fossili si credette di riscontrare un paio d'organi paragonabili ad ali più o meno sviluppate, sul primo anello toracico.

Ma le sporgenze dei terghi toracici e addominali non sarebbero state soltanto il movente dello sviluppo delle ali; avrebbero dato luogo fors'anche alle branchie dorsali. Ciò sarebbe avvenuto, come per le ali, coll'esagerarsi delle sporgenze, coll'arricchirsi di trachee e col separarsi dai terghi per mezzo d'una articolazione (essendo per la respirazione molto utile la mobilità delle branchie). Io non posso escludere che in un dato periodo del loro sviluppo abbiano funzionato proteggendo le parti laterali del corpo, come supposi per le sporgenze che si trasformarono in ali.

In ogni caso branchie dorsali e ali potrebbero esser formazioni omologhe perchè avrebbero un punto d'origine comune. Io però non posso, almeno per ora, ammettere con Gegenbaur e con Palmen che le ali siano state una volta delle branchie e ciò perchè i tisanuri, come dimostrerò più avanti, si rannodano intimamente agli ortotteri i quali non hanno branchie dorsali e non presentano alcuna disposizione che faccia supporre le abbiano mai avute (1).

Anche a rischio di digredir troppo, voglio ricordare che nelle ali si formano le vene, o nervature, caratteristiche, le quali sono di due sorta, concave e convesse. Secondo Adolph (2), le concave corrisponderebbero ai rami tracheali primitivi, cioè soltanto le trachee delle nervature concave sarebbero omologhe alle trachee delle

(1) È stato osservato che le ali non possono mettersi in rapporto colle branchie, perchè al loro principiare non presentano rami tracheali (F. Müller, in *Beiträge z. Kennt. d. Termiten in* Jenas. Zeitsch. 1875) (Pancritius, *Beiträge z. Kennt. d. Flügelentw.* Königsberg, 1884): è facile rispondere a questa obbiezione che anche le branchie per un certo periodo embrionale non hanno trachee (Lubbock, *On the Develop. of Chloëon* in Trans. of the Linnean Society, vol. XXV, pag. 61).

(2) *Insectenflügel 1880.* Nova Acta d. Leop. Carol. Academie d. Naturforscher. Bd. IV, Pars II, n. 3.

branchie; le trachee delle nervature convesse sarebbero secondariamente derivate da quelle delle concave; un ispessimento della cuticula produrrebbe le nervature convesse; quest'ispessimento sarebbe secondario invece per quelle concave.

Questa ipotesi, secondo me, per quanto ingegnosa, è infondata; e infatti nell'accenno dell'ala della termite le trachee, com'io ho verificato, assumono la disposizione delle nervature convesse; esse ne diventano più tardi il substrato (quelle concave mancano quasi del tutto).

§ IX. *Posizione sistematica dei tisanuri.*

A) *Se l'ordine dei Tisanuri sia naturale.*

Tutti i generi dei tisanuri viventi furono oggetto delle mie ricerche [1] dal lato anatomico ed in piccolissima parte anche dal lato embriologico. Si domanda ora se resta naturale il gruppo dei tisanuri quale venne fondato dai sistematici.

Sui generi che si debbono comprendere tra i tisanuri tutti gli autori s'accordano, eccetto gli Americani i quali vogliono considerare come tisanuro, anche la scolopendrella. Io ritengo erronea quest'opinione, perchè la scolopendrella, come io ho dimostrato, ha caratteri evidentemente miriapodici (vaso sopraspinale, ghiandole genitali ventrali, apertura genitale al quarto anello del tronco, catena ganglionare come nei chilognati, zampe a tutti i segmenti ecc.).

Escluso quest'animale, il gruppo dei tisanuri resta abbastanza omogeneo. Le forme in esso comprese devono ordinarsi come segue:

SUPERORDO ORTHOPTERA s. lat.

Ordo. THYSANURA (Sin. Aptera).

Subordo I. ENTOTROPHI.

Familia I. **Campodeadae:** Gen. *Campodea* (con un'unica specie).
Familia II. **Japygidae:** Gen. *Japyx* (con pochissime specie).

Subordo II. ECTOTROPHI.

Familia I. **Machilidae:** Gen. *Machilis* (con poche specie).
Familia II. **Lepismidae:** Gen. *Nicoletia* (con due specie); *Lepismina* (con pochissime specie), *Lepisma* (con due sotto generi, cioè *Lepisma* s. st. e *Thermophila*, e con numerose specie).

È giustificata la mia distinzione dei tisanuri in due sottordini? Che rapporti hanno l'uno coll'altro?

Gli entotrofi rappresentano in complesso le forme più semplici e gli ectotrofi le più complicate. Le differenze principali tra i due sottordini sono le seguenti:

I. L'apparato boccale degli entotrofi è in parte internato nel capo (mascelle e mandibole) ed in parte fuso in una piastra protettrice dell'apertura boccale (labbro

[1] Se il *Dasyleptus* del carbonifero descritto nell'85 dal Brongniart (*Les insectes fossiles d. terrains primaires* in Bull. Soc. de Rouen), sia veramente un tisanuro è difficile a dirsi. Occorrerebbe sopratutto cercar le traccie degli ovopositori.

inferiore). L'apparato boccale degli ectotrofi ha conservate ed esagerate le condizioni embrionali degli entotrofi, cioè possiede mascelle e mandibole esterne, labbro inferiore profondamente diviso.

II. Gli entotrofi possono aver undici stigmi, mai più di dieci gli ectotrofi; le anastomosi dei tronchi tracheali degli entotrofi non sono omologhe a quelle degli ectotrofi.

III. I tubi malpighiani sono rudimentali negli entotrofi, ben sviluppati negli ectotrofi.

IV. Negli ectotrofi esistono ovopositori (oviscatti) ben sviluppati e forniti di ghiandole; queste mancano e quelli sono appena accennati (papille) negli entotrofi; il nono segmento non partecipa alla formazione dei genitali esterni negli entotrofi, vi partecipa invece largamente negli ectotrofi.

V. Le antenne degli entotrofi risultano d'articoli tutti forniti di muscoli; questi esistono appena all'articolo basilare negli ectotrofi.

VI. Negli entotrofi si trovano appena due cerci caudali (zampe trasformate); sono invece tre negli ectotrofi (zampe trasformate i pari, coda l'impari).

VII. Negli entotrofi la muta è parziale, negli ectotrofi è totale.

Le qui accennate differenze sono sufficienti a fissare due sottordini, ma non possono valere più in là. Infatti è vero che l'apparato boccale ha grande valore e che le sue differenze negli entotrofi e negli ectotrofi sono considerevoli; non si deve però dimenticare che molti insetti subendo la metamorfosi, mutano l'apparato boccale da masticatorio in succhiatorio o viceversa, e che per es. in certi coleotteri adulti si trova un apparato succhiatorio; tutto ciò indica un'innata facilità a trasformarsi da parte dell'apparato boccale; niente di strano di trovar questa facilità anche nelle forme più basse (tisanuri), molto più che i caratteri, i più stabili nelle superiori, sono non di rado incostantissimi nelle inferiori, del che vedremo subito un esempio.

Di minore importanza è la divergenza nell'apparato respiratorio, e infatti le differenze sopranotate non sono essenziali: spiccano se si confronta *Japyx solifugus* agli ectotrofi, ma invece scompaiono in parte se si pigliano per termine di paragone *Campodea* e *Japyx Isabellae*. In ogni caso si può dire che l'apparato respiratorio è divergente nelle varie forme dei tisanuri, e se si badasse ad esso solo, sarebbe giustificato l'elevare ogni famiglia al rango di sottordine. Neanche il numero dei tubi malpighiani ha grande valore. In proposito debbo far osservare che il Brauer ha loro concesso soverchia importanza nella distinzione degli ordini degli insetti: il loro numero può essere enormemente instabile non appena nei varî generi, ma perfino in una stessa specie, inquantochè or cresce ed or diminuisce durante la metamorfosi.

Ancor meno valore concedo alle appendici genitali esterne. Tra blatta e locusta che sono per comune consenso ortotteri genuini, non passa per questi organi minor differenza che tra gli entotrofi e gli ectotrofi. Quanto alla partecipazione del nono segmento per la formazione dei genitali esterni, si tratta soltanto d'una differenza di grado, e infatti in *Campodea* soltanto l'ottavo segmento è genitale, in *Japyx* lo è anche l'intersegmento tra l'ottavo ed il nono, negli ectotrofi infine anche il nono segmento. La divisione della nona sternite in *Japyx* si può considerare già come preparativo per questa trasformazione.

Importanti sono le divergenze nelle antenne e nei cerci caudali: non valgono però al di là del sottordine.

La muta parziale è pur di valore, ma dalla parziale alla totale non c'è che un passo, ed infatti basta un leggier ispessimento della cuticula per render la muta totale invece che parziale.

Breve, è giustificata la distinzione dei tisanuri in due sottordini. Una scissione più forte non ci sembra permessa [1]. Gli entotrofi pel complesso della loro organizzazione devonsi ritener più bassi degli ectotrofi.

B) *Che rapporti hanno i tisanuri coi singoli ordini degli insetti proposti dal Brauer* [2] *e coi collemboli?*

Cominciamo colle relazioni dei tisanuri cogli ortotteri genuini.

Queste relazioni sono così strette che, se dei tisanuri si conoscesse appena la *Lepisma*, nessun esiterebbe a collocarla tra gli ortotteri genuini e l'ordine dei tisanuri dovrebbe cancellarsi. Perciò nell'istituire un parallelo tra questi e quelli terrò presente sopratutto i tisanuri superiori e mi limiterò alle somiglianze.

Tanto negli ortotteri genuini che nei tisanuri il corpo può essere protetto, o da peli, o da squamme.

In parecchi ortotteri genuini il dermascheletro non è molto più sviluppato che nelle lepismide. La sutura dorsale del capo dei tisanuri trova riscontro in tutti gli ortotteri genuini (sutura tra la fronte e il vertice di Brunner von Wattenwyl) [3]. Gli apodemi trovano pure riscontro.

Essenzialmente uguale è il sistema nervoso. È vero che in blatta i ganglî addominali sono sei, ma in *Lepisma* evvi già la tendenza a fondersi del settimo coll'ottavo, perciò la condizione di blatta esprime un'esagerazione di quella di *Lepisma*. Un simpatico (s'intende un vero simpatico, cioè con gangli) manca non appena nei tisanuri, ma anche in parecchi ortotteri genuini. I nervi stomato-gastrici (viscerali pari e impari) e i relativi gangli esistono in condizioni molto simili nelle lepismide e negli ortotteri genuini; soltanto non ho certificato in *Lepisma* il ganglio ventricolare degli ortotteri (esiste in tutti?).

L'occhio composto di *Lepisma* o di *Machilis* per la mancanza della lamina retinica trova riscontro in blatta [4]. Parecchi ortotteri genuini hanno coni cristallini come quelli di *Machilis*.

Gli stigmi delle lepismide trovano riscontro in blatta e in genere negli ortotteri genuini. Il sistema tracheale di blatta riunisce assieme le condizioni di *Japyx* e di *Lepisma*, presenta però ulteriori differenziazioni per proprio conto. In grillotalpa le anastomosi tracheali mancano forse come in *Machilis* e in *Campodea*.

(1) Schneider separa *Campodea* dai tisanuri. Pare ch'egli si basi sul fatto che l'ovario di *Campodea* presenta cellule nutritizie, le quali mancano agli altri tisanuri. Il guaio si è che esse fan difetto anche in *Japyx* che nessun potrebbe tenere in un ordine differente di quello di *Campodea*.

(2) *System. zoolog. Studien* aus d. XCI Bande d. Sitz. d. kais. Akad. Wissenschaft. I Abth. Mai-Heft Jahrg. 1885. Wien.

(3) *Prodromus d. Europäischen Orthopteren*. Leipzig, 1882.

(4) Carrière, *Die Seeorgane der Thiere* 1885. Strassburg. V. anche Hickson in Quart. Journ. of Micr. Sc. Apr. 85.

Nei tisanuri superiori differenziasi un'ingluvie e un proventricolo (gisiere); essi persistono in molti ortotteri genuini. *Machilis* e *Lepisma* presentano le borse ventricolari tanto caratteristiche degli ortotteri genuini. Anche l'intestino medio e posteriore dei tisanuri superiori trovano riscontro in questi. Le ghiandole salivari di *Lepisma* ricordano da vicino quelle di blatta. I tubi malpighiani degli ortotteri gemini sono molti nell'adulto, ma nei giovani sono in numero assai minore (da otto a sedici in blatta, quattro in grillotalpa) numero che accenna a quello dei tisanuri: del resto la tendenza dei tubi a dividersi e quindi a moltiplicarsi è già evidente in *Machilis*.

Anche il sistema vascolare è simile negli ortotteri genuini e nei tisanuri.

L'ovario di *Lepisma* è poco lontano da quello di Blatta; l'utero, la vagina, le ghiandole sebacee e il ricettacolo del seme si trovano in amendue le forme. Ovopositori e lamine subgenitali (derivate dagli sterni addominali ottavo e nono) presentano molte variazioni negli ortotteri genuini, variazioni tra cui sono di quelle che accennano alle condizioni di *Machilis* e di *Lepismide*.

Grandi somiglianze anche nei genitali maschili; le anastomosi caratteristiche dei condotti deferenti di *Machilis* trovano un riscontro in Blatta.

In complesso nei tisanuri per il complicarsi e l'ingrandirsi dell'apparato genitale esterno, combinati con una tendenza di questo apparato ad avvicinarsi all'estremità posteriore del corpo, assistiamo ad uno spostamento all'indietro dell'apertura genitale. Un simile spostamento verificasi anche negli ortotteri genuini, nei quali l'apertura genitale femminile si può riferire ancora alla parte posteriore dell'ottavo segmento o al confine tra l'ottavo ed il nono, quella maschile invece spetta al nono, il tutto come nelle lepismide.

I segmenti addominali degli ortotteri genuini secondo Brunner von Wattenwyl (1) e Dewitz (2) sono dieci, comprendendo come un segmento anche le tre valve anali; per me (v. sopra) queste non rappresentano un segmento, perciò riterrei nove i segmenti addominali degli ortotteri genuini: è vero che nei tisanuri sono dieci, ma però il decimo delle lepisme in confronto a quello della *Campodea* può già dirsi rudimentale. Non voglio tacere che questa riduzione è in rapporto colla già accennata tendenza dell'apertura genitale ad avvicinarsi all'estremità posteriore dell'addome (3).

Le antenne delle lepismide e di *Machilis*, e così pure il loro apparato boccale e locomotore, trovano riscontro negli ortotteri genuini. Esistono divergenze piccole nel numero degli articoli dei palpi: quello caratteristico degli ortotteri genuini c'è però già uguale o quasi nei tisanuri superiori. Il labbro inferiore presentasi diviso tanto in *Machilis* e in *Lepismina* quanto negli ortotteri genuini, in questi ultimi però meno profondamente che in quelli. Le pseudozampe e le vescicole addominali che tendevano a scomparire nei tisanuri sono scomparse negli ortotteri genuini, qua e là però s'incontrano organi paragonabili alle pseudozampe (per es. secondo Haase

(1) *Die Morphologische Bedeutung d. Seguente* etc. *bei d. Orthopteren.* Wien, 1876.

(2) Cito a memoria.

(3) Berlese (Acad. Lincei, Memorie 1882), in un interessantissimo lavoro, pur troppo però limitato agli ortotteri genuini più perfezionati, conta undici anelli addominali e perciò per lui lo sbocco dei genitali è su anelli posteriori a quelli sopraccennati.

sulle due paia posteriori di zampe delle blattide, le quali perciò comportansi come *Machilis*).

Le mute degli ortotteri genuini non paiono differenti da quelle delle lepismide e di *Machilis*. Da quel poco che si sa è lecito indurre che anche l'apparato muscolare non è essenzialmente differente nelle forme in paragone.

Ai tisanuri mancano le ali, ma questi organi mancano anche a svariati ortotteri genuini. Brauer senza fornire alcuna prova ha asserito: I) che i tisanuri non hanno mai avuto ali; II) che gli ortotteri genuini senz'ali le hanno avute e poi le hanno perdute. Dai miei studî resta abbastanza fondata la prima di queste due asserzioni, ma la seconda resta ancora a dimostrarsi, come dirò più estesamente nell'ultimo paragrafo.

Si domanda ora che cosa resta di tutte le enormi differenze stabilite da Brauer [1] tra i suoi Apterigogenea (Aptera d'Haeckel e di Gegenbaur) (Synaptera di Packard jun.) e gli ortotteri genuini, differenze su cui egli basa la distinzione fondamentale degli Insetti in Apterigogenea e Pterigogenea, mettendo così tra i due gruppi un enorme abisso? Il grado di divergenza tra i tisanuri superiori e gli ortotteri genuini non supera di molto quello che esiste tra le varie famiglie di questi ultimi. Certamente se potessimo far scomparire *Machilis* e *Lepismide*, resterebbe tra entotrofi e ortotteri genuini una ragguardevolissima interruzione! In conclusione per quanto le teorie preoccupino la mente, allo spassionato osservatore s'impone il fatto che i tisanuri ectotrofi formano un ponte tra i tisanuri entotrofi e gli ortotteri genuini. A me pare d'aver dimostrato ad esuberanza questa tesi, la quale viene indirettamente confortata anche dalle mie poche osservazioni sullo sviluppo dell'*Japyx*, inquantochè mi è risultato certo che l'uovo di quest'animale deve presentare un processo di segmentazione almeno non essenzialmente differente da quello degli Pterigogenei, deve provvedersi d'un amnio ecc.

In questi confronti ho tralasciato le forficule e i corrodenti, perchè, seguendo Brauer, intendo di parlarne ora separatamente.

Brauer, come prima di lui Packard jun. [2], ha distaccato le forficule dagli ortotteri genuini e ne ha fatto un ordine a sè (Dermaptera). Noi intanto possiamo stabilire che tra i tisanuri ed i dermatteri passa una stretta parentela: i molti caratteri d'ortottero comuni agli uni e agli altri costituiscono i loro principali punti di rassomiglianza. Aggiungasi: 1° che la divisione degli stipiti del labbro inferiore è quasi totale nei dermatteri ed è totale nei tisanuri ectotrofi; 2° che il forcipe di *Japyx* trova riscontro nei dermatteri. La più notevole differenza tra i tisanuri e dermatteri si riscontra nei genitali maschili: in questi il canale d'eliminazione dei prodotti sessuali (mesodermico) è doppio e doppio il suo sbocco (ectodermico) all'esterno. Pigliando per termine di paragone la *Campodea* (Tav. IV, fig. 47) come abbiamo già più sopra accennato, risulta però che la differenza non è enorme: e infatti anche in *Campodea* doppio è il canale d'eliminazione (mesodermico): soltanto gli sbocchi esterni (ectodermici)

[1] Cito soltanto Brauer che è il più recente e il più competente. Altri autori sono ricordati dal Brauer stesso.

[2] *The systematic position of the Orthoptera* (4. Report of the Entom. Commission. 1884).

si sono fusi assieme e hanno formato un canalicolo impari (canale ejaculatore). Un simile fatto s'incontra già nella femmina dei dermatteri; del resto fatti dello stesso genere sono comunissimi tanto nel gruppo dei tracheati quanto in altri gruppi: l'organo impari risulta spesse volte dalla fusione d'organi pari. Maggiori ragguagli in proposito si possono trovare nella Memoria di Palmen.

Brauer ha separato dagli ortotteri anche i corrodenti. Pel confronto di questi coi tisanuri ci basta accennare che anche pei corrodenti, come pei dermatteri, vale il confronto già sopra esposto per gli ortotteri, tranne che mancano ai corrodenti come a molti tisanuri, le borse ventricolari.

Si noti che *Orthoptera genuina s. st., Corrodentia e Dermaptera* son forse da ritenersi come vuole Brauer, tre ordini separati, ma presentano tra di loro *grande affinità*, ciò che spiega la posizione dei tisanuri, i quali in sostanza concordano pei loro apparati organici con tutti e tre. Si potrebbe anche domandare se in realtà è giustificata la creazione dei tre ordini proposta da Brauer? Questi si basa specialmente sugli organi che mancano a tutti i tisanuri, cioè sulle ali: or bene a me, per quanto poco competente, non pare che le differenze di questi organi nei tre gruppi in discorso siano veramente rilevanti. Infatti le ali dei corrodenti, come ha già stabilito Hagen ([1]) ed ha recentemente confermato Redtenbacher ([2]), si avvicinano molto a quelle delle blatte. Anche le ali dei Dermaptera sono, secondo quest'ultimo autore, notevolmente simili a quelle di parecchie blatte (Eleutherodea). In vista di queste indubbie simiglianze offerte dalle ali e dei notevolissimi riscontri negli altri apparati organici, inclino a non accettare la proposta di Brauer e a ritornare all'ordine Orthoptera in senso largo per comprendervi *Thysanura*, *Corrodentia*, *Dermaptera*, *Orthoptera* s. st.

In ogni caso quello che importa si è: I) che dai tisanuri si passa per gradi agli ortotteri genuini, ai corrodenti e ai dermatteri; II) che i caratteri, che separano tutti questi gruppi, sono molto meno importanti di quanto ammette Brauer; III) che la distinzione d'aptera e pterigota non ha una base soda; IV) che in qualunque sistema gli atteri devono essere messi accanto agli ortotteri genuini.

Ma negli Orthoptera s. l. Gerstäcker comprende anche Ephemeridae, Odonata, Plecoptera (Perlariae). È difficile dire se egli s'apponga al vero. Io inclino a credere di sì. Chi considera i tre ultimi gruppi come ordini indipendenti si riferisce essenzialmente alle ali, all'apparato boccale ed alle aperture sessuali doppie: nessuno di questi argomenti però a me pare sufficientemente valido. Mi spiego. Quanto alle aperture sessuali non ho che a ripetere quel che dissi per i Dermaptera. Quanto alle ali, cito ancora Redtenbacher: questi infatti osserva: I) che le ali degli odonati per una quantità di caratteri s'approssimano a quelle degli ortotteri e delle perlarie, ma più specialmente a quelle delle efemeride; II) che le perlarie per le ali sono prossimi parenti delle blattide e delle mantidi; III) che i caratteri primitivi dell'ala nelle efemeride danno un'ansa per legar queste agli ortotteri. Quanto infine all'apparato boccale, gli

([1]) *Monographie der Termiten.*

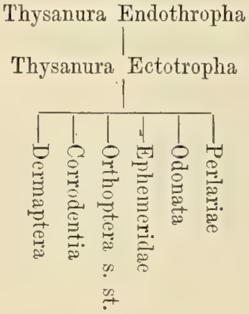
([2]) Ann. d. k. h. Naturhist. Hofmuseum. Bd. I. Vergleich. Studien ü. d. Flügelgeäder d. Insecten. Wien, 1886.

studî di Gerstäcker [1] e di Wolter [2] hanno dimostrato la possibilità di riunire efemeride, perlarie, e odonati cogli ortotteri (senso lato).

Insomma io tendo a ritornare agli ortotteri nel senso lato di Gerstaecker, per comprendervi dunque i tisanuri, gli ortotteri genuini, i corrodenti, i dermatteri, le efemeride, le perlarie e gli odonati. Non si dimentichi però che tra tisanuri, perlarie, efemeride ed odonati le differenze sono molto considerevoli, benchè le branchie dei tre ultimi gruppi abbiano forse in parte una convergenza e in parte una omologia colle vescicole addominali del primo. Il movente principale della differenziazione si deve cercare nell'adattamento temporario alla vita acquatica.

Conclusione: i *tisanuri sono l'ordine più basso degli ortotteri* (*s. l.*): *da insetti prossimi ai tisanuri sono derivati, come tanti rami alquanto divergenti gli altri ortotteri* (*s. l.*).

La mia maniera d'intendere i rapporti dei varî Orthoptera (s. lato, cioè di Gerstäcker) è indicata abbastanza bene dal seguente schema.



Che ci siano in questo *ordo*, o meglio *superordo* degli ortotteri s. l. (potrebbe denominarsi *Protentoma*, riservando il nome di *Metentoma* agli altri insetti) forme molte divergenti non ci deve stupire, chè ormai è provato che i gruppi inferiori nella scala zoologica, comprendono di sovente degli esseri molto differenti, e che negli inferiori è di spesso instabile quel che nei gruppi superiori diventa stabilissimo.

Il mio albero genealogico non è una concezione nuova, io lo concedo facilmente; a me pare però che la classificazione ormai antiquata a cui io m'attengo, con questo mio lavoro risorga con una estesa base morfologica.

Il risultato più importante delle mie ricerche si è la piena giustificazione dell'ipotesi che i tisanuri sono gl'insetti più primitivi che noi conosciamo, almeno per la maggior parte dei loro apparati organici.

L'ipotesi però che tra il sistema tracheale aperto all'esterno dei tisanuri e quello del pari aperto degl'insetti superiori interceda un abisso, inquantochè quello dei tisanuri sarebbe aperto primitivamente, mentre quello degli altri insetti, diventerebbe tale secondariamente, quest'ipotesi, dico, non può più reggere, perchè si nota un passaggio graduale dei tisanuri agli ortotteri genuini, e non c' è ragione di credere che gli ortotteri genuini siano stati una volta anfibiotici, alla guisa delle efemeride p. es.

(1) *Z. Morphologie d. Orthoptera Amphibiotica* (Separatabdruck).
(2) *Die Mundbildung d. Orthopteren Greifswald*, 1883.

Aggiungasi che i caratteri primitivi (ali ed aperture sessuali) delle efemeride, la cui conservazione è forse in rapporto coll'adattamento alla vita acquatica nel periodo larvale, sono pochi e non sufficienti per farle mettere alla base dell'albero genealogico degli insetti, molto più che certe altre loro disposizioni organiche esprimono un differenziamento grandemente progredito (metamorfosi ecc.).

Resta di paragonare i tisanuri cogli ordini superiori, cioè coi Metentoma come sopra li denominai.

A questo riguardo si deve riconoscere che in generale quasi nulle sono le somiglianze se si pigliano come termini di confronto i tisanuri superiori e i Metentomi in condizione d'imagine. In molti e spesso sorprendenti riscontri s'imbatte invece chi confronta i tisanuri alle larve dei Metentomi: molti Metentomi passano per un periodo larvale in cui sono campodeiformi o japigiformi.

Un punto speciale è già stato messo in rilievo da Meinert ([1]). I rincoti, cioè, possono supporsi lontanamente derivati da tisanuri entotrofi. L'apparato boccale di questi può, senza gravissime modificazioni, trasformarsi nell'apparato boccale di quelli, inquantochè sono fabbricati sul medesimo tipo. Il fatto che il labbro inferiore in *Japyx* presenta due suture trasversali trova riscontro nei rincoti, il cui labbro inferiore consta di parecchi articoli (per lo più, e tutt'al più quattro); è bene in proposito ricordare che le larve dei rincoti hanno già l'apparato succhiatore come gli adulti. Non mancano altri punti di riscontro tra tisanuri e rincoti: questi punti, a mio parere, cresceranno quando verranno fatte su questi ultimi delle ricerche che prenderanno punto di partenza da quei primi. Tuttociò armonizza colla geologia, la quale c'insegna che gl'insetti più antichi sono gli ortotteri genuini (siluriani) e poi s'aggiungono i corrodenti, gli odonati, le perlarie, le efemeride, e, un poco più tardi, i rincoti. A proposito notiamo anche che i residui fossili degli insetti sono quasi esclusivamente costituiti dalle ali; non ci stupisce perciò la mancanza d'ogni traccia di tisanuri fino al carbonifero (Brogniart).

Fin qui ho parlato dei tisanuri; ma gli affini collemboli dove si lasciano? Dai miei studî resta comprovata la posizione dei collemboli accanto ai tisanuri; acquista perciò base solida il giudizio (il quale in realtà prima dei miei studî era quasi un pregiudizio) che i collemboli sono tisanuri i quali hanno subìto uno speciale adattamento, al solito consistente in riduzioni da una parte e in perfezionamenti dall'altra. Sono perfezionamenti speciali dei collemboli il tubo ventrale e l'apparato del salto ([2]). Offrono riduzione il sistema tracheale, la segmentazione dell'addome, la catena ganglionare, le pseudozampe, le vescicole addominali ecc.

Ulteriori studî sui collemboli condurranno forse a riunirli coi tisanuri entotrofi; ciò io penso in vista dell'apparato boccale, del tubo ventrale ([3]), del canal digerente ecc.

([1]) Magazine of nat. history. S. 3, vol. XX, november 1867, p. 361.

([2]) In un punto, se sono esatte le ricerche di Sommer (Zeitschrift f. Wiss. Zool. Bd. 41, Viertes Heft) i collemboli sono più prossimi dei tisanuri agl'insetti superiori, e cioè nella presenza dei muscoli aliformi.

([3]) Si potrebbe sospettare che il tubo ventrale avesse che fare anche colle vescicole addominali. Occorrono nuove ricerche sui collemboli.

Resta dubbio se siano o no conservati nei collemboli dei caratteri primitivi: uno di questi sarebbe lo stigma cefalico di certi sminturi, se si riuscisse a dimostrare che appartiene veramente al capo; esso troverebbe riscontro nella scolopendrella.

Così discussi i rapporti dei tisanuri cogli altri insetti passiamo a confrontarli cogli altri artropodi, e precisamente coi gruppi i più affini, cioè coi sinfili, coi chilopodi, coi protracheati e cogli aracnidi.

Comincio coi sinfili. Per questo confronto, come è naturale, richiamo più specialmente i tisanuri primitivi, e tengo d'occhio anche i collemboli tanto affini ai tisanuri, come ho detto più sopra.

Molti sono i punti di somiglianza; io ne espongo i principali:

I. Cuticula sottile.

II. Mancanza di ganglî simpatici.

III. Presenza d'uno stigma cefalico nelle scolopendrelle, e forse in certi collemboli (ricordo che qualcosa di simile esiste negli embrioni d'ape).

IV. Due pezzi endoscheletrici (mesoderma?) collocati vicini alla faccia ventrale del capo.

V. Sutura epicranica.

VI. Tubo intestinale semplicissimo e distinto in ambo le forme in tre parti; i tubi malpighiani nei tisanuri presentano condizioni svariatissime, tra le quali può comprendersi anche quella delle scolopendrelle; esiste un sol paio di ghiandole salivari (tubulari) in ambedue le forme; le cellule epiteliali dell'intestino medio nelle scolopendrelle sono di una sola forma come nella campodea e nell'*Japyx*.

VII. Corpo adiposo.

VIII. Vaso dorsale con valvole ed ostî.

IX. Appendici dell'estremità posteriore del corpo; sono di forma assai variabile negli atteri (forcipe, cerci, ecc.), perciò la condizione delle scolopondrelle potrebbe considerarsene una nuova varietà.

X. Numero dei segmenti del corpo; la storia dello sviluppo postembrionale delle scolopendrelle ci può spiegare facilmente la piccola differenza numerica tra i segmenti dei tisanuri e quelli delle scolopendrelle.

XI. Sbocco dei genitali (V. il § sui genitali).

XII. Pseudozampe e vescicole addominali (V. il § su questi organi).

XIII. Apparato boccale.

XIV. Lamine dorsali.

Gli ultimi due punti debbono venir alquanto discussi.

Cominciamo coll'apparato boccale.

Per questo confronto è d'uopo di non limitarci all'*Japyx* e alla *Campodea*, ma d'estenderci ad altri tisanuri, e cioè al *Machilis* e alle *Lepismide*. Prendendo in considerazione tutte queste forme, mi pare facile di conchiudere che esiste un perfetto parallelismo dell'apparato boccale dei tisanuri con quello delle scolopendrelle, come risulta dalle seguenti comparazioni.

Il labbro superiore trova perfetto riscontro (nella *Campodea* esso ha dentelli come nella scolopendrella).

Le mandibole d'*Japyx* stanno approfondate nel capo, tranne la punta che sporge

nella cavità boccale. La punta è rivestita di cuticula: del resto della mandibola soltanto la superficie, che guarda il lato del capo, è rivestita di cuticula ed è libera, però non esiste un'articolazione della mandibola colla cuticula del capo. Nella scolopendrella la punta è come in *Japyx*, nel resto della mandibola la superficie laterale è cuticulare e libera, pur come nell'Japyx, però, a differenza di questo, è esterna, perciò la mandibola è superficiale e forma un'articolazione colla cuticula del capo. Con altre parole, mentre nella scolopendrella la faccia laterale della mandibola è del tutto esterna, nell'*Japyx* essa è interna, cioè coperta dalla cuticula laterale del capo, dal relativo ipoderma e da tessuti mesodermici; la differenza sta dunque in ciò che nella scolopendrella, se si staccano le mandibole, la cuticula del capo viene a presentare due fessure (una per lato), lo che invece non avviene nell'*Japyx*.

Quindi nelle scolopendrelle non è avvenuto un approfondamento della mandibola; questa concorre perciò a limitare la parte laterale del capo [1]. La differenza avrebbe un certo valore, se non avessi verificato che *nell'embrione di Japyx le mandibole non sono internate come nell'adulto, ma sono sporgenti*, e attestano così la loro origine dalla trasformazione d'un arto ambulatorio. Primitivamente la mandibola è dunque un arto ambulatorio; quest'arto trasformandosi in mandibola *si è in certo modo infossato parzialmente nella scolopendrella,* sicchè ne resta esterna appena la punta e la superficie laterale; *si è infossato molto più nell'Japyx,* sicchè ne resta esterna appena la punta.

La *Campodea* riproduce le condizioni dell'*Japyx*; e perciò quel che finisco di esporre per l'*Japyx*, si può applicare anche alla *Campodea*.

Invece nel *Machilis* e nelle lepismide le mandibole sono in condizioni non molto dissimili a quelle della scolopendrella, e per l'articolazione e per la superficie laterale che resta libera ed esterna.

Le mascelle nell'*Japyx*, nella *Campodea*, nel *Machilis* e nelle lepismide sono fornite d'un lobo esterno e d'un lobo interno, appunto come nella Scolopendrella. Quanto alla posizione, in complesso alle mascelle si possono applicare le considerazioni sopra svolte pelle mandibole.

Il palpo mascellare è molto sviluppato nelle lepismide e nel *Machilis*; lo è meno nell'*Japyx*, meno ancora nella *Campodea*; nella scolopendrella lo è presso a poco come nella *Campodea*; non abbiamo dunque tra i tisanuri e le scolopendrelle, quanto al palpo, delle vere differenze.

Il labbro inferiore risulta evidentemente di due semilabbri saldati assieme tanto negli entotrofi quanto in scolopendrella. Nell'*Japyx Solifugus*, al labbro inferiore stanno annessi un palpo semplice e cortissimo ed una papilla retrattile in una cavità del labbro: il palpo, e fors'anche la papilla, mancano all'*Japyx Isabellae*. Nella *Campodea* stanno annessi un palpo semplice e cortissimo ed una papilla non retrattile e per la posizione non omologhizzabile a quella dell'*Japyx*. Nel *Machilis* e nelle Lepismide esiste soltanto un palpo, molto lungo e articolato. Quindi la papilla dell'*Japyx Solifigus* e della

[1] Il confronto dell'apparato boccale di scolopendrella coi tisanuri che si trova nella mia Memoria su scolopendrella resta in parte oscuro per errori tipografici.

Campodea è forse un carattere secondario e il loro palpo si può considerare rudimentale in confronto a quello del *Machilis* e delle lepismide ; la mancanza totale della papilla e del palpo nella scolopendrella si può dunque ritenere quasi un ripetersi di condizioni accennate nei tisanuri. Anche le altre suture del labbro inferiore di scolopendrella trovan riscontro evidente in *Japyx*. Oltre a ciò in tutti i tisanuri, come nella scolopendrella, esistono ligula e paraglosse.

Questi confronti sono così naturali che a me pare fuori d'ogni dubbio che l'apparato boccale delle scolopendrelle, e, sarei tentato d'aggiungere, dei chilognati, risulta fatto da tre paia d'arti, come quello degli insetti.

Veniamo alle lamine dorsali.

Secondo il Latzel (1), una grande differenza tra le campodee e le scolopendrelle consiste nelle lamine dorsali che nella *Campodea* sono appena accennate ai segmenti del torace, mentre nelle scolopendrelle sono sviluppatissime in tutto il tronco. Ciò secondo me, non costituisce una vera differenza. E infatti in un prossimo parente di *Campodea*, cioè nell'*Japyx* troviamo lamine dorsali ben sviluppate e sporgenti lateralmente sì al torace che all'addome. Anzi nell'*Japyx Wollastoni* (Westwood) il margine posteriore della lamina dorsale che corrisponde al settimo anello addominale è *profunde emarginatus* (Westwood): e in altri *Japyx* gli angoli posteriori di questa stessa lamina del settimo anello addominale si prolungano in punte paragonabili a quelle della *Scolopendrella notacantha*.

In conclusione esistono grandi somiglianze tra i tisanuri e le scolopendrelle.

Le principali differenze sono date dal vaso sopraspinale, dalla catena ganglionare e infine dalla posizione ventrale delle ghiandole genitali.

Anche esse possono però venir molto attenuate, quando si considera: I) che si trova una lacuna sopraspinale in varî tisanuri e che essa è evidente specialmente in *Lepismina*; II) che la catena ganglionare di *Lepisma* passa per uno stadio in cui rassomiglia a quella di scolopendrella; III) che le ghiandole genitali dei tisanuri sono laterali e che in certi collemboli esse sono parzialmente ventrali.

Passiamo al confronto coi Chilopodi.

Quanto al rapporto di questi cogli insetti, due opinioni si contrastano il campo. Alcuni vogliono far derivare tanto i Chilopodi quanto gli insetti da forme provviste di pochi anelli: gli insetti deriverebbero da esse direttamente; i Chilopodi invece avrebbero secondariamente acquistati molti nuovi segmenti (*Elongationsprincip* di Haase) (2). Altri fanno derivare gli insetti da forme simili ai Chilopodi per via d'una concentrazione, ossia riduzione del numero dei segmenti.

Io voglio qui soltanto far notare che, per comune consenso, i Chilopodi hanno grandi somiglianze cogli insetti e che queste somiglianze sono state esposte specialmente dal dott. Haase; ma questo autore ha tenuto pochissimo conto dei tisanuri, perchè essi erano mal noti, quand'egli faceva il lavoro in discorso. Ripetiamo perciò *per summa capita* il parallelo, applicandolo più specialmente a questi ultimi.

(1) *Die Myriopod. d. oester. ungar. Monarchie.* I e II parte. Wien. 1883-84.

(2) *Beiträge z. Phylog, und Ontogenie* der *Chilopeden* in Zeitscrif. f. Entom. Breslau. Neue Folge, Heft 8, p. 93-114, 1881.

Per le condizioni delle commissure longitudinali, il sistema nervoso dei tisanuri trova riscontro nei chilopodi. Ai chilopodi, anzi a tutti i miriapodi manca un ben distinto simpatico appunto come manca ai tisanuri.

Il sistema circolatorio dei chilopodi è caratterizzato dalla presenza d'un vaso sopraspinale e di muscoli aliformi ben sviluppati. Quello è rudimentale e questi mancano nei tisanuri.

L'apparato respiratorio trova sufficiente riscontro, tranne ai primi anelli.

Il tubo digerente trova molti punti di riscontro nelle forme in parola: la semplicità di esso è la caratteristica tanto di *Japyx* e *Campodea* quanto dei chilopodi.

Ovario e testicoli dei chilopodi sono tipicamente impari, e ciò in un senso li discosta dai tisanuri: sono però dorsali, e ciò in un altro senso ne li avvicina.

I condotti d'eliminazione dei prodotti sessuali e lo sbocco impari posteriore coincidono nelle forme in confronto.

In tutte, il capo porta antenne e tre paia d'arti boccali. Quelle e questi trovano riscontro sufficiente (1).

Come i lettori facilmente rilevano da questo breve parallelo, i chilopodi presentano indubbie somiglianze coi tisanuri; esistono però anche delle dissomiglianze, e considerevoli, più di quanto suppone l'Haase.

Un confronto dei tisanuri coi chilognati a me sembra infruttuoso.

A me basta richiamare che l'unico punto serio di raffronto è costituito dal fatto che in ambo i gruppi il vaso sopraspinale viene sostituito da una lacuna.

Concludendo i tisanuri hanno affinità coi miriapodi, e più specialmente coi chilopodi e coi sinfili. La loro non molto lontana origine comune coi miriapoli è sicurissima.

Si aggiunga che è comune ai miriapodi e ai tisanuri anche un embrione con tre paia di zampe ai primi tre segmenti del tronco; seguono altri segmenti su cui esse si formano più tardi ed acquistano grande sviluppo (miriapodi), ovvero restano rudimentali (tisanuri).

Passiamo al confronto cogli aracnidi (detti anche arachnoidea).

Mi attengo agli aracnidi primitivi cioè agli artrogastri. I rapporti tra gli artrogastri ed i tisanuri risultano dalle seguenti considerazioni:

I. Nei solifughi distinguiamo un capo e un torace: capo e torace sono accennati più o meno chiaramente anche nei microtelifonidi, nei tartaridi, in alcuni acaridi e anche in una parte degli pseudoscorpioni.

II. L'addome si può ritenere di dieci articoli nei frinidi, nelle solfughe, in molti pseudoscorpioni e nei microtelifonidi.

III. Lo sbocco dei genitali vicino alla base sternale dell'addome ha riscontro probabilissimo nelle campodee (V. capitolo sugli organi genitali).

IV. Sei paia di arti esistono in tutti gli aracnidi artrogastri e negli insetti. Tutti questi arti originariamente erano ambulatori (zampe); e quelli che si trovavano

(1) Posso aggiungere che Haase ha recentemente dimostrato la presenza delle vescicole addominali tanto nei chilopodi quanto nei chilognati.

in vicinanza alla bocca mutarono funzione, si trasformarono cioè più o meno completamente in organi boccali. Sotto questo punto di vista *Koenenia* è la forma la più primitiva. Questa considerazione sulla origine degli arti boccali, toglie di mezzo una grave obbiezione, che a primo aspetto sorgerebbe contro la unione degli artrogastri cogli insetti. Gli embrioni degli aracnidi presentano arti rudimentali all'addome, come i tisanuri e anche come gli embrioni e le larve di molti insetti.

V. Il sistema tracheale delle solpughe, degli pseudoscorpioni ecc., accenna nettamente a quello degli insetti in genere.

VI. Si può ritenere che il sistema nervoso degli insetti in genere trova riscontro in quello degli artrogastri ad addome meno concentrato (scorpione).

VII. Vasi malpighiani si trovano tanto negli aracnidi quanto negli insetti.

VIII. Si trova un vaso dorsale negli aracnidi e nei tisanuri; esiste un vaso sopraspinale in quelli ed una lacuna sopraspinale in questi.

IX. Certi tisanuri (e anche larve di molti insetti) hanno un cerco impari che può paragonarsi alla coda dei telifonidi e dei microtelifonidi.

X. Troviamo antenne in tutti gli insetti: rudimenti probabili di esse nelle solpughe, negli acaridi e nei microtelifonidi.

XI. Scompare quasi totalmente la ramificazione degli arti tanto negli aracnidi, quanto negli insetti (1).

M'è d'uopo aggiungere che il parallelo qui fatto tra i tisanuri e gli artrogastri regge quasi in ogni punto anche tra questi ultimi e i miriapodi; aggiungasi soltanto che il vaso sopraspinale si trova ripetuto nei chilopodi e nei sinfili, e che in questo ultimo gruppo, come anche nei chilognati, anche lo sbocco genitale è in una posizione paragonabile a quella degli aracnidi.

Quanto allo sviluppo, io credo che le divergenze tra gli insetti, i miriapodi e gli aracnidi non siano molto gravi. La concentrazione del blastoderma degli aracnidi trova riscontro negli insetti (ape per es.) e accenna lontanamente all'amnio. Una volta che certi preconcetti teorici (es. l'enorme valore delle due cellule mesodermiche o d'Hatscheck, la capacità delle cellule vitelline a formar tessuti ecc.) saranno scomparsi, si vedrà chiaramente che tracheati e aracnidi si sviluppano in modo molto simile.

Tutti i qui cennati riscontri tra aracnidi e miriapodi sarebbero, secondo Claus, espressione di semplici analogie (2). Il filo degli insetti e dei miriapodi, forse riunito a quello del peripato, sarebbe, secondo l'illustre zoologo di Vienna, separato da quello degli aracnidi, il cui filo si unirebbe invece a quello dei crostacei e dei limuli.

A me pare che Claus in queste sue classificazioni siasi dimostrato troppo carcinologo e troppo poco entomologo.

Il principale motivo su cui egli basa la separazione degli aracnidi dai tracheati, si è, a mio credere, la presenza delle antenne anteriori (omologhe a quelle degli anellidi, come sostiene Hatschek) negli insetti e nei miriapodi, e la loro mancanza negli

(1) È dubbio se le ghiandole della coscia degli aracnidi siano omologhe a certe glandole speciali dell'*Anisomorphus* (Say), di *Phasma* (Scudder) etc. V. Brauer'sche Bericht in Tröschel-Archiv, 1883.

(2) *Lankester's Artikel Limulus an Arachnid* etc. (Arbeiten aus d. Zoolog. Inst. etc. Tom. VII, H.I).

aracnidi e nei pecilopodi. Questo motivo perde molto di valore quando si pensa che abbiamo ragione di credere che in certi aracnidi esistano rudimenti delle antenne (1). In ogni caso è molto più facile ammettere la scomparsa delle antenne che ritenere il sistema tracheale degli aracnidi soltanto convergente con quello degli altri tracheati. Mi pare in ogni modo che le condizioni delle antenne nei varî artropodi debbansi riferire ad un unico processo filogenetico, molto più che i crostacei più primitivi (fillopodi) possono presentar già una o tutt' e due le antenne rudimentali, che la *Koenenia* possiede forse rudimenti d'ambo le antenne e che infine l'embrione dell'insetto può possedere un organo paragonabile all'antenna posteriore dei crostacei.

Mi scusi il lettore se ho portato il discorso sui crostacei. Giacchè ci sono, voglio far rilevare che esistono altri importantissimi rapporti di questi coi Tracheati, rapporti che, se io non erro, sono stati soverchiamente spregiati dal Claus (2). E tra gli altri l'occhio composto, gli arti articolati, le ramificazioni degli arti (v. paragrafo relativo), il dermascheletro, la quasi totale mancanza dei nefridi, l'addome ecc. ecc. Nè soltanto rapporti anatomici; anche quelli ontogenici sono numerosi (es. formazione della catena ganglionare). Io non capisco perciò, come mai si possa tentare di sciogliere, come accennerebbe Claus, il gruppo degli artropodi.

In ogni caso però le simiglianze tra i tisanuri e i crostacei non si devono cercare nella *Zoëa*, come ha fatto Lubbock (e non io, lo ricordo al dott. Haase (3) che mi attribuisce questa opinione) ma bensì nei fillopodi e più specialmente nei brachiopodi. In essi troviamo infatti: I un numero di segmenti superiore or di molto, or di poco a quello dei tisanuri; II la testa talvolta separata dal torace; III i segmenti posteriori senza arti; IV le mandibole senza palpi mascellari; V talvolta due paia di mascelle; VI il secondo paio d'antenne talvolta mancante; VII il sistema vascolare composto d'un lungo vaso dorsale, con molti ostii venosi, senza muscoli aliformi e con sepimento dorsale incompleto; VIII diverticoli al principio dell'intestino medio, muscoli dilatatori, come nei tisanuri, all'intestino posteriore; IX sviluppo della tuba indipendente dall'ovaio ecc.

Ho paragonato i tisanuri, e insieme con essi gl'insetti in genere, ai miriapodi e agli aracnidi e anche ai crostacei. Mi resta il confronto dei tisanuri coi protracheati.

Tanto grandi erano le mie aspettazioni su questo punto, quando cominciai lo studio dei tisanuri, tanto piccoli furono i risultati da me conseguiti.

Non starò a ripetere quanto era già noto in proposito, cioè le somiglianze tra protracheati e tracheati per le antenne, per gli arti non ramificati, per la mancanza del vaso sopraspinale, per lo sbocco dei genitali ecc.

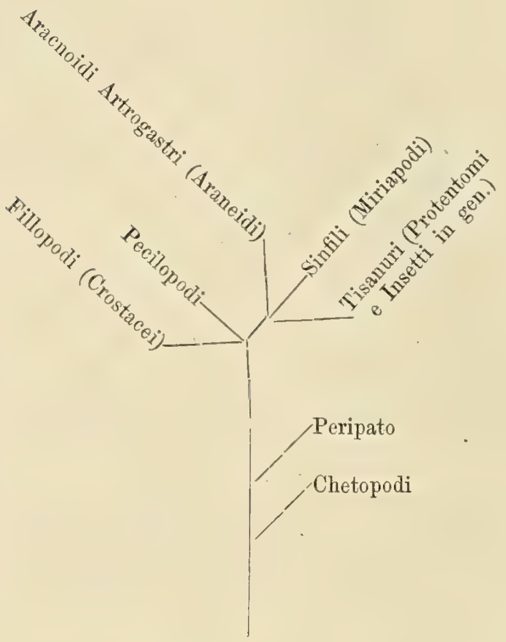
(1) La scomparsa delle antenne è difficile a spiegarsi. Che sia in rapporto con un supposto organo di senso occupante la parte mediana longitudinale della superficie ventrale ?

Un organo di senso in questa posizione esiste nel *Freoricte* (Timm) e nella *Koenenia* (Grassi); in *Peripato* è rudimentale (Kennel). Con esso sarebbe in rapporto la formazione della catena ganglionare dalla riunione di tre pezzi (uno mediano, uno destro e uno sinistro) nei crostacei (tutti ?) e negli insetti. V. anche Kleinenberg op. cit.

(2) Claus, *Untersuch. ü. d. Organ.* ecc. *von Brachipus* etc. (Arb. Wiener Zool. Inst. Tom. VI, III H. Wien, 1886).

(3) Ges. Isis in Dresden 1886, Abt. II.

Noterò invece che l'unico riscontro nuovo e interessante da me scoperto si è la disposizione degli stigmi (V. § relativo). Io la riterrei una convergenza e non un'omologia. Che poi le vescicole segmentali dei tisanuri possano corrispondere alle *glandulae coxales* del *Peripatus* è cosa dubbia. Forse gli arti boccali del peripato in quanto sono nascosti nell'interno della cavità boccale accennano alle condizioni degli entotrofi. Comunque sia le divergenze tra il peripato e i tisanuri sono molto grandi, forse non meno di quelle tra questi e i crostacei.



Nel qui unito schema ho tentato di esprimer le parentele dei varî gruppi di artropodi, quali a me sembrano più probabili nello stato attuale della nostra scienza.

Non posso finire senza accennare a una teoria recentemente messa innanzi dal Schiemkiewitsch (1).

Egli vorrebbe dare grande importanza ai *Pauropus*, che considera come forniti soltanto di due paia d'arti boccali; fisserebbe poi come punto di partenza forme non lontane dal *Peripato* e dal *Pauropus*, amendue con quattro arti boccali (due paia) derivati dalla trasformazione di zampe. Da esse originerebbero: I gli aracnidi (s. lato) che hanno perduto le antenne, gli arti posteriori ecc.; II un gruppo molto prossimo a quello degli aracnidi (s. lat.), cioè i chilognati che hanno due paia di zampe sugli anelli corrispondenti all'addome degli aracnidi; e infine III un gruppo costituito dai chilopodi, dai tisanuri (comprendenti scolopendrella e collemboli) e dagli insetti;

(1) *Les arachnides et leurs affinités*, par Schiemkiewitsch (Archives slaves de Biologie, 15 mars 1886).

in questo ultimo gruppo il terzo paio di zampe si sarebbe trasformato in appendici boccali. Quando io rifletto su questo strano smembramento e successivo accozzamento del gruppo dei tracheati, mi pare d'aver davanti uno scheletro fatto di pezzi appartenenti a specie differenti. Io non voglio discutere la teoria del distinto zoologo russo, ma voglio soltanto chiedergli dove trova il coraggio di distaccare *Pauropus* dai miriapodi per abbassarlo fino a *Peripato*? c'è forse la più lontana ragione, tranne la pretesa ma non dimostrata esistenza di due sole paia d'arti boccali?!

Pauropus è una forma ancora pochissimo nota; da parte mia dopo d'aver confermato quanto aveva scoperto il Lubbock e d'averci aggiunto alcuni nuovi fatti sul tubo digerente e sul sistema nervoso, inclino ad avvicinarlo a Scolopendrella. In ogni modo la probabilità che *Pauropus* costituisca una forma interessante anche fuori del gruppo dei Miriapodi è molto, molto piccola.

§ X. *Se i tisanuri siano insetti degenerati, o neotenici.*

Questo problema è già stato toccato in varî punti di questa Memoria, ed il lettore conosce a quale conclusione io sto per arrivare. E perciò il presente paragrafo non è altro che la risposta ad una obbiezione.

Mi spiego. Molti autori ritengono che i tisanuri siano forme primitive. Di contro a questa opinione ne sta un'altra, secondo la quale essi sarebbero invece Ortotteri degenerati. La prima ha per strenui difensori Brauer, Lubbock, Gegenbaur, Palmen ecc. La seconda, tacitamente ammessa in parecchi libri, è stata sostenuta per es. da Graber (1), da Emery (2), ecc., ma non venne peranco discussa seriamente. Una terza opinione, che può fino ad un certo punto fondersi colla seconda, si è quella che nasce evidente da una Nota di Camerano (3) sulla *neotenia*. Si può cioè ammettere che una volta i tisanuri fossero ortotteri genuini alati: che per un'anticipazione sempre crescente della maturazione sessuale, a poco a poco il periodo d'insetto perfetto, fornito cioè di ali, sia diventato inutile, e siasi soppresso.

Dovremmo perciò l'esistenza dei tisanuri ad un fenomeno di neotenia: essi sarebbero larve sessualmente mature. In fin dei conti perciò, come ognuno capisce di leggeri, si tratterebbe di discesa da un grado di perfezionamento qual'è appunto il possesso delle ali; discuterò perciò ad un tempo la neotenia e la degenerazione.

Espongo anzitutto gli argomenti in favore della primitività dei tisanuri, tenendo sottocchio specialmente gli entotrofi.

I. La cuticula è lievemente sviluppata; gli apodemi sono molto semplici; gli integumenti sono ancora adatti alla respirazione.

(1) *Die Insecten*. München, 1877 (in varî luoghi).

(2) Biolog. Centralblatt, 1886.

(3) Cito alcuni punti della sua Nota (Atti della Soc. entom. di Firenze 1885).

La neotenia consiste nel perdurare nello stato adulto di parte o di tutti i caratteri giovanili e larvali; si allunga quindi il periodo giovanile più o meno; se l'allungamento è molto spinto tanto da concedere all'animale di riprodursi nello stato larvale, si ha la neotenia totale. La neotenia totale si ha in molti casi di insetti nei quali le ali non si sviluppano. Le specie attere di molti ortotteri sono neoteniche.

Io non capisco bene se il Camerano comprende anche i Tisanuri tra le forme neoteniche.

II. Il sistema nervoso della campodea adulta è ancora in intimo rapporto coll'ipoderma. Aggiungasi la semplicità del sistema nervoso viscerale, la mancanza d'un vero simpatico e la disposizione segmentale uniforme della catena ganglionare.

III. Il tubo digerente è similissimo a quello degli embrioni degli altri insetti. Si trovan glandole salivari come nell'embrione dell'ape e di molti altri insetti.

IV. Mancano muscoli aliformi.

V. Testicolo ed ovaio di *Campodea*, e testicolo di *Japyx* sono in condizione semplicissima: l'ovaio di *Japyx* e di *Machilis* consta di tubi disposti in ordine segmentale. L'apparato genitale maschile di *Machilis* richiama forse quello degli scorpioni e quindi anche quello dell'*Apus cancriformis*.

VI. Gli stigmi di *Japyx* e *Campodea* sono molto semplici; le trachee sono senza filo spirale in *Campodea*; restan scarse in generale in tutti i tisanuri; sacchi aerei mancano in tutti (tranne alcune leggerissime dilatazioni in corrispondenza al ventriglio delle lepismide). Trovansi undici paia di stigmi in *Japyx* di cui *quattro paia sono toraciche, perciò gli stigmi di Japyx non sono in giusto ordine segmentale, perciò Japyx lontanamente accenna a Peripato. Le undici paia di stigmi costituiscono l'argomento più importante contro la supposta degenerazione*. Il sistema tracheale di *Japyx*. di *Campodea* e di *Machilis* è molto semplice: in *Campodea* e in *Machilis* mancano affatto le anastomosi tracheali; pochissime ne esistono negli altri tisanuri.

L'embrione di ape passa nel suo sviluppo attraverso un primo stadio in cui rassomiglia pel sistema tracheale a *Campodea* e a *Machilis*, e poi attraverso un secondo in cui rassomiglia abbastanza per lo stesso sistema alle lepismide.

VII. Vi sono vescicole addominali. Le vescicole addominali mancano agli altri insetti; si può dire che sono un carattere miriapodico; si trovano infatti in *Scolopendrella*, in molti chilognati e chilopodi e forse anche in peripato.

VIII. Si notano pseudozampe, ossia zampe rudimentali all'addome.

Le vescicole addominali e le pseudozampe accennano forse ad una primitiva bifidità degli arti, alla condizione cioè dei crostacei.

IX. L'addome di tutti i tisanuri consta di dieci ben distinti segmenti, come quello degli embrioni di gran parte degli insetti alati.

X. Le lamine dorsali, specialmente quelle del torace dei tisanuri superiori, preludiano allo sviluppo delle ali.

XI. Mancano le metamorfosi; anzi in *Campodea* e in *Japyx* verificasi appena una muta parzialissima.

XII. Nella maggior parte degli ordini degli insetti si hanno larve campodeiformi o japigiformi; esse sono probabilmente le larve primitive degli insetti. Ciò è appoggiato dal fatto che per es. l'embrione dell'ape, prima di trasformarsi nel ben noto cacchione senza zampe, passa, così io ho stabilito, uno stadio in cui è campodeiforme.

XIII. Conosciamo pochissime specie di *Japyx* e una sola di *Campodea*; oltre a ciò *Campodea* e *Japyx* hanno una grandissima estensione geografica (Europa, Africa, Asia, America del Nord). Amendue queste condizioni sono di solito proprie di forme primitive; esse indicano una straordinaria costanza, una relativa incapacità a mutare.

Soltanto quest'incapacità poteva preservarle, già da un'epoca remotissima (ricordo in proposito la scoperta recente d'una blatta siluriana).

In complesso anche gli altri tisanuri per la scarsezza della specie e per la corologia si avvicinano agli entotrofi.

XIV. Si ricordi l'ambiente nè troppo secco, nè troppo umido in cui vivono i Tisanuri (sotto le pietre, nell'*humus*, sotto i muschi, nel marciume degli alberi ecc.). Per quest'ambiente hanno dovuto passare tutti gli animali per mutare genere di vita, cioè per trasformarsi da acquatici in terrestri. In quest'ambiente o in un ambiente simile vivono altre forme primitive rispetto agli animali terrestri (*Scolopendrella*, *Pauropus*, *Peripatus*, *Koenenia*, *Oligocheti*).

Queste sono le principali ragioni favorevoli alle primitività. Che cosa si può dire contro di essa? Molte ragioni, che meritano un minuto esame.

L'apparato boccale di *Japyx* e di *Campodea* è in condizioni punto primitive, perchè è entotrofico (in un periodo embrionale è ectotrofico almeno in *Japyx*); come presuppone l'origine degli arti boccali da zampe trasformate, quello ectotrofico è primitivo.

Questa obbiezione la feci io stesso: a me parve che si potesse contrapporre ad una considerazione di Meinert e di Lubbock che valeva come argomento favorevole per la primitività; questi autori avevano infatti ammesso che l'apparato boccale di *Campodea* e di *Japyx* fosse in certo modo indifferente, in quanto che da una differenziazione di esso si potrebbe far derivare tanto quello degli insetti succhiatori, quanto quello degli insetti masticatori.

Dopo miglior esame dei fatti a me sembra che l'opinione di Meinert e di Lubbock sia giustificata. Tutto fa credere che una volta i progenitori di *Campodea* e di *Japyx* vivessero nell'acqua (esistono forse ancora branchie rudimentali in molti tisanuri: V. paragrafo sulle vescicole addominali) come la maggior parte dei crostacei; essi avrebbero avuto un apparato boccale ectotrofico; il quale sarebbe poi man mano diventato entotrofico, quando si verificò l'adattamento all'ambiente attuale in cui vivono *Japyx* e *Campodea* e in cui il nutrimento consta specialmente di tritume vegetale umido; per questo cibo non occorre un apparato boccale ectotrofico, cioè sporgente ed in pericolo perciò di venir guasto!

Con un più perfetto adattamento alla vita aerea e col conseguente cambiamento di nutrimento (invece del tritume, un cibo che vuol essere triturato con un buon apparato masticatore), la condizione ectotrofica embrionale di Japyx per es. si sarebbe non soltanto mantenuta, ma anche esagerata e si sarebbero perciò soppressi gli adattamenti entotrofici. Da ciò le condizioni degli ectotrofi e degli insetti masticatori; un'altra parte d'insetti, invece che a cibo difficilmente masticabile, si sarebbero adattati a succhiare umori vegetali; da ciò una esagerazione dell'apparato entotrofico e la sua trasformazione in apparato succhiatore.

In ogni caso non ci deve far meraviglia di trovare in forme molto differenziate la presenza di qualche carattere primitivo scomparso nelle semplici. E ciò ho già tentato di render plausibile nell'introduzione e in altri punti del presente lavoro.

Ancora colla variazione dell'ambiente io mi spiego la mancanza d'occhi di *Japyx* e di *Campodea*, uno degli argomenti molto in uso per dimostrare la degenerazione

di questi animali. L'ambiente intermedio tra la vita nell'aria libera e la vita nell'acqua rende inutile la vista, perciò i progenitori di *Japyx* e di *Campodea* perdevano gli occhi; questi ricomparvero in quei parenti di *Japyx* e di *Campodea* che successivamente andarono adattandosi alla vita nell'aria libera, diventando cioè Tisanuri superiori. La convergenza li fece riprodurre composti, com'erano in quei loro progenitori acquatici che possedevano occhi.

Ma l'ipotesi della degenerazione può essere sostenuta da un punto di vista molto più ampio, ed allora il confutarla non riesce più cosa di poco momento.

Abbiamo visto che dai tisanuri più bassi si arriva per gradi agli ortotteri. Questo fatto può interpetrarsi in due maniere: o i tisanuri, come ho ammesso io, sono ortotteri semplici, oppure sono ortotteri semplificati, cioè arrestati nel loro sviluppo, e più o meno degenerati. Questa seconda ipotesi ha in suo vantaggio molti argomenti, di cui accenneremo i principali:

I. La condizione masticatoria dell'apparato boccale degli ortotteri.

II. La cecità dei più bassi Tisanuri.

III. La mancanza di tubi malpighiani in *Japyx*.

IV. Il picciol numero di stigmi di *Campodea*.

V. La semplificazione del tubo digerente di *Japyx* e di *Campodea*, la quale sarebbe secondaria al loro speciale apparato boccale.

VI. La segmentazione del corpo e la differenziazione della muscolatura non armonizzanti colla gracilità somma del dermascheletro di *Campodea* e di *Japyx*.

VII. La mancanza delle ali, che corre parallela colla mancanza degli stessi organi in svariati altri ortotteri.

Io non dissimulo la gravità che acquistano questi argomenti specialmente se vengono sommati insieme; la gravità è tale che molte volte mi domandai se non era meglio rinunciare a servirmi dei tisanuri come di face per rischiarare l'organizzazione degli insetti. Dopo lunghissime esitazioni, a poco a poco mi convinsi che questa rinuncia sarebbe ingiusta. Se vediamo infatti un po' più da vicino i sopra esposti argomenti, possiamo trovar modo di indebolirli di molto. Ciò pei primi due ho già dimostrato in questo stesso paragrafo, e perciò sarebbe inutile che io mi ci trattenessi ulteriormente.

Passiamo agli altri. Si ricordi: I che probabilmente esiste un'omodinamia tra i tubi malpighiani e gli stigmi; II che l'*Japyx*, l'unico tisanuro, senza tubi malpighiani, è quello che ha il maggior numero di stigmi; III che la *Campodea* tra i tisanuri ha il *minimum* di stigmi (3 paia) e il *maximum* di tubi malpighiani (circa 16).

Queste considerazioni, a mio parere, tolgono molto valore agli argomenti terzo e quarto.

Contro il quinto osservo che l'ectotrofia non implica di necessità un intestino più differenziato di quello di *Japyx* e di *Campodea*, prova ne sono *Nicoletia* e *Lepismina*; se noi siamo perciò autorizzati a credere che una volta l'apparato boccale degli entotrofi fosse ectotrofico, non lo siamo però a ritenere che anche il loro intestino fosse complicato come negli ortotteri, in *Lepisma* ecc.

Un ragionamento basato sul cambiamento dell'ambiente, come quello da me fatto per l'apparato boccale e per gli occhi, toglie di mezzo l'argomento sesto.

Il settimo è molto più serio, anzi è il più serio di tutti. Gli si possono però contrapporre le seguenti osservazioni.

Non esiste nei tisanuri alcun particolare, il quale ci faccia supporre ch'essi abbiano mai avuto ali.

Sventuratamente gli ortotteri genuini sforniti di ali non sono stati ben studiati, e però non si può dire se abbiano, o no avuto ali. Forse si arriverà a dimostrare che alcuni le hanno avute, e questi si dovranno lasciare nel posto che attualmente occupano, e che altri non le hanno mai avute, ed allora si troverà fors'anche che questi ultimi possiedono altri caratteri speciali, per cui non si possono accozzare con forme alate, più o meno a loro simili nell'aspetto esterno.

Non mi dissimulo il dualismo che così si viene a far nascere tra gli ortotteri non alati, cioè alcuni avrebbero primitivamente avuto ali e poi le avrebbero perdute, altri invece non le avrebbero mai avute. Ciò può sembrare poco verosimile a primo aspetto, ma assurdo a me non sembra, tanto più quando considero l'instabilità di tutti gli organi, per quanto nobili, nelle forme in cui essi compaiono per la prima volta: li vediamo infatti con enorme facilità ridursi e fin scomparire per poi alle volte ricomparire forse in virtù dell'idioplasma, per *convergenza.*

Tutto sommato, dando il dovuto valore alla semplicità di tutti gli apparati organici, tenendo calcolo della mancanza di organi rudimentali accennanti a degenerazione, *credo giustificata l'ipotesi che il tisauro sia l'insetto più primitivo che noi finora conosciamo.*

AGGIUNTE

I. APPUNTI BIBLIOGRAFICI.

B. Grassi, *I progenitori dei miriapodi e degli insetti.* Memoria I e II, *L'Japyx e la Campodea* (Atti Accad. Gioenia, Catania, s. 3ª, vol. XIX, 1886). — Memoria III, *Contribuzione allo studio dell'anatomia del gen. Machilis* (Atti Accad. Gioenia, Catania, s. 3ª, vol. XIX, 1886). — Memoria IV, *Morfologia delle scolopendrelle* (Memorie Accad. scienze, Torino, 1886). — Memoria V, *Cenni anatomici sul gen. Nicoletia* (Boll. Soc. Entom., Firenze, 1886). — Memoria VI, *Intorno ad un nuovo aracnide artrogastro* (Boll. Soc. Entom., Firenze, 1886). — Nota preliminare, *Altre ricerche sui tisanuri* (Boll. Soc. Entom., Firenze, 1887).

NB. Le prime sei Memorie vennero messe in commercio da Friedländer u. Sohn nel giugno 1886. Le copie a parte della Nota preliminare qui citata uscirono nel novembre 1886: il ms. (come rilevasi da un NB. apposto dal dottor Cavanna alla stessa Nota) era stato presentato nel mese di settembre.

Nelle sei Memorie qui citate si trova riportata minutamente la bibliografia che riguarda i tisanuri. Riassumendo questa bibliografia, si può dire che prima delle mie ricerche, il campo era quasi del tutto incolto. E infatti:

I. Di *Japyx* e di *Campodea* conoscevamo appena i principali caratteri sistematici con qualche brevissimo ed imperfetto cenno anatomico (Meinert etc.), tranne per l'apparato respiratorio esattamente descritto da Palmen;

II. Di *Machilis* possedevamo appena scarse notizie sistematiche (Wood-Mason, 1879 etc.), mancava qualunque cognizione anatomica, eccezion fatta per l'apparato genitale maschile che era stato accuratamente descritto da Meinert, il quale avea studiato, inesattamente però, anche l'apparato femminile: è vero che Palmen aveva fornito alcuni cenni sull'apparato respiratorio, ma pur troppo essi erano del tutto erronei, tanto da lasciare il sospetto che quest'egregio autore avesse esaminato un animale che non era un *Machilis*;

III. Di *Lepismina* e di *Nicoletia* non avevamo neppure le più indispensabili cognizioni sistematiche;

IV. Quanto a *Lepisma* disponevamo appena di sommarie nozioni sistematiche e di imperfetti cenni anatomici sparsi in molti libri d'entomologia e parzialmente riassunti nell'opera del Lubbock sui collemboli e sui tisanuri.

Durante i quattro anni da me dedicati ai tisanuri, altri si occupò di questo stesso argomento ed in proposito videro la luce i seguenti lavori:

I. Schneider, *Die Entwick. d. Geschlechtsorgane d. Insecten* (Zool. Beiträge I, 3). — L'autore conferma le mie osservazioni sui genitali di *Campodea* (*Intorno all'anatomia di Japyx e di Campodea.* Nota preliminare. Naturalista siciliano, anno III, 1884). Vi aggiunge alcuni particolari istiologici: rende nota anche la struttura degli ovarioli di *Machilis* e di *Lepisma* etc.

II. Nassanow, in Biol. Centralblatt n. 15, VI. Bd., ottobre 1886. L'autore comunica in forma di Nota preliminare alcune sue ricerche su *Campodea* e *Lepisma* e ne induce gravi conclusioni morfologiche. Di quel che l'autore scrive su *Campodea* reclamo la priorità (1884); alcune piccole divergenze dipendono, a mio parere, da insufficienza delle di lui osservazioni. Invece delle ricerche riguardanti i genitali e le ghiandole salivari delle *Lepisme* spetta al Nassanow la priorità perchè vennero rese di pubblica ragione un mese prima delle mie, che erano però già state consegnate per la stampa press'a poco contemporaneamente alle sue e che inoltre erano molto più complete. Le considerazioni generali del Nassanow sui tisanuri non sono sufficientemente serie, perchè basate soltanto su *Campodea* e su *Lepisma*, forme che dai miei studî risultano rappresentanti gli estremi della

erie e cioè il più semplice e il più complesso tisanuro: parecchie conclusioni del zoologo russo non hanno neppur bisogno di esser confutate una volta che si tengano presenti tutti i tisanuri.

Recentemente è uscito in russo il lavoro esteso di Nassanow, ma, per quante preghiere rivolgessi all'egregio autore a cui spedii copia delle mie pubblicazioni sullo stesso argomento, non sono riuscito a procurarmelo.

III. Haase, *Die Vorfahren der Insecten* (Ges. Isis in Dresden 1886, Abth. II). — I punti principali sono citati nella presente Memoria (v. § sulle pseudozampe e sulle vescicole addominali).

IV. Oudemanns, *Bijdrage tot de Kennis der Thysanura a. Collembola.* Amsterdam, 1887, (uscito nel mese di ottobre 1887). — Contiene l'anatomia di *Machilis.* L'autore ignora affatto la mia Memoria uscita quindici mesi prima. Il curioso si è che egli conosce ed anzi cita minutamente la mia Memoria su *Nicoletia,* e quest'ultima è uscita dopo di quella su *Machilis* e, com'è troppo naturale, la richiama in molti luoghi con la debita citazione. Ne' punti principali le mie osservazioni coincidono con quelle dell'Oudemanns, e perciò ne reclamo la priorità, specialmente pel fatto della mancante anastomosi dell'apparato respiratorio, ciò che è il precipuo risultato della mia semplice *Contribuzione allo studio dell'anatomia del Machilis* e della Monografia di Oudemanns. Del resto quest'autore ha fatto conoscere molti nuovi particolari. Non mancano alcuni punti secondari di discordanza, su cui mi riserbo pronunciarmi in apposito lavoro: intanto insisto sull'esistenza del ganglio frontale, dei gangli viscerali pari e sui rapporti delle squamme colle cellule dell'ipoderma (almeno essi sono evidenti quando l'animale è prossimo alla muta). Per quel che si riferisce agli ocelli rimando il lettore alla seguente aggiunta.

V. Rovelli, *Alcune ricerche sul tubo digerente degli atteri, ortotteri e pseudoneurotteri.* Como, 1884. — Il Rovelli, che aveva studiato il tubo digerente degli ortotteri e degli pseudoneurotteri, per mio consiglio, estese le ricerche anche a *Machilis* e a *Termophila,* e scoprì in queste forme l'esistenza delle borse ventricolari; egli esaminò anche parecchie specie di *Lepisma* e *Lepismina* (v. la presente Memoria), ma non ne ha ancora pubblicati i risultati.

VI. Schneider, *U. d. Darmkanal d. Arthropoden* in Zool. Beit. Bd. II, H. I, 1887. — Sono molto dolente di non poter associarmi alle originalissime vedute dello Schneider: voglio specialmente notare che ho esaminato e riesaminato i miei preparati sui tisanuri, ma non ho potuto persuadermi dell'esistenza dell'imbuto chitinoso nell'intestino medio. Spero di ritornar presto sull'argomento.

II. GLI OCELLI DEL MACHILIS.

Oudemanns crede che le tre macchie pimmentate che riscontransi al davanti degli occhi composti siano *ocelli* (*stemmata*), ma egli però non è riuscito a dimostrarvi la presenza dei bastoncini caratteristici della retina. Io ho intanto avuto occasione di ristudiare questi organi e di provare non appena che sono veramente ocelli, ma che presentano anche una struttura di grande interesse morfologico.

Premesso che, come ho già cennato, sono in numero di tre, cioè due pari (uno al davanti d'un occhio composto e l'altro al davanti dell'altro, ciascuno a forma di biscotto disposto in senso trasversale rispetto all'asse maggiore dell'animale) e uno impari (tondeggiante e collocato sulla linea mediana al davanti dei due pari, con cui perciò forma triangolo, come in molti altri insetti), ne darò una sommaria descrizione.

Il carattere più notevole si è la presenza di rabdomi [1] formati dalla riunione di quattro rabdomeri; precisando, i quattro rabdomeri sono piuttosto appiattiti e disposti in modo che su un taglio trasversale ne nasce una croce: ogni sezione trasversa d'un rabdomero rappresenta un braccio della croce: nel punto in cui le quattro braccia si toccano per formare la croce, i rabdomeri sono fusi insieme. I rabdomi all'indietro si prolungano, come in *Lepisma,* in sottili filamenti che li riuniscono probabilmente alle fibre nervose e che giacciono in mezzo ad abbondante pimmento. I rabdomi sono circondati da cellule retiniche, le quali sono fornite di pimmento ed hanno il nucleo verso la loro parte anteriore: questi nuclei sono però disposti in modo che formano uno strato al davanti di quello dei rabdomi, coi quali sui tagli longitudinali appaiono alterni. I confini delle cellule retiniche

(1) Questi rabdomi hanno una certa simiglianza con quelli dell'occhio composto di *Lepisma* e di *Porcellio.*

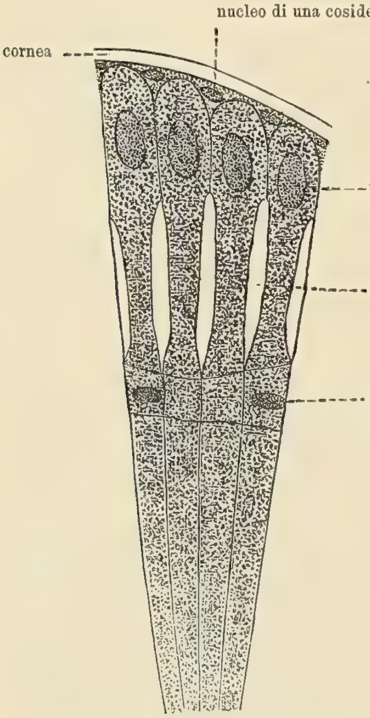
tra di loro a livello dei rabdomi, almeno nei miei preparati, non sono sempre ben rilevabili, sicchè se non ci fossero i rabdomi, non si potrebbe facilmente parlare di retinule (lo stesso verificasi per gli occhi composti dello stesso *Machilis*). Al di dietro dello strato dei rabdomi notansi dei nuclei disposti trasversalmente e appartenenti a cellule pimmentate. Al davanti delle cellule retiniche notasi uno strato di cellule appiattite; se si paragona l'ocello in discorso agli ocelli degli altri artropodi, queste cellule rappresentano le cellule così dette del vitreo; se si paragona invece ad un occhio composto, esse debbono forse denominarsi cellule dei coni cristallini; io credo conforme al vero la prima denominazione. Al davanti dello strato di cellule appiattite trovasi un sottil strato cuticulare (cornea) che delimita la superficie libera dell'ocello: queta cornea è poco convessa e punto facettata.

Ho in questa brevissima descrizione adottato la nomenclatura ed i concetti del Grenacher, tranne per la terminazione prossimale dei rabdomi. Com'è noto, le idee dell'autore tedesco vengono oggigiorno aspramente combattute specialmente dal Patten (Mittheil. a. Zool. Stat. von Neapel 1885): io mi trovo incompetente a decidere sul valore delle grandi novità messe innanzi da quest'autore americano, soltanto inclino a concedergli che le fibre nervose terminano nei rabdomi (scoperta che però essenzialmente spetterebbe al nostro Ciaccio). Seguendo Patten, nel *Machilis* le cellule così dette del vitreo si dovrebbero ascrivere all'ipoderma corneale: a quest'ipoderma sottosterebbe l'ipoderma ommateale rappresentato essenzialmente dalle retinofore (cellule retiniche) e dai rabdomi.

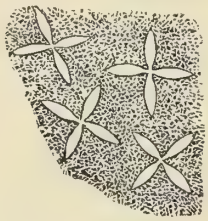
Si segua l'uno o l'altro autore, a me importa far rilevare che gli ocelli di *Machilis* sono un *unicum* in tutti gli insetti, almeno per quanto finora è noto. Evidentemente essi tendono ad acquistare i caratteri degli occhi composti: per farli diventare composti basterebbe essenzialmente che la cornea diventasse faccettata. *I rabdomi, la caratteristica essenziale degli organi composti, sono presenti.*

Gli ocelli di *Machilis* trovan riscontro negli occhi mediani dello scorpione, con alcune differenze però date da ciò, che in questi la lente è ben sviluppata, che le cellule del vitreo sono cilindriche, che i rabdomeri sono cinque, che oltre ai rabdomi esistono delle pheosphaerae, che i rabdomi hanno rispetto ai nuclei posizione differente, ecc. Anche gli ocelli dei falangidi presentano condizioni simili, se ho ben inteso la descrizione preliminare di Patten (Journal of Morphology edited by Whitmann. Boston, 1887, vol. I, september 1887, n. I, p. 221-222).

Di fronte alle incertezze che oggi dominano sull'interpretazione dell'occhio degli insetti resta difficilissimo di azzardare un apprezzamento sugli ocelli del *Machilis*. Certo è che essi dovranno esser tenuti presenti da chiunque vorrà occuparsi dell'argomento. Probabilmente essi serviranno per appoggiare il concetto di Lankester e di Patten che gli occhi composti sono derivati dagli occhi semplici per un perfezionamento, e non equivalgono ad una somma di occhi semplici. In ogni caso essi servono a me per confermare che i Tisanuri non sono insetti degenerati e permettono fors'anche di comprendere in un concetto unico ocelli e occhi composti degli insetti.



Sezione longitudinale di un ocello di Machilis


Sezione trasversale di un ocello di Machilis a livello dei rabdomi

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

Fig. 1. Una squamma colla relativa cellula formatrice.

„ 2 *a* e *b*. Due sterni di Machilis.

„ 3. Muscolatura dorsale (metà destra) del 4° segmento addominale della Campodea: è veduta dal lato dorsale.

„ 4. Id. id. ventrale.

„ 5. Id. lateral ventrale, veduta però dall'interno.

„ 6. Id. fig. 3ª di *Japyx solifugus* var. *Magna*.

„ 7. Id. fig. 4ª, pur di *Japyx solifugus* var. *Magna*.

„ 8. Muscolatura d'un segmento medio dell'addome veduta dal lato ventrale, in Machilis: a sinistra sono rappresentati appena i muscoli superficiali, a destra appena i profondi. A sinistra si vede bene la parte dorsale del muscolo dorsoventrale esterno, a destra quella del muscolo dorsoventrale interno.

„ 9. Parte ventrale della muscolatura del 2° e 3° segmento toracico, veduta dalla superficie dorsale, in *Japyx solifugus* var. *Magna*: il muscolo *r* esiste anche al 1° segmento e fors'anche al 2°.

„ 10. Muscolatura lateral dorsale del 1° e del 2° segmento toracico veduta dall'interno, in Campodea.

„ 11. Alcuni muscoli dorsali di tre segmenti medî dell'addome in *Thermophila furnorum*.

„ 12. Muscolatura ventrale del 4° e 5° segmento addominale, veduta dal dorso (la catena ganglionare è alquanto spostata), in *Thermophila furnorum*.

„ 13. Sezione trasversale (schematica) del 4° segmento addominale di Machilis.

„ 14. Una coscia di Machilis col relativo apodema.

„ 15 e 16. Sistema tracheale della Campodea; nella fig. 15ª è veduto dal lato ventrale, nella fig. 16ª dal dorsale.

„ 17 e 18. Id. di *Japyx* (17ª ventrale, 18ª dorsale). Nella 17ª il 2° ed 4° stigma sono segnati molto schematicamente.

„ 19. Id. *Japyx Isabellae* (porzione toracica, veduta ventrale).

„ 20, 21, 22. Id. Machilis (20ª ventrale, 21ª dorsale, 22ª laterale dorsale). Nella 20ª sono segnati molto schematicamente i rami che vanno al dorso (*a*).

„ 23 e 24. Id. Nicoletia (23ª ventrale, 24ª dor.ale).

„ 25. Cervello di Japyx veduto dal dorso.

„ 26. Id. di Lepismina.

„ 27. Id. di Lepisma.

„ 28. Sistema nervoso di Japyx (schematico).

„ 29. Catena ganglionare di Campodea.

„ 30. *b*. Due gangli della catena ganglionare di Japyx. Fig. 30. *a*. Tre ultimi gangli della catena di Lepisma.

„ 31. Tubo digerente di Campodea.

„ 32. Id. id. di Japyx.

„ 33. Id. id. di Machilis (borse ventricolari molto schematiche).

„ 34. Id. id. di Nicoletia.

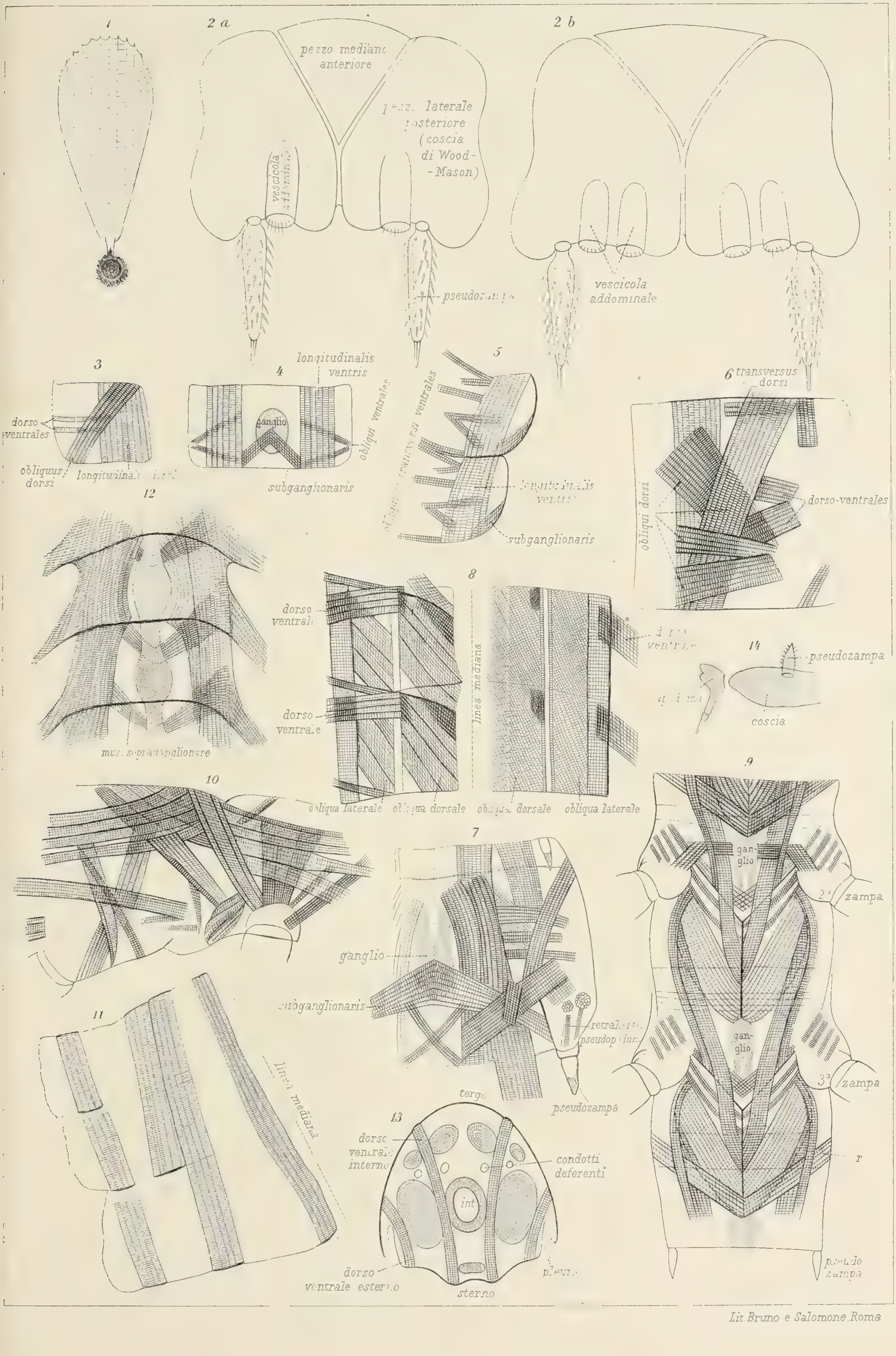
„ 35. Id. id. di Lepisma (Il ventriglio è segnato troppo largo).

„ 36. Sezione trasversa della parte posteriore dell'esofago di Nicoletia.

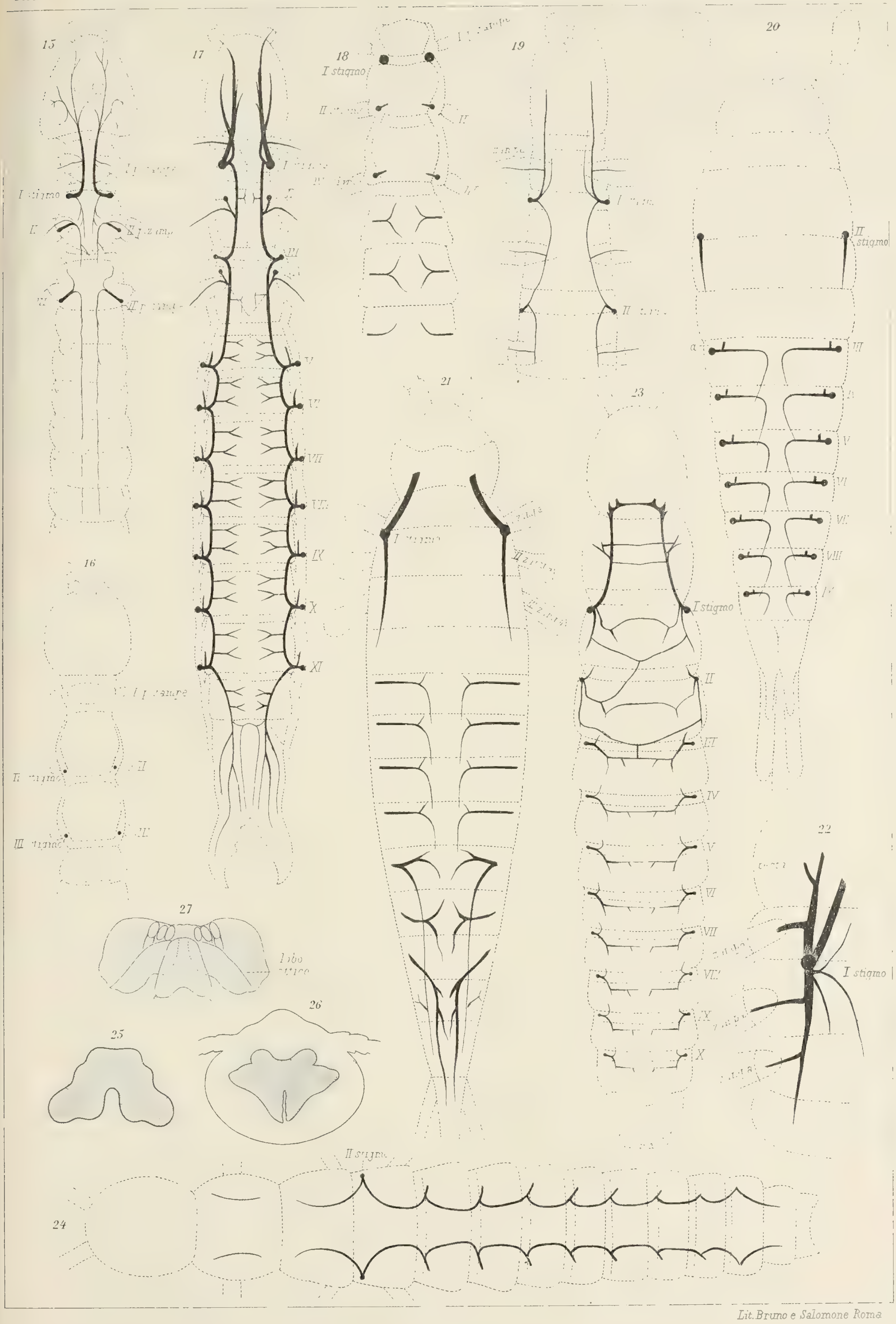
Fig. 37. Strato epiteliale colle relative cripte (quando esistono) dell'intestino medio dei tisanuri.

a = Sezione verticale = Campodea.
b' = Id. id. = Machilis.
b'' = Id. orizzontale = "
c = Id. verticale = Thermophila.
d = Id. id = Lepismina.

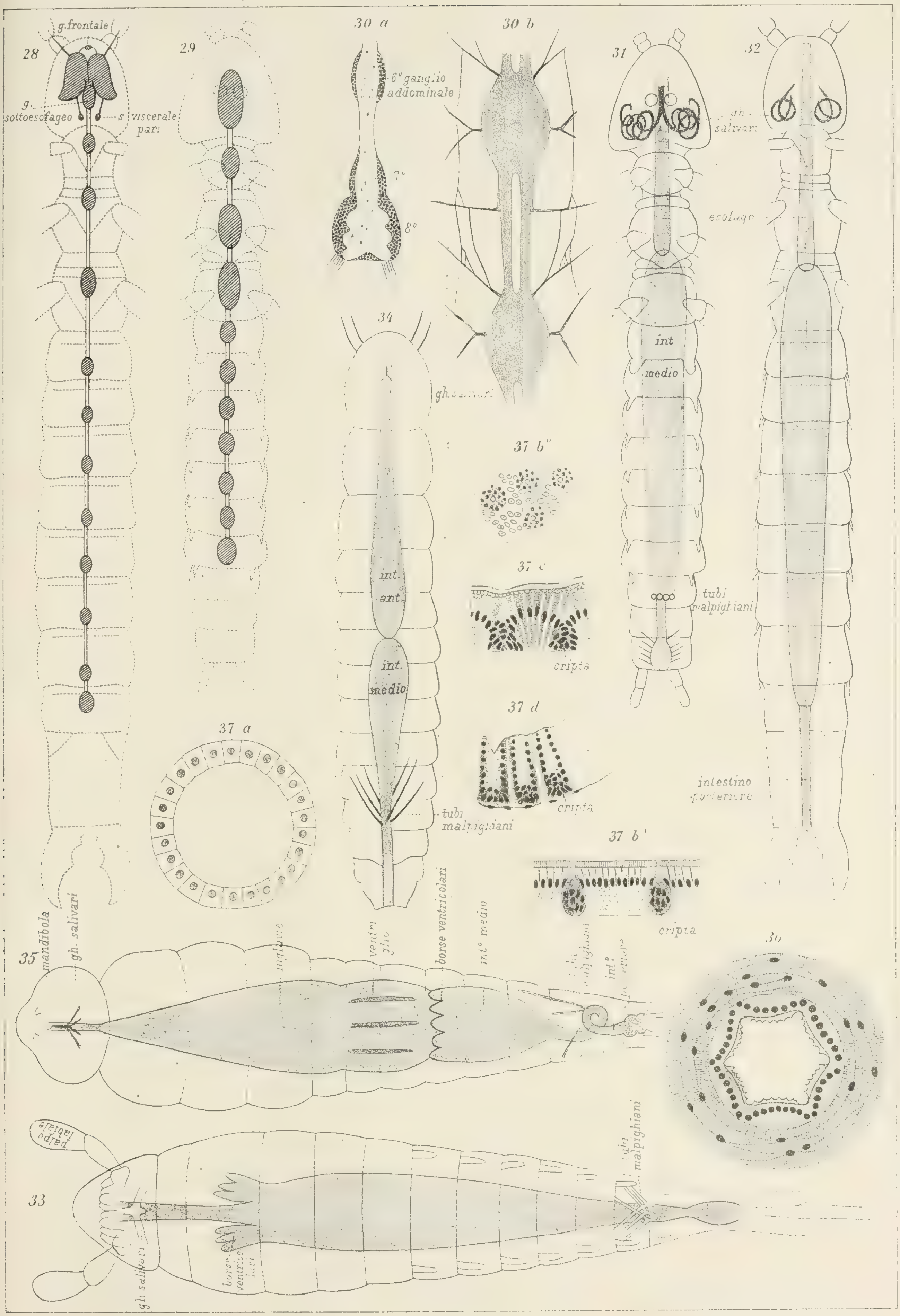
" 38. Vaso dorsale di Japyx.
" 39. Genitali maschili interni di Campodea.
" 40. Id. id. id. di Japyx.
" 41. Id. id. id. di Lepisma.
" 42. Id. id. id. di Machilis.
" 43. Genitali femminili interni di Campodea.
" 44. Id. id. id. di Japyx giovane.
" 45. Id. id. id. di Lepisma giovane.
" 46. Genitali maschili esterni di Campodea.
" 47. Id. id. id. di Japyx.
" 48. Id. id. id. di Machilis.
" 49. Id. id. id. di Nicoletia.
" 50. Genitali femminili esterni di Campodea.
" 51. Id. id. id. di Machilis giovane: gli ovopositori sono ancora molto corti.
" 52. Id, id. id. di Japyx.
" 53. Id. id. id. di Lepisma.
" 54. Ghiandole sebacee sotto agli ovopositori di Lepisma.
" 55. Genitali femminili esterni di Nicoletia.
" 56. Prima sternite addominale. Campodea ♀
" 57. Id. id. id. id. ♂
" 58. Margine posteriore della prima sternite addominale. Japyx.
" 59. Contorni d'una sezione trasversale del secondo anello toracico. Lepismina.
" 60. Porzione dell'addome di Campodea, per mostrare le pseudozampe e le relative vescicole addominali.
" 61. Una vescicola addominale di Campodea.
" 62. Varie posizioni *a*, *b*, *c*, *d* che assume la vescicola addominale. *a* sporgente totalmente, *d* totalmente retratta.
" 63. Porzione prossimale d'un'antenna di Nicoletia Maggi.
" 64, 65 e 66. Apparato boccale di Japyx. In fig. 64 sono oscure le parti sporgenti nella cavità boccale. In fig. 65 viene rappresentata la mascella. In fig. 66 viene rappresentato il labbro inferiore.
" 67. Labbro inferiore di Lepisma.
" 68. Id. id. di Machilis.



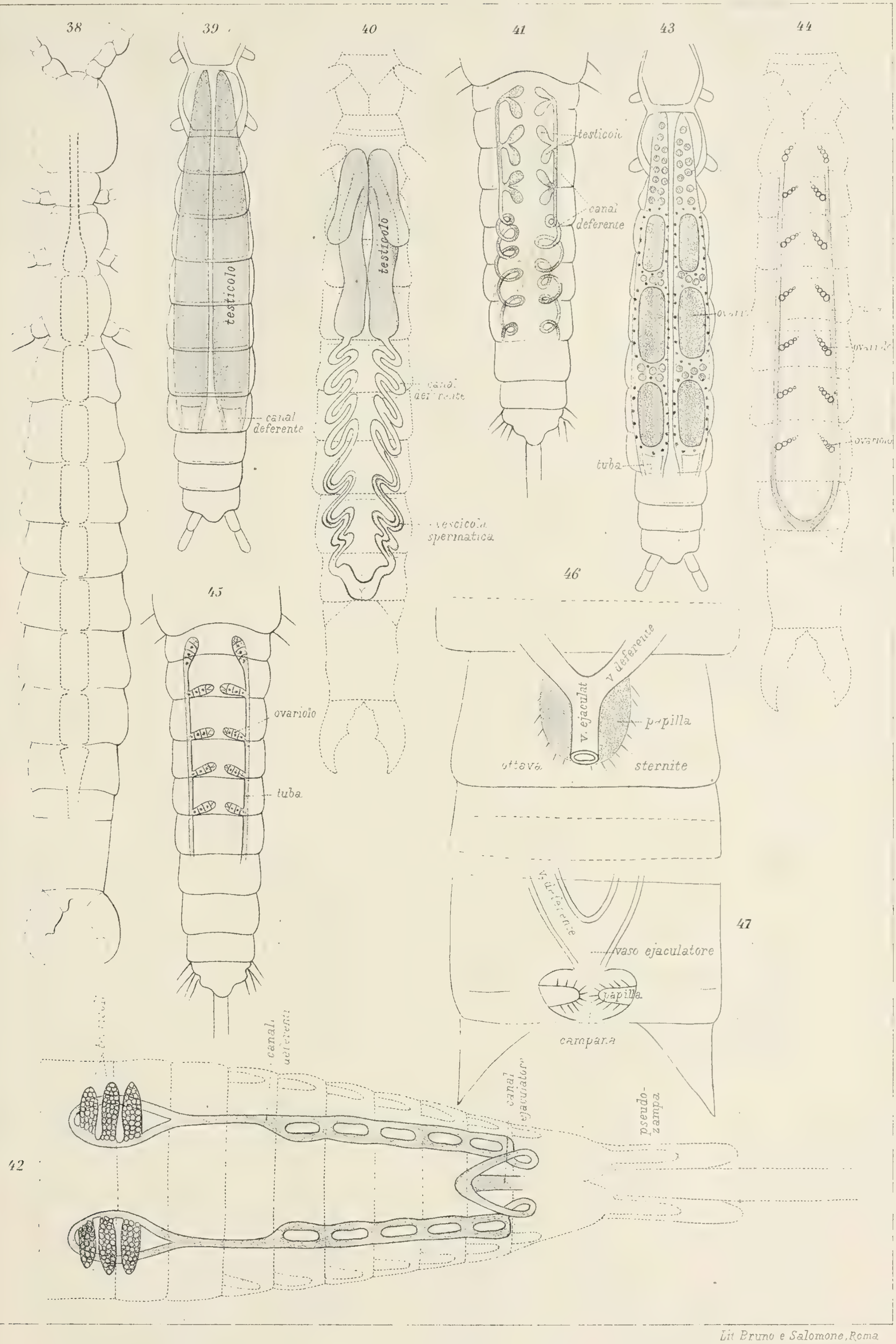
Lit. Bruno e Salomone, Roma



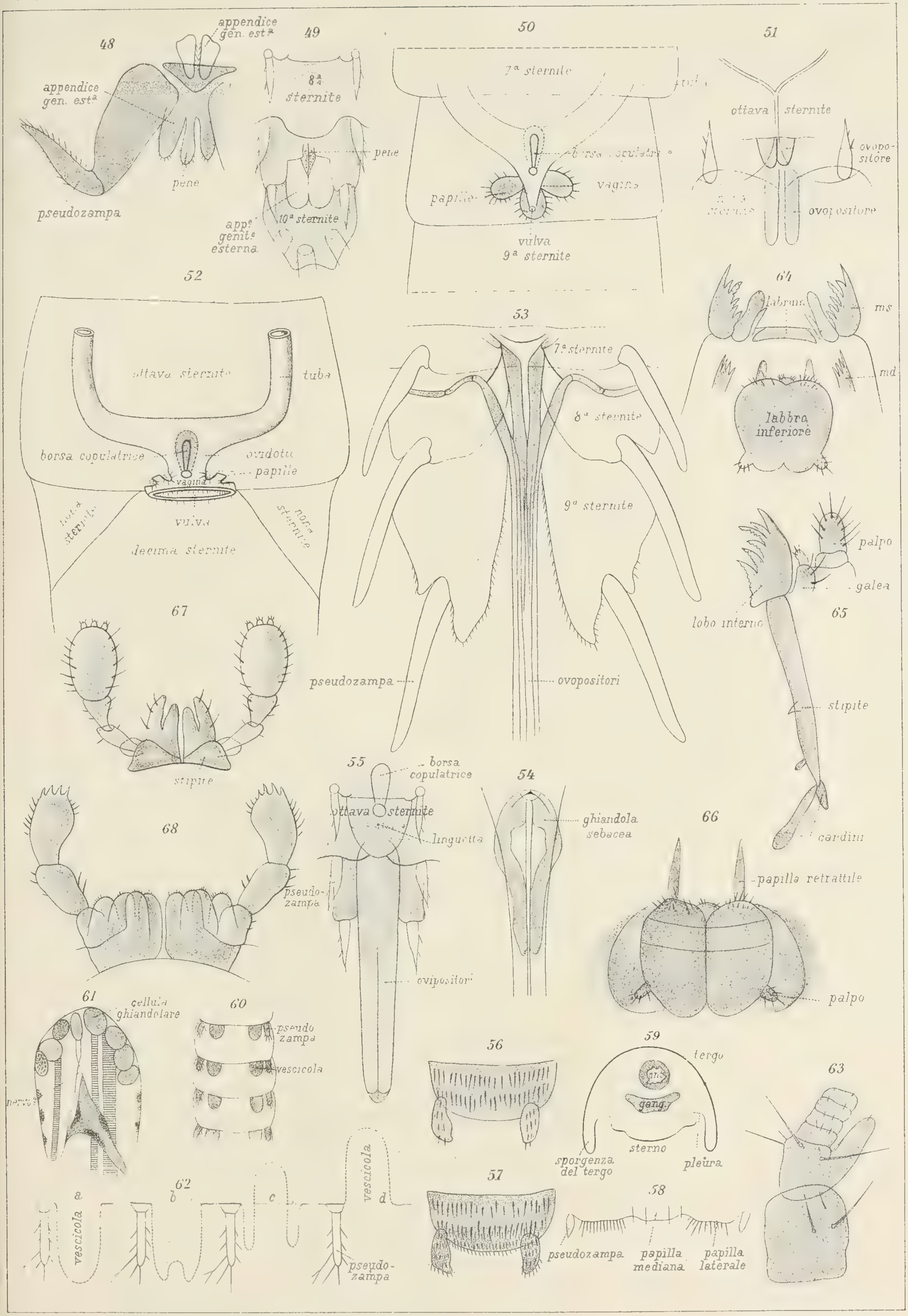
Lit. Bruno e Salomone Roma



Lit. Bruno e Salomone, Roma



Lit Bruno e Salomone, Roma



Lit. Bruno e Salomone, Roma

Sopra alcuni invarianti simultanei di due forme binarie degli ordini 5 e 4, e sul risultante di esse.

Memoria del Corr. ENRICO D'OVIDIO

letta nella seduta del 5 febbraio 1888.

Il numero degl'invarianti e covarianti fondamentali di una o più forme binarie cresce assai rapidamente all'elevarsi dell'ordine di ciascuna forma, e non meno rapidamente si accumulano le difficoltà che presenta il calcolo degl'invarianti e covarianti medesimi. Ciò spiega come non siano stati ancora stabiliti i sistemi completi simultanei di due forme, una almeno delle quali sia di ordine superiore al 4°.

Il presente scritto reca qualche contribuzione al sistema simultaneo di due forme, una del 5° ordine e l'altra del 4°; e precisamente ha per oggetto: di assegnare quegl'invarianti fondamentali che son di gradi non superiori a 4 e 5 rispettivamente nei coefficienti delle due forme, e di esprimere mediante essi il risultante delle due forme.

In conseguenza questo lavoro ha stretto legame con la mia *Nota sulle forme binarie del 5° ordine* (Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino, vol. XV, 1880) e con la Memoria *Sopra alcuni invarianti di due forme binarie degli ordini 5 e 2, o 5 e 3, e in particolare sul risultante di esse* (Memorie della Società Italiana delle Scienze, detta dei XL, tomo IV, 1881) ».

I.

Sia data una forma binaria del 5° ordine

$$f \equiv a_0 x_1^5 + 5a_1 x_1^4 x_2 + 10 a_2 x_1^3 x_2^2 + 10 a_3 x_1^2 x_2^3 + 5 a_4 x_1 x_2^4 + a_5 x_2^5 \equiv a_x^5 \equiv b_x^5 \equiv \cdots$$

Conservando le notazioni adottate nei due citati lavori, consideriamo alcuni dei suoi covarianti e invarianti fondamentali, cioè:

$$\begin{aligned} &i \equiv i_x^2 \equiv (ab)^4 a_x b_x \;,\; j \equiv j_x^3 \equiv -(ai)^2 a_x^3 \;,\; \mathrm{H} \equiv \mathrm{H}_x^6 \equiv (ab)^2 a_x^3 b_x^3, \\ &k \equiv k_x^4 \equiv (i\mathrm{H})^2 \mathrm{H}_x^4 \;,\; l \equiv l_x^5 \equiv (ia)\, i_x a_x^4, \; m \equiv m_x^6 \equiv (i\mathrm{H})\, i_x \mathrm{H}_x^5 \;, \\ &\mathrm{T} \equiv \mathrm{T}_x^9 \equiv (a\mathrm{H}) a_x^4 \mathrm{H}_x^5, \; \mathrm{A} \equiv (ii')^2 \equiv (ab)^4 (cd)^4 (ac)(bd). \end{aligned}$$

Ed osserviamo che, fra i covarianti di questa forma, quelli di ordine pari (inclusi gl'invarianti) e di grado non superiore al 5°, sono i seguenti:

di 2° grado i, H, f^2;

» 4° » A, i^2, k, m, fj, iH, fl, H^2, $f^2 i$, fT, f^2H, f^4.

Sia data inoltre una forma binaria del 4° ordine

$$\varphi \equiv \alpha_0 x_1^4 + 4\alpha_1 x_1^3 x_2 + 6\alpha_2 x_1^2 x_2^2 + 4\alpha_3 x_2 x_2^3 + \alpha_4 x_2^4 \equiv \alpha_x^4 \equiv \beta_x^4 \equiv \cdots,$$

coi suoi covarianti e invarianti fondamentali

$$\chi \equiv \chi_x^4 \equiv (\alpha\beta)^2 \alpha_x^2 \beta_x^2, \quad \theta \equiv \theta_x^6 \equiv (\alpha\chi)\alpha_x^3 \chi_x^3, \quad \iota \equiv (\alpha\beta)^4, \quad \eta \equiv (\alpha\chi)^4.$$

I covarianti di questa forma sono tutti di ordine pari, e quelli di grado non superiore al 5° sono i seguenti (inclusi gl'invarianti):

di 1° grado φ;
" 2° " ι, χ, φ^2;
" 3° " $\eta, \theta, \varphi\chi, \varphi^3$;
" 4° " $\iota^2, \chi^2, \varphi\theta, \varphi^2\chi, \varphi^4$;
" 5° " $\iota\eta, \chi\theta, \varphi\chi^2, \varphi^2\theta, \varphi^3\chi, \varphi^5$.

Fra gl' invarianti simultanei fondamentali delle due forme proposte f e φ, quelli di gradi non superiori a 5 e 5 (rispettivamente nei coefficienti delle due forme) si dovranno dunque trovare fra le *spinte* (*Ueberschiebungen*) dei notati covarianti di f sui notati covarianti di φ. Otteniamo così (oltre A, ι, η, ι^2, $\iota\eta$):

nessuno invariante di grado dispari nei coefficienti della f, e nessuno dei gradi 2 e 1, o 2 e 2;

uno invariante dei gradi 2 e 3, cioè $(\mathrm{H}, \theta)_6$; uno dei gradi 2 e 4, cioè $(f^2, \varphi\theta)_{10}$; uno dei gradi 2 e 5, cioè $(f^2, \chi\theta)_{10}$;

due invarianti dei gradi 4 e 1, cioè $(i^2,\varphi)_4$, $(k,\varphi)_4$;

quattro invarianti dei gradi 4 e 2, cioè $(i^2,\chi)_4$, $(k,\chi)_4$, $(fj,\varphi^2)_8$, $(i\mathrm{H},\varphi^2)_8$;

cinque invarianti dei gradi 4 e 3, cioè $(\mathrm{H}^2,\varphi^3)_{12}$, $(m,\theta)_6$, $(fj,\varphi\chi)_8$, $(i\mathrm{H},\varphi\chi)_8$, $(f^2 i,\varphi^3)_{12}$;

sei invarianti dei gradi 4 e 4, cioè $(fj, \chi^2)_8$, $(i\mathrm{H}, \chi^2)_8$, $(fl, \varphi\theta)_{10}$, $(\mathrm{H}^2, \varphi^2\chi)_{12}$, $(f^2 i, \varphi^3)_{12}$, $(f^2\mathrm{H}, \varphi^4)_{16}$;

sei invarianti dei gradi 4 e 5, cioè $(fl,\chi\theta)_{20}$, $(\mathrm{H}^2,\varphi\chi^2)_{12}$, $(f^2 i,\varphi\chi^2)_{12}$, $(f\mathrm{T},\varphi^2\theta)_{14}$, $(f^2\mathrm{H},\varphi^3\chi)_{16}$, $(f^4,\varphi^5)_{20}$.

Bisognerà ora indagare quali fra questi invarianti siano *fondamentali*, vale a dire: non esprimibili come funzioni algebriche razionali intere di altri degli stessi loro gradi e di gradi inferiori, inclusi A, ι, η.

Ma all'uopo sarà bene anzitutto ricordare alcune note identità, ed altre stabilirne di cui avremo a far uso.

II.

Relativamente alla forma del 4° ordine φ, son note le seguenti identità (1):

$$\chi_x^2 \chi_y^2 = (\alpha\beta)^2 \alpha_x^2 \beta_y^2 - \tfrac{1}{3}\iota.(xy)^2,$$

$$(\alpha\chi)^2 \alpha_x^2 \chi_x^2 = \tfrac{1}{6}\iota\varphi, \quad (\alpha\chi^2)\alpha_x^2 \chi_y^2 = (\alpha\chi)^2 \alpha_y^2 \chi_x^2 = \tfrac{1}{6}\iota.\alpha_x^2 \alpha_y^2 + \tfrac{1}{3}\eta\iota.(xy)^2,$$

$$(\alpha\chi)^3 \alpha_x \chi_x = 0, \quad (\alpha\theta)^2 \alpha_x^2 \theta_x^4 = 0, \quad (\alpha\theta)^4 \theta_x^2 = 0;$$

(1) Cfr. Clebsch « *Bin. Form.* »; d'Ovidio « *Estensione di alcuni teoremi sulle forme binarie* » (Atti dell'Acc. di Torino, v. XIV).

e indicando con $\varDelta$ l'operazione $\dfrac{\partial}{\partial\alpha_0}\chi_0 + \cdots + \dfrac{\partial}{\partial\alpha_4}\chi_4$, si ha

$$\varDelta\varphi = \chi, \quad \varDelta\chi = \tfrac{1}{3}\,\iota\varphi, \quad \varDelta\iota = 2\eta, \quad \varDelta\eta = \tfrac{1}{2}\,\iota^2, \quad \varDelta\theta = 0,$$
$$(\chi\theta)^2\chi_x^2\theta_x^4 = \varDelta(\alpha\theta)^2\alpha_x^2\theta_x^4 = 0, \quad (\chi\theta)^4\theta_x^2 = \varDelta(\alpha\theta)^4\theta_x^2 = 0.$$

Si trovano poi facilmente le seguenti altre identità:

$$\theta_x^5\theta_y = (\alpha\chi)\alpha_x^3\chi_x^2\chi_y - \tfrac{1}{12}\,\iota\varphi.(xy) = (\alpha\chi)\alpha_x^2\alpha_y\chi_x^3 + \tfrac{1}{12}\,\iota\varphi.(xy),$$
$$\theta_x^4\theta_y^2 = (\alpha\chi)\alpha_x^3\chi_x\chi_y^2 - \tfrac{1}{6}\,\iota.\alpha_x^3\alpha_y.(xy) = (\alpha\chi)\alpha_x\alpha_y^2\chi_x^3 + \tfrac{1}{6}\,\iota.\alpha_x^3\alpha_y.(xy),$$
$$\theta_x^3\theta_y^3 = (\alpha\chi)\alpha_x^3\chi_y^3 - \tfrac{1}{4}\,\iota.\alpha_x^2\alpha_y^2.(xy) = (\alpha\chi)\alpha_y^3\chi_x^3 + \tfrac{1}{4}\,\iota.\alpha_x^2\alpha_y^2.(xy);$$

e ponendo $\psi_x^8 = \varphi^2$, $\omega_x^{12} = \varphi^3$, $\sigma_x^{10} = \varphi\theta$, si trova altresì

$$\psi_x^6\psi_y^2 = \alpha_x^4.\beta_x^2\beta_y^2 - \tfrac{2}{7}\,\chi_x^4.(xy)^2, \quad \psi_x^5\psi_y^3 = \alpha_x^4.\beta_x\beta_y^3 - \tfrac{6}{7}\,\chi_x^3\chi_y.(xy)^2,$$

(1) $\omega_x^6\omega_y^6 = \alpha_x^4.\beta_y^4.\gamma_x^2\gamma_y^2 - \tfrac{8}{11}(\alpha_x^4.\chi_y^4 + \alpha_y^4.\chi_x^4)(xy)^2 + \tfrac{3}{11}\,\iota.\alpha_x^2\alpha_y^2.(xy)^4 + \tfrac{18}{77}\,\eta.(xy)^6$,

$$\omega_x^5\omega_y^5\omega_z^2 = \tfrac{1}{3}\alpha_x^4.\beta_y^4.\gamma_x\gamma_y\gamma_z^2 + \tfrac{1}{9}\alpha_x^4.\beta_x\beta_y^3.\gamma_y^2\gamma_z^2 + \tfrac{1}{9}\alpha_y^4.\beta_y\beta_x^3.\gamma_x^2\gamma_z^2 + \tfrac{4}{9}\alpha_x^3\alpha_z.\beta_y^3\beta_z.\gamma_x^2\gamma_y^2$$

$+$ termini con (xz) e (xy);

(2) $\sigma_x^5\sigma_y^5 = \tfrac{1}{2}(\alpha_x^4.\theta_x\theta_y^5 + \alpha_y^4.\theta_y\theta_x^5) - \tfrac{5}{6}(\alpha\theta)^2(\alpha_x^2\theta_y^2 + \alpha_y^2\theta_x^2)\theta_x\theta_y.(xy)^2$.

---

(1) Infatti $\omega_x^6\omega_y^6$ non può contenere che termini come $\alpha_x^4.\beta_y^4.\gamma_x^2\gamma_y^2$, $\alpha_x^4.\beta_y^3\beta_x.\gamma_x\gamma_y^3$, $\alpha_x^3\alpha_y.\beta_x\beta_y^2.\gamma_x^2\gamma_y^2$, $\alpha_x^2\alpha_y^2.\beta_x^2\beta_y^2.\gamma_x^2\gamma_y^2$; dei quali il 2° è eguale al 1° meno $\tfrac{1}{2}\alpha_x^4.\chi_x^4.(xy)^2$, e il 3° e 4° si scindono in termini proporzionali al 1° ed ai seguenti tre: $(\alpha_x^4.\chi_y^4 + \alpha_y^4.\chi_x^4)(xy)^2$, $\iota.\alpha_x^2\alpha_y^2.(xy)^4$, $\eta(xy)^6$, come risulta dalle identità

$$\alpha_x^2\alpha_y^2.\beta_x^2\beta_y^2.\gamma_x^2\gamma_y^2 = \tfrac{1}{4}\gamma_x^2\gamma_y^2\left(\alpha_x^2\beta_y^2 + \alpha_y^2\alpha_x^2 - (\alpha\beta)^2.(xy)^2\right)^2$$
$$= \tfrac{1}{2}\alpha_x^4.\beta_y^4.\gamma_x^2\gamma_y^2 + \tfrac{1}{2}\alpha_x^2\alpha_y^2.\beta_x^2\beta_y^2.\gamma_x^2\gamma_y^2 - (\alpha\beta)^2\alpha_x^2\beta_y^2.\gamma_x^2\gamma_y^2.(xy)^2 + \tfrac{1}{4}\iota.\gamma_x^2\gamma_y^2.(xy)^4$$
$$= \alpha_x^4.\beta_y^4.\gamma_x^2\gamma_y^2 - 2(\alpha\beta)^2\alpha_x^2\beta_y^2.\gamma_x^2\gamma_y^2.(xy)^2 + \tfrac{1}{2}\iota.\alpha_x^2\alpha_y^2.(xy)^4,$$
$$\alpha_x^3\alpha_y.\beta_x\beta_y^3.\gamma_x^2\gamma_y^2 = \tfrac{1}{2}\alpha_x^2\beta_y^2\gamma_x^2\gamma_y^2\left(\alpha_x^2\beta_y^2 + \alpha_y^2\beta_x^2 - (\alpha\beta)^2(xy)^2\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}\alpha_x^4.\beta_y^4.\gamma_x^2\gamma_y^2 + \tfrac{1}{2}\alpha_x^2\alpha_y^2.\beta_x^2\beta_y^2.\gamma_x^2\gamma_y^2 - \tfrac{1}{2}(\alpha\beta)^2\alpha_x^2\beta_y^2.\gamma_x^2\gamma_y^2.(xy)^2,$$
$$(\alpha\beta)^2\alpha_x^2\beta_y^2.\gamma_x^2\gamma_y^2 = \alpha_x^2\alpha_y^2.\chi_x^2\chi_y^2 + \tfrac{1}{3}\iota.\alpha_x^2\alpha_y^2.(xy)^2 = \tfrac{1}{4}\left(\alpha_x^2\chi_y^2 + \alpha_y^2\chi_x^2 - (\alpha\chi)^2(xy)^2\right)^2 + \tfrac{1}{3}\iota.\alpha_x^2\alpha_y^2.(xy)^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(\alpha_x^4.\chi_y^4 + \alpha_y^4\chi_x^4) - \tfrac{1}{3}\iota.\alpha_x^2\alpha_y^2.(xy)^2 - \tfrac{1}{3}\eta.(xy)^4 + \tfrac{1}{2}\eta.(xy)^4 + \tfrac{1}{3}\iota.\alpha_x^2\alpha_y^2.(xy)^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(\alpha_x^4.\chi_y^4 + \alpha_y^4\chi_x^4) - \tfrac{1}{6}\eta.(xy)^4;$$

avremo dunque

$$\omega_x^6\omega_y^6 = \lambda\alpha_x^4.\beta_y^4.\gamma_x^2\gamma_y^2 + \lambda_1(\alpha_x^4.\chi_y^4 + \alpha_y^4.\chi_x^4)(xy)^2 + \lambda_2\iota.\alpha_x^2\alpha_y^2.(xy)^2 + \lambda_3\eta.(xy)^6;$$

e per determinare $\lambda\ \lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ basterà eguagliare i coefficienti dei termini simili negli sviluppi dei due membri. Infatti si ha

$$\omega_1^6\omega_2^6 = \tfrac{1}{77}(18\alpha_2^3 + 4\alpha_1^2\alpha_4 + 4\alpha_0\alpha_3^2 + 3\alpha_0\alpha_2\alpha_4 + 48\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = \lambda\alpha_0\alpha_2\alpha_4 + 2\lambda_1\alpha_0(\alpha_2\alpha_4 - \alpha_3^2)$$
$$+ 2\lambda_1\alpha_4(\alpha_0\alpha_2 - \alpha_1^2) + 2\lambda_2\alpha_2(\alpha_0\alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 + 3\alpha_2^2) + 6\lambda_3(\alpha_0\alpha_2\alpha_4 + 2\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - \alpha_2^3 - \alpha_0\alpha_3^2 - \alpha_1^2\alpha_4)$$
$$= (\lambda + 4\lambda_1 + 2\lambda_2 + 6\lambda_3)\alpha_0\alpha_2\alpha_4 - 2(\lambda + 3\lambda_3)\alpha_0\alpha_3^2 - 2(\lambda + 3\lambda_3)\alpha_1^2\alpha_4 - 4(2\lambda_2 - 3\lambda_3)\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + 6(\lambda_2 - \lambda_3)\alpha_2^3,$$

onde $\qquad \lambda = 1,\ \lambda_1 = -\tfrac{8}{11},\ \lambda_2 = \tfrac{3}{11},\ \lambda_3 = \tfrac{18}{77}$

(2) Infatti $\sigma_x^5\sigma_y^5$ non contiene che termini come $\alpha_x^4.\theta_x\theta_y^5$, $\alpha_x^3\alpha_y^4.\theta_x^2\theta_y^4$, $\alpha_x^2\alpha_y^2.\theta_x^3\theta_y^3$; ma si ha

$$\alpha_x^3\alpha_y.\theta_x^2\theta_y^4 = \tfrac{1}{2}\alpha_x^2\theta_x\theta_y^3\left(\alpha_x^2\theta_y^2 + \alpha_y^2\theta_x^2 - (\alpha\theta)^2(xy)^2\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}\alpha_x^4.\theta_x\theta_y^5 + \tfrac{1}{2}\alpha_x^2\alpha_y^2.\theta_x^3\theta_y^3 - \tfrac{1}{2}(\alpha\theta)^2\alpha_x^2\theta_x\theta_y^3.(xy)^2,$$
$$\alpha_x^2\alpha_y^2.\theta_x^3\theta_y^3 = \tfrac{1}{4}\theta_x\theta_y\left(\alpha_x^2\theta_y^2 + \alpha_y^2\theta_x^2 - (\alpha\theta)^2(xy)^2\right)^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(\alpha_x^4.\theta_x\theta_y^5 + \alpha_y^4.\theta_y\theta_x^5) - (\alpha\theta)^2(\alpha_x^2\theta_y^2 + \alpha_y^2\theta_x^2)\,o_x\theta_y.(xy)^2;$$

III.

Relativamente alla forma del 5° ordine f, son note le identità [1]

$$g \equiv g_x^4 \equiv (\mathrm{H},\mathrm{H})^4 = (\mathrm{HH}')^4 \mathrm{H}_x^2 \mathrm{H}'^2_x = \tfrac{2}{5} k + \tfrac{4}{25} i^2,$$
$$h \equiv (f,j)_2 = (aj)^2 a_x^3 j_x = -k - \tfrac{3}{10} i^2;$$
$$\mathrm{H}_x^4 \mathrm{H}_y^2 = (ab)^2 a_x^2 a_y b_x^2 b_y + \tfrac{1}{5} i_x^2 . (xy)^2 = (ab)^2 a_x^3 b_x b_y^2 + \tfrac{3}{10} i_x^2 . (xy)^2,$$
$$\mathrm{H}_x^3 \mathrm{H}_y^3 = (ab)^2 a_x^3 b_y^3 - \tfrac{9}{10} i_x i_y . (xy)^2 = (ab) a_x^2 a_y b_x b_y^2 + \tfrac{1}{5} i_x i_y . (xy)^2;$$
$$(\mathrm{HH}')^6 = \tfrac{1}{10} \mathrm{A},$$
$$(\mathrm{HH}')^4 \mathrm{H}_x^2 \mathrm{H}_y'^2 = g_x^2 g_y^2 + \tfrac{1}{30} \mathrm{A}.(xy)^2 = \tfrac{2}{5} k_x^2 k_y^2 + \tfrac{4}{25} i_x^2 . i_y'^2 - \tfrac{1}{50} \mathrm{A}.(xy)^2,$$
$$(\mathrm{HH}')^3 \mathrm{H}_x^3 \mathrm{H}_y'^3 = \tfrac{3}{2} g_x^2 g_y^2 . (xy) + \tfrac{1}{40} \mathrm{A}.(xy)^3$$
$$= \tfrac{3}{5} k_x^2 k_y^2 . (xy) + \tfrac{6}{25} i_x^2 . i_y'^2 . (xy) - \tfrac{3}{200} \mathrm{A}.(xy)^3,$$
$$m = (f,j)_1 = (aj) a_x^4 j_x^2;$$
$$l_x^4 l_y = (ia) a_x^4 i_y - \tfrac{4}{5} j_x^3 . (xy) = (ia) a_x^3 a_y i_x + \tfrac{1}{5} j_x^3 . (xy),$$
$$l_x^3 l_y^2 = (ia) a_x^3 a_y i_y - \tfrac{3}{5} j_x^2 j_y . (xy) = (ia) a_x^2 a_y^2 i_x + \tfrac{2}{5} j_x^2 j_y . (xy);$$

onde segue

$$(al)^5 = -\mathrm{A}, \quad (al)^4 a_x l_y = 0,$$
$$(al)^3 a_x^2 l_y^2 = (al)^3 a_y^2 l_x^2 = -\tfrac{7}{5} k_x^2 k_y^2 + \tfrac{2}{25} i_x^2 . i_y'^2 - \tfrac{9}{25} \mathrm{A}.(xy)^2, \quad (al)^3 a_x^2 l_x^2 = -\tfrac{7}{5} k_x^4 + \tfrac{2}{25} i^2.$$
$$(al)^2 a_x^3 l_y^3 = -(ab)(ai)(bi) a_x^3 b_y^3 - \tfrac{3}{5} (aj) a_x^3 a_y j_y^3, \qquad (al)^2 a_x^3 l_x^3 = -\tfrac{3}{5} m,$$
$$(al) a_x^4 l_y^4 = -\tfrac{9}{5} a_x^3 a_y . j_y^3 + (ab)(ib) a_x^4 b_y^3 i_y, \qquad (al) a_x^4 l_x^4 = -\tfrac{9}{5} fj + \tfrac{1}{2} i\mathrm{H}.$$

Indicando con D l'operazione $\dfrac{\partial}{\partial a_0} l_0 + \cdots + \dfrac{\partial}{\partial a_5} l_5$, si ha

$$\mathrm{D}f = l, \quad \mathrm{DH} = 2(al)^2 a_x^3 l_x^3 = -\tfrac{6}{5} m, \quad \mathrm{D}i = 2(al)^4 a_x l_x = 0, \quad \mathrm{D}j = 0, \quad \mathrm{DA} = 0, \text{ ecc.}$$

E ponendo $s_x^{10} = f^2$, $t_x^{12} = \mathrm{H}^2$, si ottengono le seguenti identità:

$$s_x^8 s_y^2 = a_x^5 . b_x^3 b_y^2 - \tfrac{5}{18} \mathrm{H}_x^6 . (xy)^2, \quad s_x^7 s_y^3 = a_x^5 . b_x^2 b_y^3 - \tfrac{5}{6} \mathrm{H}_x^5 \mathrm{H}_y . (xy)^2,$$
$$s_x^6 s_y^4 = a_x^5 . b_x b_y^4 - \tfrac{5}{3} \mathrm{H}_x^4 \mathrm{H}_y^2 . (xy)^2 - \tfrac{1}{7} i_x^2 . (xy)^4 = a_x^3 a_y^2 . b_x^3 b_y^2 + \tfrac{1}{3} \mathrm{H}_x^4 \mathrm{H}_y^2 . (xy)^2 - \tfrac{3}{70} i_x^2 . (xy)^4,$$

$$\begin{aligned} 77\, t_x^4 t_y^4 t_z^4 = {} & (\mathrm{H}_x^4 \mathrm{H}_z^2 . \mathrm{H}'^4_y \mathrm{H}'^2_z + \mathrm{H}_x^3 \mathrm{H}_y^2 . \mathrm{H}'^4_z \mathrm{H}'^2_y + \mathrm{H}_y^4 \mathrm{H}_x^2 . \mathrm{H}'^4_z \mathrm{H}'^2_x) \\ & + \tfrac{8}{3} (\mathrm{H}_x^4 \mathrm{H}_y \mathrm{H}_z . \mathrm{H}'^3_y \mathrm{H}'^3_z + \mathrm{H}_y^4 \mathrm{H}_z \mathrm{H}_x . \mathrm{H}'^3_z \mathrm{H}'^3_x + \mathrm{H}_z^4 \mathrm{H}_x \mathrm{H}_y . \mathrm{H}'^2_x \mathrm{H}'^3_y) \\ & + 16 (\mathrm{H}_x^3 \mathrm{H}_y^2 \mathrm{H}_z . \mathrm{H}'_x \mathrm{H}'^2_y \mathrm{H}'^3_z + \mathrm{H}_y^3 \mathrm{H}_z^2 \mathrm{H}_x . \mathrm{H}'_y \mathrm{H}'^2_z \mathrm{H}'^3_x + \mathrm{H}_z^3 \mathrm{H}_x^2 \mathrm{H}_y . \mathrm{H}'_z \mathrm{H}'^2_x \mathrm{H}'^3_y) \\ & + 18\, \mathrm{H}_x^2 \mathrm{H}_y^2 \mathrm{H}_z^2 . \mathrm{H}'^2_x \mathrm{H}'^2_y \mathrm{H}'^2_z . \end{aligned}$$

---

dunque avremo

$$\sigma_x^5 \sigma_y^5 = \lambda (\alpha_x^4 . \theta_x \theta_y^5 + \alpha_y^4 . \theta_y \theta_x^5) + \lambda_1 (\alpha\theta)^2 (\alpha_x^2 \theta_y^2 + \alpha_y^2 \theta_x^2) \theta_x \theta_y .$$

Per determinare λ e λ_1 basterà eguagliare i termini simili nell'identità

$$\sigma_1^5 \sigma_2^5 = \tfrac{4}{42} (\alpha_0\theta_5 + 10\alpha_1\theta_4 + 20\alpha_2\theta_3 + 10\alpha_3\theta_2 + \alpha_4\theta_1) = \lambda(\alpha_0\theta_5 + \alpha_4\theta_1) + \lambda_1(\alpha_0\theta_5 - 2\alpha_1\theta_4 + 2\alpha_2\theta_3 - 2\alpha_3\theta_2 + \alpha_4\theta_1),$$

l che dà $\qquad \lambda = \tfrac{1}{2}, \quad \lambda_1 = -\tfrac{5}{6}.$

(1) Clebsch, l. c.; d'Ovidio, *Nota sulle forme binarie del 5° ordine.*

IV.

Procediamo ora all'esame dei singoli invarianti accennati nel § I.

$(H, \theta)_6$. — L'invariante

$$I_{23} \equiv (H,\theta)_6 = (H\theta)^6 = (\alpha\chi)(H\alpha)^3(H\chi)^3 = (\alpha\chi)\{(ab)^2(a\alpha)^3(b\chi)^3 - \tfrac{9}{10}(i\alpha)(i\chi)(\alpha\chi)^2\}$$
$$= (ab)^2(\alpha\chi)(a\alpha)^3(b\chi)^3$$

è manifestamente *fondamentale.*

$(f^2, \varphi\theta)_{10}$. — L'invariante

$$I_{24} \equiv (f^2, \varphi\theta)_{10} = (s\alpha)^4(s\theta)^6 = (a\alpha)^4(a\theta)(b\theta)^5 - \tfrac{5}{3}(H\theta)^4(H\alpha)^2(\alpha\theta)^2 - \tfrac{1}{7}(i\theta)^2(\alpha\theta)^4$$
$$= (a\alpha)^4(a\theta)(b\theta)^5$$

è anche manifestamente *fondamentale.* Esso può scriversi altrimenti

$$I_{24} = (s\alpha)^4(s\theta)^6 = (a\alpha)^2(b\alpha)^2(a\theta)^3(b\theta)^3 + \tfrac{1}{3}(H\theta)^4(H\alpha)^2(\alpha\theta)^2 - \tfrac{3}{70}(i\theta)^2(\alpha\theta)^4$$
$$= (a\alpha)^2(b\alpha)^2(a\theta)^3(b\theta)^3.$$

E si noti che la $I_{24} = (a\sigma)^5(b\sigma)^5$ conduce di nuovo alla $I_{24} = (a\alpha)^4(a\theta)(b\theta)^5$.

$(f^2, \chi\theta)_{10}$. — L'invariante

$$I_{25} \equiv (f^2, \chi\theta)_{10} = (a\chi)^4(a\theta)(b\theta)^5 = (a\chi)^2(b\chi)^2(a\theta)^3(b\theta)^3$$

è anche *fondamentale*; poichè esso non è proporzionale a ιI_{23}, visto che per $\varphi \equiv 4\alpha_3 x_1 x_2^3$ (onde $\chi = -2\alpha_3^2 x_2^4$, $\theta = 2\alpha_3^3 x_2^6$, $\iota = 0$, $\eta = 0$) si ha $\iota I_{23} = 0$, mentre $I_{25} = -4a_0^2\alpha_3^5$.

Si noti che I_{25} può dedursi dal precedente I_{24} mediante l'operazione $\varDelta$, la quale porge

$$\varDelta I_{24} = (f^2, \varDelta.\varphi\theta)_{10} = (f^2, \chi\theta)_{10} = \varDelta(a\alpha)^4(a\theta)(b\theta)^5 = (a\chi)^4(a\theta)(b\theta)^5$$
$$= \varDelta(a\alpha)^2(b\alpha)^2(a\theta)^3(b\theta)^3 = (a\chi)^2(b\chi)^2(a\theta)^3(b\theta)^3.$$

$(i^2, \varphi)_4$, $(k, \varphi)_4$. — Gl'invarianti

$$I_{41} \equiv (i^2, \varphi)_4 = (i\alpha)^2(i'\alpha)^2 = (ab)^4(cd)(a\alpha)(b\alpha)(c\alpha)(d\alpha),$$
$$I'_{41} \equiv (k, \varphi)_4 = (k\alpha)^4 = (Hi)^2(H\alpha)^4,$$

non possono esprimersi come funzioni razionali intere di altri di gradi inferiori. E siccome inoltre una relazione del tipo $\lambda I_{41} + \lambda' I'_{41} = 0$, indicando con λ, λ' coefficienti numerici, implica che sia $\lambda = 0$ e $\lambda' = 0$, altrimenti i^2 e k sarebbero proporzionali; così *gl'invarianti* I_{41}, I'_{41} *sono fondamentali.*

Essendo poi $\quad (ab)^2(ai)\,bi)(a\alpha)^2(b\alpha)^2 = I'_{41} - \tfrac{1}{5}I_{41}$;

ed essendo

$$(h,\varphi)_4 = (h\alpha)^4 = (aj)^2(a\alpha)^3(j\alpha) = -(ab)^2(ai)^2(a\alpha)(b\alpha)^3 = -\tfrac{3}{10}I_{41} - I'_{41},$$
$$(g,\varphi)_4 = (g\alpha)^4 = (HH')^4(H\alpha)^2(H'\alpha)^2 = \tfrac{4}{25}I_{41} + \tfrac{2}{5}I'_{41};$$

ed anche $\quad (al)^3(a\alpha)^2(l\alpha)^2 = \tfrac{2}{25}I_{41} - \tfrac{7}{5}I'_{41}$;

ne consegue che *come invarianti fondamentali dei gradi* 4 *e* 1 *si possono assumere indifferentemente due qualunque fra i seguenti*:

$$I_{41},\ I'_{41},\ (ab)^2(ai)(bi)(a\alpha)^2(b\alpha)^2,\quad (h,\varphi)_4,\ (g,\varphi)_4,\quad (al)^3(a\alpha)^2(l\alpha)^2.$$

Noi sceglieremo i due primi.

V.

$$(i^2, \chi)_4\,, \quad (k, \chi)_4\,, \quad (fj, \varphi^2)_8\,, \quad (i\mathrm{H}, \varphi^2)_8\,.$$

Gl' invarianti

$$\mathrm{I}_{42} \equiv (i^2, \chi)_4 = (i\chi)^2 (i'\chi)^2 = (i\alpha)^2 (i'\beta)^2 (\alpha\beta)^2 - \tfrac{1}{3}\mathrm{A}\iota\,,$$

$$\mathrm{I}'_{42} \equiv (k, \chi)_4 = (k\chi)^4 = (i\mathrm{H})^2 (\mathrm{H}\chi)^4 = (i\mathrm{H})^2 (\mathrm{H}\alpha)^2 (\mathrm{H}\beta)^2 (\alpha\beta)^2$$

si deducono da I_{41} e I'_{41} mediante l'operazione $\varDelta$.

Inoltre si ha

$$(fj, \varphi^2)_8 = (a\psi)^5 (j\psi)^3 = (a\alpha)^4 (a\beta)(j\beta)^3 - \tfrac{6}{7}(h\chi)^4\,,$$

$$(i\mathrm{H}, \varphi^2)_4 = (i\psi)^2 (\mathrm{H}\psi)^6 = (\mathrm{H}\alpha)^4 (\mathrm{H}\beta)^2 (i\beta)^2 - \tfrac{2}{7}\mathrm{I}'_{42}\,;$$

ovvero

$$\mathrm{I}''_{42} \equiv (a\alpha)^4 (a\beta)(j\beta)^3 = (fj, \varphi^2)_8 + \tfrac{6}{7}(h\chi)^4,$$

$$\mathrm{I}'''_{42} \equiv (\mathrm{H}\alpha)^4 (\mathrm{H}\beta)^2 (i\beta)^2 = (i\mathrm{H}, \varphi^2)_4 + \tfrac{2}{7}\mathrm{I}'_{42}\,.$$

Ora dimostreremo che non può sussistere una relazione del tipo:

$$0 = \lambda \mathrm{I}_{42} + \lambda_1 \mathrm{I}'_{42} + \lambda_2 \mathrm{I}''_{42} + \lambda_3 \mathrm{I}'''_{42} + \mu \mathrm{A}\iota\,.$$

Infatti una tale relazione per $\varphi \equiv \alpha_4 x_2^4$, onde $\chi = 0$, $\iota = 0$, $\eta = 0$, $\theta = 0$, $\mathrm{I}_{42} = 0$, $\mathrm{I}'_{42} = 0$, $\mathrm{I}''_{42} = a_0 j_0 \alpha_4^2$, $\mathrm{I}'''_{42} = \mathrm{H}_0 i_0 \alpha_4^2$, darebbe $0 = \lambda_2 a_0 j_0 + \lambda_3 \mathrm{H}_0 i_0$, onde $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$; e per $\varphi \equiv 4\alpha_3 x_1 x_2^3$, onde $\chi = -2\alpha_3^2 x_2^4$, $\iota = 0$, $\eta = 0$, $\theta = -2\alpha_3^3 x_2^6$, $\mathrm{I}_{42} = -2 i_0^2 \alpha_3^2$, $\mathrm{I}'_{42} = -2(\mathrm{H}_2 i_0 - 2\mathrm{H}_1 i_1 + \mathrm{H}_0 i_2)$, darebbe $0 = \lambda i_0 + \lambda_1(\mathrm{H}_2 i_0 - 2\mathrm{H}_1 i_1 + \mathrm{H}_0 i_2)$, onde $\lambda = 0$, $\lambda_1 = 0$.

Dunque: *i quattro invarianti* I_{42}, I'_{42}, I''_{42}, I'''_{42} *sono fondamentali.*

E tutti gli altri invarianti dei gradi 4 e 2 si potranno esprimere linearmente mediante questi quattro e $\mathrm{A}\iota$. Così si ha

$$(ab)^2(ai)(bi)(a\chi)^2(b\chi)^2 = -\tfrac{1}{5}\mathrm{I}_{42} + \mathrm{I}'_{42}, \quad (ab)^2(ai)(bi)(a\alpha)^2(b\beta)^2(\alpha\beta)^2 = -\tfrac{1}{5}\mathrm{I}_{42} + \mathrm{I}'_{42} + \tfrac{1}{3}\mathrm{A}\iota,$$

$$(h,\chi)_4 = (h\chi)^4 = (aj)^2 (a\chi)^3 (j\chi) = (aj)^2 (a\alpha)^2 (a\beta)(i\beta)(\alpha\beta)^2 = -\tfrac{3}{10}\mathrm{I}_{42} + \mathrm{I}'_{42}\,,$$

$$(g,\chi)_4 = (g\chi)^4 = (\mathrm{HH}')^4 (\mathrm{H}\chi)^2 (\mathrm{H}'\chi)^2 = \tfrac{4}{25}\mathrm{I}_{42} + \tfrac{2}{5}\mathrm{I}'_{42}\,,$$

$$(\mathrm{HH}')^4 (\mathrm{H}\alpha)^2 (\mathrm{H}'\beta)^2 (\alpha\beta)^2 = \tfrac{4}{25}\mathrm{I}_{42} + \tfrac{2}{5}\mathrm{I}'_{42} + \tfrac{1}{30}\mathrm{A}\iota\,,$$

$$(a\alpha)^3 (a\beta)^2 (j\alpha)(j\beta)^2 = \tfrac{1}{2}(a\alpha)^2 (a\beta)(j\beta)\,\{(a\alpha)^2 (j\beta)^2 + (a\beta)^2 (j\alpha)^2 - (aj)^2 (\alpha\beta)^2\}$$
$$= \tfrac{3}{10}\mathrm{I}_{42} - \mathrm{I}'_{42} + \mathrm{I}''_{42}\,,$$

$$(\mathrm{HH}')^2 (\mathrm{H}\alpha)^4 (\mathrm{H}'\beta)^4 = \tfrac{9}{25}\mathrm{I}_{42} - \mathrm{I}'_{42} + \tfrac{1}{3}\mathrm{I}''_{42} - \tfrac{1}{10}\mathrm{I}'''_{42} + \tfrac{1}{50}\mathrm{A}\iota\,,$$

$$(\mathrm{H}\alpha)^3 (\mathrm{H}\beta)^3 (i\alpha)(i\beta) = \tfrac{1}{2}(\mathrm{H}\alpha)^2 (\mathrm{H}\beta)^2\,\{(\mathrm{H}\alpha)^2 (i\beta)^2 + (\mathrm{H}\beta)^2 (i\alpha)^2 - (i\mathrm{H})^2 (\alpha\beta)^2\}$$
$$= -\tfrac{1}{2}\mathrm{I}'_{42} + \mathrm{I}''_{42}\,,$$

$$(\mathrm{HH}')^2(\mathrm{H}\alpha)^2(\mathrm{H}\beta)^2(\mathrm{H}'\alpha)^2(\mathrm{H}'\beta)^2 = \tfrac{1}{4}(\mathrm{HH}')^2\{(\mathrm{H}\alpha)^2(\mathrm{H}'\beta)^2 + (\mathrm{H}\beta)^2(\mathrm{H}'\alpha)^2 - (\mathrm{HH}')^2(\alpha\beta)^2\}^2$$
$$= (\mathrm{HH}')^2 (\mathrm{H}\alpha)^4 (\mathrm{H}'\beta)^4 - 2(\mathrm{HH}')^4 (\mathrm{H}\alpha)^2 (\mathrm{H}'\beta)^2 (\alpha\beta)^2 + \tfrac{1}{2}(\mathrm{HH}')^6 (\alpha\beta)^4$$
$$= \tfrac{1}{25}\mathrm{I}_{42} - \tfrac{9}{5}\mathrm{I}'_{42} + \tfrac{1}{3}\mathrm{I}''_{42} - \tfrac{1}{10}\mathrm{I}'''_{42} + \tfrac{1}{300}\mathrm{A}\iota\,,$$

$$(al)^3 (a\chi)^2 (l\chi)^2 = \tfrac{2}{25}\mathrm{I}_{42} - \tfrac{7}{5}\mathrm{I}'_{42}\,.$$

Dalle precedenti relazioni è facile dedurre quali altri invarianti si potrebbero assumere come fondamentali invece di alcuni o di tutti i quattro da noi prescelti I_{42}, I'_{42}, I''_{42}, I'''_{42}.

VI.

$$(m,\theta)_6,\quad (fj,\varphi\chi)_8,\quad (i\mathrm{H},\varphi\chi)_8,\quad (\mathrm{H}^2,\varphi^3)_{12},\quad (f^2 i,\varphi^3)_{12}.$$

Mediante l'operazione $\varDelta$ da invarianti dei gradi 4 e 2 possiamo dedurre invarianti dei gradi 4 e 3. Ma siccome

$$\varDelta.\mathrm{A}\iota=2\mathrm{A}\eta,\ \varDelta\mathrm{I}_{42}=(i^2,\varDelta\chi)_4=\tfrac{1}{3}\iota.(i^2,\varphi)_4=\tfrac{1}{3}\mathrm{I}_{41}\iota,\quad \varDelta\mathrm{I}'_{42}=(k,\varDelta\chi)_4=\tfrac{1}{3}\mathrm{I}'_{41}\iota,$$

così quegl' invarianti dei gradi 4 e 2 che si esprimevano linearmente in I_{42}, I'_{42}, $\mathrm{A}\iota$, mediante l'operazione $\varDelta$ non porgono che invarianti dei gradi 4 e 3 esprimibili linearmente in $\mathrm{I}_{41}\iota$, $\mathrm{I}'_{41}\iota$, $\mathrm{A}\eta$; per esempio

$$\varDelta(h,\chi)_4=(h,\varDelta\chi)_4=-(\tfrac{1}{10}\mathrm{I}_{41}+\tfrac{1}{3}\mathrm{I}'_{41})\,\iota,\quad \varDelta(g,\chi)_4=(g,\varDelta\chi)_4=(\tfrac{4}{75}\mathrm{I}_{41}+\tfrac{2}{15}\mathrm{I}'_{41})\,\iota.$$

Si ha poi

$$\varDelta\mathrm{I}''_{42}=(a\alpha)^4(a\chi)(j\chi)^3+(a\chi)^4(a\alpha)(j\alpha)^3,\quad \varDelta\mathrm{I}'''_{42}=(\mathrm{H}\alpha)^4(\mathrm{H}\chi)^2(i\chi)^2+(\mathrm{H}\chi)^4(\mathrm{H}\alpha)^2(i\alpha)^2,$$

dove si presentano quattro invarianti dei gradi 4 e 3; e si ha pure

$$(fj,\varphi\chi)_8=\tfrac{1}{2}\varDelta(fj,\varphi^2)_8=\tfrac{1}{2}\varDelta\mathrm{I}''_{42}+(\tfrac{3}{70}\mathrm{I}_{41}+\tfrac{1}{7}\mathrm{I}'_{41})\iota,$$

$$(i\mathrm{H},\varphi\chi)_8=\tfrac{1}{2}\varDelta(i\mathrm{H},\varphi^2)_8=\tfrac{1}{2}\varDelta\mathrm{I}'''_{42}-\tfrac{1}{21}\mathrm{I}'_{41}\iota,$$

$$(\mathrm{HH}')^2(\mathrm{H}\alpha)^4(\mathrm{H}'\chi)^4=\tfrac{1}{2}\varDelta(\mathrm{HH}')^2(\mathrm{H}\alpha)^4(\mathrm{H}'\beta)^4=\tfrac{1}{50}\mathrm{A}\eta+(\tfrac{3}{50}\mathrm{I}_{41}-\tfrac{1}{6}\mathrm{I}'_{41})\iota+\tfrac{1}{6}\varDelta\mathrm{I}''_{42}-\tfrac{1}{20}\varDelta\mathrm{I}'''_{42},$$

$$(\mathrm{H}\alpha)^3(\mathrm{H}\chi)^3(i\alpha)(i\chi)=\tfrac{1}{2}\varDelta(\mathrm{H}\alpha)^3(\mathrm{H}\beta)^3(i\alpha)(i\beta)=-\tfrac{1}{12}\mathrm{I}'_{41}\iota+\tfrac{1}{2}\varDelta\mathrm{I}''_{42},$$

$$\begin{aligned}(\mathrm{HH}')^2(\mathrm{H}\alpha)^2(\mathrm{H}\chi)^2(\mathrm{H}'\alpha)^2(\mathrm{H}'\chi)^2&=\tfrac{1}{2}\varDelta(\mathrm{HH}')^2(\mathrm{H}\alpha)^2(\mathrm{H}\beta)^2(\mathrm{H}'\alpha)^2(\mathrm{H}'\beta)^2\\&=\tfrac{1}{150}\mathrm{I}_{41}\iota-\tfrac{3}{10}\mathrm{I}'_{41}\iota+\tfrac{1}{6}\varDelta\mathrm{I}''_{42}-\tfrac{1}{10}\varDelta\mathrm{I}'''_{42}+\tfrac{1}{300}\mathrm{A}\eta,\end{aligned}$$

$$(\mathrm{H}\alpha)^4(\mathrm{H}\beta)^2(i\gamma)^2(\beta\gamma)^2=(\mathrm{H}\alpha)^4(\mathrm{H}\chi)^2(i\chi)^2+\tfrac{1}{3}\mathrm{I}'_{41}\iota,$$

$$(\mathrm{HH}')^2(\mathrm{H}\alpha)^2(\mathrm{H}\beta)^2(\mathrm{H}'\alpha)^2(\mathrm{H}'\gamma)^2(\beta\gamma)^2=(\mathrm{HH}')^2(\mathrm{H}\alpha)^2(\mathrm{H}\chi)^2(\mathrm{H}'\alpha)^2(\mathrm{H}'\chi)^2+\tfrac{1}{3}\iota.(\mathrm{HH}')^4(\mathrm{H}\alpha)^2(\mathrm{H}'\alpha)^2.$$

Quanto all' invariante $(m,\theta)_6$, esso si trasforma in

$$\begin{aligned}(m,\theta)_6=(m\theta)^6=(i\mathrm{H})(i\theta)(\mathrm{H}\theta)^5&=(i\mathrm{H})(i\alpha)(\mathrm{H}\alpha)^2(\mathrm{H}\chi)^3(\alpha\chi)-\tfrac{1}{12}(i\mathrm{H})^2(\mathrm{H}\alpha)^4.\iota\\&=\tfrac{1}{2}(\mathrm{H}\alpha)^2(\mathrm{H}\chi)^2\,\big\{(i\mathrm{H})^2(\alpha\chi)^2+(i\alpha)^2(\mathrm{H}\chi)^2-(i\chi)^2(\mathrm{H}\alpha)^2\big\}-\tfrac{1}{12}(i\mathrm{H})^2(\mathrm{H}\alpha)^4.\iota\\&=\tfrac{1}{2}(\mathrm{H}\chi)^4(\mathrm{H}\alpha)^2(i\alpha)^2-\tfrac{1}{2}(\mathrm{H}\alpha)^4(\mathrm{H}\chi)^2(i\chi)^2.\end{aligned}$$

Inoltre l' invariante

$$\begin{aligned}(\mathrm{H}^2,\varphi^3)_{12}=(\mathrm{H}\omega)^6(\mathrm{H}'\omega)^6&=(\mathrm{H}\alpha)^4(\mathrm{H}'\beta)^4(\mathrm{H}\gamma)^2(\mathrm{H}'\gamma)^2-\tfrac{16}{11}(\mathrm{HH}')^2(\mathrm{H}\alpha)^4(\mathrm{H}'\chi)^4\\&\quad+\tfrac{3}{11}(\mathrm{HH}')^4(\mathrm{H}\alpha)^2(\mathrm{H}'\alpha)^2.\iota+\tfrac{18}{77}(\mathrm{HH}')^6.\eta\\&=(\mathrm{H}\alpha)^4(\mathrm{H}'\beta)^4(\mathrm{H}\gamma)^2(\mathrm{H}'\gamma)^2-(\tfrac{4}{7.25}\mathrm{I}_{41}+\tfrac{2}{15}\mathrm{I}'_{41})\iota-\tfrac{1}{7.25}\mathrm{A}\eta\end{aligned}$$

mette in vista l'altro $(\mathrm{H}\alpha)^4(\mathrm{H}'\beta)^4(\mathrm{H}\gamma)^2(\mathrm{H}'\gamma)^2$; e lo stesso

$$\begin{aligned}(\mathrm{H}^2,\varphi^3)_{12}=(t\alpha)^4(t\beta)^4(t\gamma)^4&=\tfrac{3}{77}(\mathrm{H}\alpha)^4(\mathrm{H}'\beta)^4(\mathrm{H}\gamma)^2(\mathrm{H}'\gamma)^2\\&\quad+\tfrac{8}{77}(\mathrm{H}\alpha)^4(\mathrm{H}\beta)(\mathrm{H}'\beta)^3(\mathrm{H}\gamma)(\mathrm{H}'\gamma)^3+\tfrac{48}{77}(\mathrm{H}\alpha)^3(\mathrm{H}\beta)^2(\mathrm{H}\gamma)(\mathrm{H}'\alpha)(\mathrm{H}'\beta)^2(\mathrm{H}'\gamma)^3\\&\quad+\tfrac{54}{77}(\mathrm{H}\alpha)^2(\mathrm{H}\beta)^2(\mathrm{H}\gamma)^2(\mathrm{H}'\alpha)^2(\mathrm{H}'\beta)^2(\mathrm{H}'\gamma)^2,\end{aligned}$$

ne mette in vista altri due; i quali però si esprimono linearmente mediante i precedenti, essendo

$$\begin{aligned}(\mathrm{H}\alpha)^3(\mathrm{H}\beta)(\mathrm{H}'\beta)^3(\mathrm{H}\gamma)(\mathrm{H}'\gamma)^3&=\tfrac{1}{2}(\mathrm{H}\alpha)^4(\mathrm{H}'\beta)^2(\mathrm{H}'\gamma)^2\,\big\{(\mathrm{H}\beta)^2(\mathrm{H}'\gamma)^2+(\mathrm{H}\gamma)^2(\mathrm{H}'\beta)^2-(\mathrm{HH}')^2(\beta\gamma)^2\big\}\\&=(\mathrm{H}\alpha)^4(\mathrm{H}'\beta)^4(\mathrm{H}\gamma)^2(\mathrm{H}'\gamma)^2-\tfrac{1}{2}(\mathrm{HH}')^2(\mathrm{H}\alpha)^4(\mathrm{H}'\chi)^4,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathrm{H}\alpha)^2(\mathrm{H}\beta)^2(\mathrm{H}\gamma)^2(\mathrm{H}'\alpha)^2(\mathrm{H}'\beta)^2(\mathrm{H}'\gamma)^2&=\tfrac{1}{4}\big\{(\mathrm{H}\alpha)^2(\mathrm{H}'\beta)^2+(\mathrm{H}\beta)^2(\mathrm{H}'\alpha)^2-(\mathrm{HH}')^2(\alpha\beta)^2\big\}^2(\mathrm{H}\gamma)^2(\mathrm{H}'\gamma)^2\\&=(\mathrm{H}\alpha)^4(\mathrm{H}'\beta)^4(\mathrm{H}\gamma)^2(\mathrm{H}'\gamma)^2-2(\mathrm{HH}')^2(\mathrm{H}\alpha)^2(\mathrm{H}'\alpha)^2(\mathrm{H}\beta)^2(\mathrm{H}'\gamma)^2(\beta\gamma)^2+\tfrac{1}{2}(\mathrm{HH}')^4(\mathrm{H}\alpha)^2(\mathrm{H}'\alpha)^2.\end{aligned}$$

Da ultimo l' invariante

$$(f^2 i, \varphi^3)_{12} = (a\omega)^5 (b\omega)^5 (i\omega)^2 = \tfrac{1}{3} (a\alpha)^4 (b\beta)^4 (a\gamma)(b\gamma)(i\gamma)^2$$
$$+ \tfrac{2}{9} (a\alpha)^4 (a\beta)(b\beta)^3 (b\gamma)^2 (i\gamma)^2 + \tfrac{4}{9} (a\alpha)^3 (b\beta)^3 (a\gamma)^2 (b\gamma)^2 (i\alpha)(i\beta) + \cdots$$

ci presenta altri invarianti.

Ciò posto, scegliamo fra gl' invarianti dianzi incontrati i seguenti cinque:

$$\mathrm{I}_{43} \equiv (a\alpha)^4 (b\beta)^4 (a\gamma)(b\gamma)(i\gamma)^2 , \quad \mathrm{I}'_{43} \equiv (\mathrm{H}\alpha)^4 (\mathrm{H}'\beta)^4 (\mathrm{H}\gamma)^2 (\mathrm{H}'\gamma)^2 ,$$
$$\mathrm{I}''_{43} \equiv (\mathrm{HH}')^2 (\mathrm{H}\alpha)^4 (\mathrm{H}'\chi)^4, \quad \mathrm{I}'''_{43} \equiv (\mathrm{H}\alpha)^4 (\mathrm{H}\chi)^2 (i\chi)^2, \quad \mathrm{I}^{\mathrm{IV}}_{43} \equiv (\mathrm{H}\chi)^4 (\mathrm{H}\alpha)^2 (i\alpha)^2 ;$$

e mostriamo che non può sussistere fra essi una relazione del tipo:

$$0 = \lambda \mathrm{I}_{43} + \lambda_1 \mathrm{I}'_{43} + \lambda_2 \mathrm{I}''_{43} + \lambda_3 \mathrm{I}'''_{43} + \lambda_4 \mathrm{I}^{\mathrm{IV}}_{43} + (\mu \mathrm{I}_{41} + \mu_1 \mathrm{I}'_{41}) \iota + \nu \mathrm{A} \eta .$$

Infatti, per $\varphi \equiv \alpha_4 x_2{}^4$ questa relazione darebbe $0 = \lambda a_0{}^2 i_0 + \lambda_1 \mathrm{H}_0{}^2$, onde $\lambda = 0$, $\lambda_1 = 0$. E per $\varphi \equiv 4\alpha_3 x_1 x_2{}^3$, onde $\mathrm{I}''_{43} = 8(\mathrm{H}_0\mathrm{H}_3 - \mathrm{H}_1\mathrm{H}_2)\alpha_3{}^3$, $\mathrm{I}'''_{43} = 8\mathrm{H}_1 i_0 \alpha_3{}^3$, $\mathrm{I}^{\mathrm{IV}}_{43} = 4(\mathrm{H}_1 i_0 + \mathrm{H}_0 i_1)\alpha_3{}^3$, darebbe

$$0 = 2\lambda_2 (\mathrm{H}_0\mathrm{H}_3 - \mathrm{H}_1\mathrm{H}_2) + (2\lambda_3 + \lambda_4)\mathrm{H}_1 i_0 + \lambda_4 \mathrm{H}_0 i_1 = (\tfrac{1}{5}\lambda_2 + 2\lambda_4) a_0{}^2 a_2 a_5$$
$$+ (-\tfrac{7}{5}\lambda_2 + 6\lambda_4) a_1{}^3 a_4 + (-\tfrac{4}{5}\lambda_2 + 4\lambda_3 + 2\lambda_4) a_0{}^2 a_3 a_4 - (\tfrac{2}{5}\lambda_2 + 2\lambda_4) a_0 a_1{}^2 a_5 + \cdots ,$$

onde $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = 0$.

Dunque: *vi sono cinque invarianti fondamentali dei gradi* 4 e 3, *e come tali è lecito assumere* I_{43}, I'_{43}, I''_{43}, I'''_{43}, $\mathrm{I}^{\mathrm{IV}}_{43}$.

Tutti gli altri invarianti dei gradi 4 e 3 saranno funzioni lineari di questi cinque, di $\mathrm{I}_{41}\iota$, $\mathrm{I}'_{41}\iota$ e di $\mathrm{A}\eta$.

Per esempio:

$$\tfrac{1}{2} \mathrm{DI}_{23} = (al)^2 (a\theta)^3 (l\theta)^3 = -\tfrac{3}{5} (m\theta)^6 = \tfrac{3}{10} (\mathrm{I}'''_{43} - \mathrm{I}^{\mathrm{IV}}_{43}) .$$

È bene altresì notare che non può sussistere neppure una relazione del tipo:

$$0 = (\mu \mathrm{I}_{41} + \mu_1 \mathrm{I}'_{41})\iota + \nu \mathrm{A}\eta ;$$

giacchè per $\eta = 0$ essa diviene $0 = \mu \mathrm{I}_{41} + \mu_1 \mathrm{I}'_{41}$, il che implica (§ IV) $\mu = 0$, $\mu_1 = 0$, e quindi anche $\nu = 0$.

VII.

$$(fj, \chi^2)_8 , \ (i\mathrm{H}, \chi^2)_8 , \ (fl, \varphi\theta)_{10} , \ (\mathrm{H}^2, \varphi^2\chi)_{12} , \ (f^2 i, \varphi^2\chi)_{12} , \ (f^2\mathrm{H}, \varphi^4)_{16} .$$

L'operazione Δ, eseguita sugl' invarianti dei gradi 4 e 3, fornisce invarianti dei gradi 4 e 4. Così (oltre le $\Delta.\Delta\eta = \tfrac{1}{2}\mathrm{A}\iota^2$, $\Delta.\mathrm{I}_{41}\iota = \mathrm{I}_{42}\iota + 2\mathrm{I}_{41}\eta$, $\Delta.\mathrm{I}'_{41}\iota = \mathrm{I}'_{42}\iota + 2\mathrm{I}'_{41}\eta$) si ha

$$\Delta \mathrm{I}_{43} = (a\alpha)^4 (b\beta)^4 (a\chi)(b\chi)(i\chi)^2 + 2(a\alpha)^4 (b\chi)^4 (a\beta)(b\beta)(i\beta)^2,$$
$$\Delta \mathrm{I}'_{43} = (\mathrm{H}\alpha)^4 (\mathrm{H}'\beta)^4 (\mathrm{H}\chi)^2 (\mathrm{H}'\chi)^2 + 2(\mathrm{H}\alpha)^4 (\mathrm{H}'\chi)^4 (\mathrm{H}\beta)^2 (\mathrm{H}'\beta)^2,$$
$$\Delta \mathrm{I}''_{43} = (\mathrm{HH}')^2 (\mathrm{H}\chi)^4 (\mathrm{H}'\chi')^4 + \tfrac{1}{3} (\mathrm{HH}')^2 (\mathrm{H}\alpha)^4 (\mathrm{H}'\beta)^4 . \iota ,$$
$$\Delta \mathrm{I}'''_{43} = \Delta \mathrm{I}^{\mathrm{IV}}_{43} = (\mathrm{H}\chi)^4 (\mathrm{H}\chi')^2 (i\chi')^2 + \tfrac{1}{3} \mathrm{I}''_{42} \iota ,$$

$$\varDelta(a\alpha)^4(a\chi)(j\chi)^3=\varDelta(a\chi)^4(a\alpha)(i\alpha)^3=(a\chi)^4(a\chi')(j\chi')^3+\tfrac{1}{3}\mathrm{I}''_{42}\iota\,,$$
$$\varDelta(\mathrm{H}\alpha)^3(\mathrm{H}\chi)^3(i\alpha)(i\chi)=(\mathrm{H}\chi)^3(\mathrm{H}\chi')^3(i\chi)(i\chi')+(-\tfrac{1}{6}\mathrm{I}'_{42}+\tfrac{1}{3}\mathrm{I}''_{42})\iota\,,$$
$$\varDelta(\mathrm{HH}')^2(\mathrm{H}\alpha)^2(\mathrm{H}\chi)^2(\mathrm{H}'\alpha)^2(\mathrm{H}'\chi)^2=(\mathrm{HH}')^2(\mathrm{H}\chi)^2(\mathrm{H}\chi')^2(\mathrm{H}'\chi)^2(\mathrm{H}'\chi')^2$$
$$+\tfrac{1}{3}(\mathrm{HH}')^2(\mathrm{H}\alpha)^2(\mathrm{H}\beta)^2(\mathrm{H}'\alpha)^2(\mathrm{H}'\beta)^2.\iota\,,$$
$$(fj,\chi^2)_8=\varDelta(fj,\varphi\chi)_8-\tfrac{1}{3}(fj,\varphi^2)_8.\iota\,,$$
$$(i\mathrm{H},\chi^2)_8=\varDelta(i\mathrm{H},\varphi\chi)_8-\tfrac{1}{3}(i\mathrm{H},\varphi^2)_8.\iota\,,$$
$$(\mathrm{H}^2,\varphi^2\chi)_{12}=\tfrac{1}{3}\varDelta(\mathrm{H}^2,\varphi^3)_{12}\,,$$
$$(f^2i,\varphi^2\chi)_{12}=\tfrac{1}{3}\varDelta(f^2i,\varphi^3)_{12}\,,\ \text{ecc. ecc.}$$

Inoltre

$$(fl,\varphi\theta)_{10}=\tfrac{1}{2}\mathrm{DI}_{24}=\tfrac{1}{2}(a\alpha)^4(a\theta)(l\theta)^5+\tfrac{1}{2}(l\alpha)^4(l\theta)(a\theta)^5=(a\alpha)^2(l\alpha)^2(a\theta)^3(l\theta)^3.$$

Da ultimo $(f^2\mathrm{H},\varphi^4)_{16}$ è lineare in $(a\alpha)^4(b\beta)^4(\mathrm{H}\gamma)^4(a\delta)(b\delta)(\mathrm{H}\delta)^2$ ed altri.

Ciò posto, fra gl' invarianti che si sono ora presentati scegliamo i seguenti sei:

$$\mathrm{I}_{44}\equiv(a\alpha)^4(b\beta)^4(a\chi)(b\chi)(i\chi)^2,\quad \mathrm{I}'_{44}\equiv(a\alpha)^4(b\beta)^4(\mathrm{H}\gamma)^4(a\delta)(b\delta)(\mathrm{H}\delta)^2,$$
$$\mathrm{I}''_{44}\equiv(\mathrm{H}\alpha)^4(\mathrm{H}'\beta)^4(\mathrm{H}\chi)^2(\mathrm{H}'\chi)^2,\quad \mathrm{I}'''_{44}\equiv(\mathrm{H}\chi)^4(\mathrm{H}\chi')^2(i\chi')^2,$$
$$\mathrm{I}^{\mathrm{IV}}_{44}\equiv(\mathrm{HH}')^2(\mathrm{H}\chi)^4(\mathrm{H}\chi')^4,\quad \mathrm{I}^{\mathrm{V}}_{44}\equiv(a\alpha)^2(l\alpha)^2(a\theta)^3(l\theta)^3\,;$$

e mostriamo che non può sussistere fra essi una relazione del tipo:

$$0=\lambda\mathrm{I}_{44}+\lambda_1\mathrm{I}'_{44}+\lambda_2\mathrm{I}''_{44}+\lambda_3\mathrm{I}'''_{44}+\lambda_4\mathrm{I}^{\mathrm{IV}}_{44}+\lambda_5\mathrm{I}^{\mathrm{V}}_{44}+(\mu\mathrm{I}_{42}+\mu_1\mathrm{I}'_{42}+\mu_2\mathrm{I}''_{42}+\mu_3\mathrm{I}'''_{42})\iota$$
$$+(\nu\mathrm{I}_{41}+\nu_1\mathrm{I}'_{41})\eta+\varrho\mathrm{A}\iota^2.$$

Infatti per $\varphi\equiv\alpha_4x_2^4$ si avrebbe $\lambda_1a_0^2\mathrm{H}_4^4=0$ onde $\lambda_1=0$. E per $\varphi\equiv4\alpha_3x_1x_3^3$, $\mathrm{I}_{44}=-32a_1^2i_0\alpha_2^4$, $\mathrm{I}''_{44}=-32\mathrm{H}_1^2\alpha_3^4$, $\mathrm{I}'''_{44}=4\mathrm{H}_0i_0\alpha_3^4$, $\mathrm{I}^{\mathrm{IV}}_{44}=8(\mathrm{H}_0\mathrm{H}_2-\mathrm{H}_1^2)\alpha_3^4$, $\mathrm{I}^{\mathrm{V}}_{44}=4(a_0l_1+a_1l_0)\alpha_3^4=\frac{4}{5}\{(4a_0a_2+5a_1^2)i_0-8a_0a_1i_1-a_0^2i_2\}\alpha_3^4$, si avrebbe

$$0=40\lambda_1a_1^2i_0+40\lambda_2\mathrm{H}_1^2-5\lambda_3i_0\mathrm{H}_0-10\lambda_4(\mathrm{H}_0\mathrm{H}_2-\mathrm{H}_1^2)-\lambda_5\{(4a_0a_2+5a_1^2)i_0-8a_0a_1i_1-a_0^2i_2\}$$
$$=10\lambda_5a_0^2a_1a_5+(40\lambda_2+10\lambda_4+6\lambda_5)a_0^2a_3^2-(20\lambda_3+8\lambda_4+16\lambda_5)a_0^2a_2a_4$$
$$+(-60\lambda_3+16\lambda_4-24\lambda_5)a_0a_2^3+(-320\lambda-80\lambda_3+8\lambda_4+40\lambda_5)a_0^2a_2a_4+\cdots,$$

onde $\lambda_5=0$, $\lambda_4=0$, $\lambda_3=0$, $\lambda_2=0$, $\lambda=0$.

Dunque: *vi sono sei invarianti fondamentali dei gradi* 4 *e* 4, *e come tali è lecito assumere* I_{44}, I'_{44}, I''_{44}, I'''_{44}, $\mathrm{I}^{\mathrm{IV}}_{44}$, $\mathrm{I}^{\mathrm{V}}_{44}$.

Tutti gli altri invarianti dei gradi 4 e 4 si potranno esprimere come funzioni lineari di questi sei, dei quattro $\mathrm{I}_{42}\iota,\ldots,\mathrm{I}'''_{42}\iota$, dei due $\mathrm{I}_{41}\eta$, $\mathrm{I}'_{41}\eta$, e di $\mathrm{A}\iota^2$.

Si noti che non può sussistere neanche una relazione del tipo:

$$0=(\mu\mathrm{I}_{42}+\mu_1\mathrm{I}'_{42}+\mu_2\mathrm{I}''_{42}+\mu_3\mathrm{I}'''_{42})\iota+(\nu\mathrm{I}_{41}+\nu_1\mathrm{I}'_{41})\eta+\varrho\mathrm{A}\iota^2\,;$$

giacchè per $\eta\equiv0$ essa diviene $0=\mu\mathrm{I}_{42}+\cdots+\varrho\mathrm{A}\iota$, onde (§ V) $\mu=0,\ldots,\ \varrho=0$; e per $\iota\equiv0$ diviene $0=\nu\mathrm{I}_{41}+\nu_1\mathrm{I}'_{41}$, onde $\nu=0$, $\nu_1=0$.

VIII.

$$(fl, \chi\theta)_{10}\,,\ (\mathrm{H}^2, \varphi\chi^2)_{12}\quad (f^2 i, \varphi\chi^2)_{12}\,,\ (f\mathrm{T}, \varphi^2\theta)_{14}\,,\ (f^2\mathrm{H}, \varphi^3\chi)_{16}\,,\ (f^4, \varphi^5)_{20}\,.$$

L'operazione $\varDelta$, eseguita sugl' invarianti dei gradi 4 e 4, fornisce invarianti dei gradi 4 e 5. Così (oltre a $\varDelta.\mathrm{A}\iota^2 = 4\mathrm{A}\iota\eta$, $\varDelta.\mathrm{I}_{41}\eta = \mathrm{I}_{42}\eta + \frac{1}{2}\mathrm{I}_{41}\iota^2$, $\varDelta.\mathrm{I}_{42}\iota = \frac{1}{3}\mathrm{I}_{41}\iota^2 + 2\mathrm{I}_{42}\eta, \ldots$) si ha

$$\varDelta\mathrm{I}_{44} = 2(a\alpha)^4 (b\chi)^4 (a\chi') (b\chi') (i\chi')^2 + \tfrac{1}{3}\mathrm{I}_{43}\iota\,,$$

$$\varDelta\mathrm{I}'_{44} = (a\alpha)^4 (b\beta)^4 (\mathrm{H}\gamma)^4 (a\chi) (b\chi) (\mathrm{H}\chi)^2 + (a\alpha)^4 (b\beta)^4 (\mathrm{H}\chi)^4 (a\gamma) (b\gamma) (\mathrm{H}\gamma)^2$$
$$+ 2(a\alpha)^4 (b\chi)^4 (\mathrm{H}\beta)^4 (a\gamma) (b\gamma) (\mathrm{H}\gamma)^2,$$

$$\varDelta\mathrm{I}''_{44} = 2(\mathrm{H}\alpha)^4 (\mathrm{H}'\chi)^4 (\mathrm{H}\chi')^2 (\mathrm{H}'\chi')^2 + \tfrac{1}{3}\mathrm{I}'_{43}\iota\,,$$

$$\varDelta\mathrm{I}'''_{44} = \tfrac{1}{3}(\mathrm{I}'''_{43} + \mathrm{I}^{\mathrm{IV}}_{43})\iota\,,$$

$$\varDelta\mathrm{I}^{\mathrm{IV}}_{44} = \tfrac{2}{3}\mathrm{I}''_{43}\,,$$

$$\varDelta\mathrm{I}^{\mathrm{V}}_{44} = (a\chi)^2 (l\chi)^2 (a\theta)^3 (l\theta)^3\,;$$

$$\varDelta(a\alpha)^4(b\chi)^4(a\beta)(b\beta)(i\beta)^2 = (a\chi)^4(b\chi')^4(a\alpha)(b\alpha)(i\alpha)^2 + (a\alpha)^4(b\chi)^4(a\chi')(b\chi')(i\chi')^2 + \tfrac{1}{3}\mathrm{I}_{43}\iota,$$

$$\varDelta(\mathrm{H}\alpha)^4(\mathrm{H}'\chi)^4(\mathrm{H}\beta)^2(\mathrm{H}'\beta)^2 = (\mathrm{H}\chi)^4(\mathrm{H}'\chi')^4(\mathrm{H}\alpha)^2(\mathrm{H}'\alpha)^2 + (\mathrm{H}\alpha)^4(\mathrm{H}'\chi)^4(\mathrm{H}\chi')^2(\mathrm{H}'\chi')^2 + \tfrac{1}{3}\mathrm{I}_{43}\iota,$$

$$\varDelta(a\alpha^4)(a\theta)(l\theta)^5 = (a\chi)^4 (a\theta) (l\theta)^5,$$

$$\varDelta (a\theta)^5 (l\theta) (l\alpha)^4 = (a\theta)^5 (l\theta) (l\chi)^4\,;$$

$$(fl, \chi\theta) = \varDelta(fl, \varphi\theta)_{10}\,,$$

$$(\mathrm{H}^2, \varphi\chi^2)_{12} = \tfrac{1}{2}\varDelta(\mathrm{H}^2, \varphi^2\chi)_{12} - \tfrac{1}{6}\iota.(\mathrm{H}^2, \varphi^3)_{12}\,,$$

$$(f^2 i, \varphi\chi^2)_{12} = \tfrac{1}{2}\varDelta(f^2 i, \varphi^2\chi)_{12} - \tfrac{1}{6}\iota.(f^2 i, \varphi^3)_{12}\,,$$

$$(f^2\mathrm{H}, \varphi^3\chi)_{16} = \tfrac{1}{4}\varDelta(f^2\mathrm{H}, \varphi^4)_{16}\,.$$

Inoltre $(f\mathrm{T}, \varphi^2\theta)_{14}$ è lineare in $(a\theta)^5(\mathrm{T}\theta)(\mathrm{T}\alpha)^4(\mathrm{T}\beta)^4$, $(a\alpha)^4(\alpha\beta)(\mathrm{T}\beta)^3(\mathrm{T}\theta)^6$ ed altri.

E $(f^4, \varphi^5)_{20}$ è lineare in $(a\alpha)^4 (b\beta)^4 (c\gamma)^4 (d\delta)^4 (a\varepsilon) (b\varepsilon) (c\varepsilon) (d\varepsilon)$ ed altri.

Ciò posto, fra gl' invarianti che ci si sono ora presentati scegliamo i seguenti sei:

$$\mathrm{I}_{45} \equiv (a\alpha)^4 (b\beta)^4 (c\gamma)^4 (d\delta)^4 (a\varepsilon) (b\varepsilon) (c\varepsilon) (d\varepsilon),\quad \mathrm{I}'_{45} \equiv (a\chi)^4 (b\chi')^4 (a\alpha) (b\alpha) (i\alpha)^2,$$

$$\mathrm{I}''_{45} \equiv (\mathrm{H}\alpha)^2 (\mathrm{H}'\alpha)^2 (\mathrm{H}\chi)^4 (\mathrm{H}'\chi')^4,\quad \mathrm{I}'''_{45} \equiv (a\alpha)^4 (b\beta)^4 (\mathrm{H}\gamma)^4 (a\chi) (b\chi) (\mathrm{H}\chi)^2,$$

$$\mathrm{I}^{\mathrm{IV}}_{45} \equiv (a\chi)^2 (l\chi)^2 (a\theta)^3 (l\theta)^3,\qquad \mathrm{I}^{\mathrm{V}}_{45} \equiv (a\theta)^5 (\mathrm{T}\theta) (\mathrm{T}\alpha)^4 (\mathrm{T}\beta)^4\,;$$

e mostriamo che non può sussistere fra essi una relazione del tipo:

$$0 = \lambda\,\mathrm{I}_{45} + \lambda_1\mathrm{I}'_{45} + \lambda_2\mathrm{I}''_{45} + \lambda_3\mathrm{I}'''_{45} + \lambda_4\mathrm{I}^{\mathrm{IV}}_{45} + \lambda_5\mathrm{I}^{\mathrm{V}}_{45} + (\mu\mathrm{I}_{43} + \mu_1\mathrm{I}'_{43} + \mu_2\mathrm{I}''_{43} + \mu_3\mathrm{I}'''_{43} + \mu_4\mathrm{I}^{\mathrm{IV}}_{13})\iota$$
$$+ (\nu\mathrm{I}_{42} + \nu_1\mathrm{I}'_{42} + \nu_2\mathrm{I}''_{42} + \nu_3\mathrm{I}'''_{42})\eta + (\varrho\mathrm{I}_{41} + \varrho_1\mathrm{I}'_{41})\iota^2 + \sigma\mathrm{A}\iota\eta\,.$$

Infatti essa per $\varphi \equiv \alpha_4 x_2{}^4$ darebbe $0 = \lambda a_0{}^4\alpha_4{}^5$, onde $\lambda = 0$. E per $\varphi \equiv 4\alpha_3 x_1 x_2{}^3$, $\mathrm{I}_{45} = -4^5 a_1{}^3 a_2\alpha_3{}^5$, $\mathrm{I}'_{45} = -8(a_0 a_1 i_0 + a_0{}^2 i_1)\alpha_3{}^5$, $\mathrm{I}''_{45} = -16\mathrm{H}_0\mathrm{H}_1\alpha_3{}^5$, $\mathrm{I}'''_{45} = 128 a_1{}^2\mathrm{H}_1\alpha_3{}^5$, $\mathrm{I}^{\mathrm{IV}}_{45} = 4a_0(a_1 i_0 - a_0 i_1)\alpha_3{}^5$, $\mathrm{I}^{\mathrm{V}}_{45} = -32 a_0\mathrm{T}_2\alpha_3{}^5$, darebbe

$$0 = (-2\lambda_1 + \lambda_4)\, a_0\, a_1\, i_0 - (2\lambda_1 + \lambda_4)\, a_0{}^2 i_1 - 4\lambda_2\,\mathrm{H}_0\mathrm{H}_1 + 32\lambda_3\, a_1{}^2\mathrm{H}_1 - 8\lambda_5\, a_0\mathrm{T}_2$$
$$= -8(\lambda_2 + 4\lambda_3)\, a_1{}^3 a_2 - (2\lambda_1 + \lambda_4 + \tfrac{2}{9}\lambda_5)\, a_0{}^3 a_5 + (2\lambda_1 + 5\lambda_4 - \tfrac{22}{9}\lambda_5)\, a_0{}^2 a_1 a_4$$
$$- 2(2\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_4 - \tfrac{34}{9}\lambda_5)\, a_0{}^2 a_2 a_3 + 8(2\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 - \lambda_4 - \tfrac{4}{9}\lambda_5)\, a_0 a_1{}^2 a_3$$
$$- 2(6\lambda_1 - 4\lambda_2 - 3\lambda_4 + \tfrac{2}{3}\lambda_5)\, a_5 a_1 a_2{}^2,$$ onde $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = 0$, $\lambda_5 = 0$.

Dunque: *vi sono sei invarianti fondamentali dei gradi* 4 *e* 5, *e come tali è lecito assumere* I_{45}, I'_{45}, I''_{45}, I'''_{45}, I^{IV}_{45}, I^{V}_{45}.

Si noti che non può sussistere neanche una relazione del tipo:

$$0 = (\mu I_{43} + \mu_1 I'_{43} + \mu_2 I''_{43} + \mu_3 I'''_{43} + \mu_4 I_{43}^{IV})\iota + (\nu I_{42} + \nu_1 I'_{42} + \nu_2 I''_{42} + \nu_3 I'''_{42})\eta$$
$$+ (\varrho I_{41} + \varrho_1 I'_{41})\iota^2 + \sigma A\iota\eta .$$

IX.

Riepilogando i risultati sinora ottenuti, *possiamo assumere come invarianti fondamentali di gradi non superiori a* 5 *e* 5 *i seguenti, oltre* A, ι, η:

$$I_{23} = (H, \theta)_6 = (\alpha\chi)(H\alpha)^3(H\chi)^3 = (ab)^2(\alpha\chi)(a\alpha)^3(b\chi)^3,$$
$$I_{23} = (f^2, \varphi\theta)_{10} = (a\alpha)^4(a\theta)(b\theta)^5 = (a\alpha)^2(b\alpha)^2(a\theta)^3(b\theta)^3,$$
$$I_{25} = (f^2, \chi\theta)_{10} = (a\chi)^4(a\theta)(b\theta)^5 = (a\chi)^2(b\chi)^2(a\theta)^3(b\theta)^3,$$
$$I_{41} = (i^2, \varphi)_4 = (i\alpha)^2(i'\alpha)^2 = (ab)^4(cd)^4(a\alpha)(b\alpha)(c\alpha)(d\alpha),$$
$$I'_{41} = (k, \varphi)_4 = (Hi)^2(H\alpha)^4,$$
$$I_{42} = (i^2, \chi)^2 = (i\chi)^2(i'\chi)^2 = (\alpha\beta)^2(i\alpha)^2(i'\beta)^2 - \tfrac{1}{3}A\iota,$$
$$I'_{42} = (k, \chi)_4 = (Hi)^2(H\chi)^4 = (Hi)^2(\alpha\beta)^2(H\alpha)^2(H\beta)^2,$$
$$I''_{42} = (a\alpha)^4(a\beta)(j\beta)^3 = -(ai)^2(a\alpha)^3(b\alpha)(b\beta)^4,$$
$$I'''_{42} = (H\alpha)^4(H\beta)^2(i\beta)^2,$$
$$I_{43} = (a\alpha)^4(b\beta)^4(a\gamma)(b\gamma)(i\gamma)^2,$$
$$I'_{43} = (H\alpha)^4(H'\beta)^4(H\gamma^2)(H'\gamma)^2,$$
$$I''_{43} = (HH')^2(H\alpha)^4(H'\chi)^4,$$
$$I'''_{43} = (H\alpha)^4(H\chi)^2(i\chi)^2,$$
$$I^{I}_{43} = (H\chi)^4(H\alpha)^2(i\alpha)^2,$$
$$I_{44} = (a\alpha)^4(b\beta)^4(a\chi)(b\chi)(i\chi)^2,$$
$$I'_{44} = (a\alpha)^4(b\beta)^4(H\gamma)^4(a\delta)(b\delta)(H\delta)^2,$$
$$I''_{44} = (H\alpha)^4(H'\beta)^4(H\chi)^2(H'\chi)^2,$$
$$I'''_{44} = (H\chi)^4(H\chi')^2(i\chi')^2,$$
$$I^{IV}_{44} = (HH')^2(H\chi)^4(H\chi')^4,$$
$$I^{V}_{44} = (a\alpha)^2(l\alpha)^2(a\theta)^3(l\theta)^3,$$
$$I_{45} = (a\alpha)^4(b\beta)^4(c\gamma)^4(d\delta)^4(a\varepsilon)(b\varepsilon)(c\varepsilon)(d\varepsilon),$$
$$I'_{45} = (a\chi)^4(b\chi')^4(a\alpha)(b\alpha)(i\alpha)^2,$$
$$I''_{45} = (H\alpha)^2(H'\alpha)^2(H\chi)^4(H'\chi')^4,$$
$$I'''_{45} = (a\alpha)^4(b\beta)^4(H\gamma)^4(a\chi)(b\chi)(H\chi)^2,$$
$$I^{IV}_{45} = (a\chi)^2(l\chi)^2(a\theta)^3(l\theta)^3,$$
$$I^{V}_{45} = (a\theta)^5(T\theta)(T\alpha)^4(T\beta)^4.$$

Registriamo qui alcuni altri invarianti di gradi non superiori a 5 e 5, dei quali sarebbe facile assegnare le espressioni mediante quelli che abbiamo scelti come fondamentali.

È dei gradi 4 e 1 l'invariante $(aT)^5(T\alpha)^4$, che è $= \frac{4}{35}I_{41} + \frac{83}{126}I'_{41}$, poichè si trova facilmente $(aT)^5 T_x{}^4 = \frac{4}{35}i^2 + \frac{83}{126}k$.

Sono dei gradi 4 e 2: l'invariante $(aT)^5(T\chi)^4 = \frac{4}{35}I_{42} + \frac{83}{126}I'_{42}$, e gli altri $(aT)^3(a\alpha)^2(T\alpha)^2(T\beta)^4$, $(aT)^3(T\alpha)^3(T\beta)^3(a\alpha)(a\beta)$.

Sono dei gradi 4 e 3: $(aT)^4 (a\theta) (T\theta)^5 = - \frac{13}{9.14} (m, \theta)_6 = - \frac{1}{2} I'''_{43} + \frac{1}{2} I^{IV}_{43}$ (poichè $(aT)^4 a_x T_x^5 = - \frac{13}{9.14} m$), $(aT)^3 (a\alpha)^2 (T\alpha)^2 (T\chi)^4$, $(aT)^3 (a\chi)^2 (T\chi)^2 (T\alpha)^4$, $(aT)^3 (T\alpha)^3 (T\chi)^3 (a\alpha) (a\chi)$, $(aT) (a\alpha)^4 (T\beta)^4 (T\gamma)^4$.

Sono dei gradi 4 e 4: $(aT)^3 (a\chi)^2 (T\chi)^2 (T\chi')^4$, $(aT)^3 (T\chi)^3 (T\chi')^3 (a\chi) (a\chi')$, $(aT)^2 (a\alpha)^3 (T\alpha) (T\theta)^6$, $(aT)^2 (a\theta)^3 (T\theta)^3 (T\alpha)^4$, $(aT) (a\alpha)^4 (T\beta)^4 (T\chi)^4$, $(aT) (a\chi)^4 (T\alpha)^4 (T\beta)^4$.

Sono dei gradi 4 e 5: $(aT)^2 (a\chi)^3 (T\chi) (T\theta)^6$, $(aT)^2 (a\theta)^3 (T\theta)^3 (T\chi)^4$, $(aT) (a\alpha)^4 (T\chi)^4 (T\chi')^4$, $(aT) (a\chi)^4 (T\alpha)^4 (T\chi')^4$.

X.

Fra le varie espressioni delle quali è capace il risultante di due forme binarie, la più importante è quella che lo rappresenta come funzione algebrica razionale e intera degl' invarianti fondamentali delle due forme, e che può dirsi *tipica*. In particolare: il risultante di una forma di 5° ordine $f \equiv a_x^5$ e di una di 4° ordine $\varphi \equiv \alpha_x^4$ è un invariante di quelle due forme, ed è dei gradi 4 e 5: esso è dunque funzione intera degl' invarianti dianzi considerati, ed è facile vedere che la sua espressione è del tipo seguente:

$$
\begin{aligned}
\text{Ris}\,(f, \varphi) = {} & (\lambda I_{45} + \lambda_1 I'_{45} + \lambda_2 I''_{45} + \lambda_3 I'''_{45} + \lambda_4 I^{IV}_{45} + \lambda_5 I^{V}_{45}) \\
& + (\mu I_{43} + \mu_1 I'_{43} + \mu_2 I''_{43} + \mu_3 I'''_{43} + \mu_4 I^{IV}_{43})\,\iota \\
& + (\nu I_{42} + \nu_1 I'_{42} + \nu_2 I''_{42} + \nu_3 I'''_{42})\,\eta \\
& + (\varrho I_{41} + \varrho_1 I'_{41})\,\iota^2 + \sigma A \iota \eta ,
\end{aligned} \tag{1}
$$

ove $\lambda, \ldots, \sigma$ sono 18 coefficienti numerici da determinarsi.

Per giungere a determinare $\lambda, \ldots, \sigma$ le vie non mancano, ma tutte riescono lunghe e faticose assai. Quella che presenta minori difficoltà consiste nel calcolare così il risultante come gl' invarianti che figurano nel 2° membro della (1) per particolari scelte di una delle due forme o di entrambe, e poi eguagliare i coefficienti dei termini simili rispetto ai coefficienti delle due forme nei due membri della (1); si hanno così dei gruppi di equazioni lineari in $\lambda, \ldots, \sigma$, dai quali si cercherà di ricavare tali coefficienti. Ed è questa la via che noi ora terremo.

1.° Per $\varphi \equiv \alpha_4 x_2^4$ la (1) diviene (cfr. V, ..., VIII) $a_0^4 \alpha_4^5 = \lambda a_0^4 \alpha_4^5$, e dà

$$\lambda = 1.$$

2.° Per $\varphi \equiv 4 \alpha_3 x_1 x_2^3$ la (1) diviene (cfr. IV, ..., VIII)

$$
\begin{aligned}
-4^5 a_0^3 a_5 \alpha_3^5 = {} & -4 (2\lambda_1 + \lambda_4 + \tfrac{2}{9} \lambda_5) a_0^3 a_5 \alpha_3^5 - 32 (\lambda_2 + 4\lambda_3) a_1^3 a_2 \alpha_3^5 \\
& + 4 (2\lambda_1 + 5\lambda_4 - \tfrac{22}{9} \lambda_5) a_0^2 a_1 a_4 \alpha_3^5 - 8 (2\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_4 - \tfrac{34}{9} \lambda_5) a_0^2 a_2 a_3 \alpha_3^5 \\
& + 64 (2\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 - \lambda_4 - \tfrac{4}{9} \lambda_5) a_0 a_1^2 a_3 \alpha_3^5 - 8 (6\lambda_1 - 4\lambda_2 - 3\lambda_4 + \tfrac{2}{3} \lambda_5) a_0 a_1 a_2^2 \alpha_3^5,
\end{aligned}
$$

e porge

$$\lambda_1 = \tfrac{32.23}{9}, \quad \lambda_2 = 16.7, \quad \lambda_3 = -4.9, \quad \lambda_4 = \tfrac{32.5}{3}, \quad \lambda_5 = 16.11.$$

3.° Per $\varphi = 6\alpha_2 x_1^2 x_2^2$ si ha

$$\chi = -6\alpha_2^2 x_1^2 x_2^2,\ \theta = 0,\ \iota = 6\alpha_2^2,\ \eta = -6\alpha_2^3,\ \mathrm{A} = 2(i_0 i_2 - i_1^2),$$

$$\mathrm{I}_{41} = 2(i_0 i_2 + 2i_1^2)\alpha_2,\ \mathrm{I}'_{41} = 6(\mathrm{H}_2 i_2 - 2\mathrm{H}_3 i_1 + \mathrm{H}_4 i_0)\alpha_2,\ \mathrm{I}_{42} = -2(i_0 i_2 + 2i_1^2)\alpha_2^2,$$

$$\mathrm{I}'_{42} = -(6\mathrm{H}_2 i_2 - 2\mathrm{H}_3 i_1 + \mathrm{H}_4 i_5)\alpha_2^2,\ \mathrm{I}''_{42} = 18(a_3 j_2 + a_3 j_1)\alpha_2^2,$$

$$\mathrm{I}'''_{42} = 6(\mathrm{H}_2 i_2 + 4\mathrm{H}_3 i_1 + \mathrm{H}_4 i_0)\alpha_2^2,\ \ \mathrm{I}_{43} = 6^2(a_2^2 i_2 + 4a_2 a_3 i_1 + a_3^2 i_0)\alpha_2^3,$$

$$\mathrm{I}'_{43} = 6^2.2(\mathrm{H}_2\mathrm{H}_4 + 2\mathrm{H}_3^2)\alpha_2^3,\ \ \mathrm{I}''_{43} = -6^2.2(\mathrm{H}_2\mathrm{H}_4 - \mathrm{H}_3^2)\alpha_2^3,$$

$$\mathrm{I}'''_{43} = -6(\mathrm{H}_2 i_2 + 4\mathrm{H}_3 i_1 + \mathrm{H}_4 i_0)\alpha_2^3,\ \ \mathrm{I}^{\mathrm{IV}}_{43} = -6(\mathrm{H}_2 i_2 + 4\mathrm{H}_3 i_1 + \mathrm{H}_4 i_0)\alpha_2^3,$$

$$\mathrm{I}_{45} = 6^5 a_2^2 a_3^3 \alpha_2^5,\ \mathrm{I}'_{45} = 6^2(a_2^2 i_2 + 4a_2 a_3 i_1 + a_3^2 i_0)\alpha_2^5,\ \mathrm{I}''_{45} = 6^2.2(\mathrm{H}_2\mathrm{H}_4 + 2\mathrm{H}_3^2)\alpha_2^5,$$

$$\mathrm{I}'''_{45} = -6^3(a_2^2\mathrm{H}_4 + 4a_2 a_3\mathrm{H}_3 + a_3^2\mathrm{H}_2)\alpha_2^5,\ \mathrm{I}^{\mathrm{IV}}_{45} = 0,\ \mathrm{I}^{\mathrm{V}}_{45} = 0,$$

$$\mathrm{Ris}\,(f, \varphi) = 6^5 a_0^2 a_5^2 \alpha_2^5;$$

quindi la (1) diviene

$$\begin{aligned}
6^3 a_0^2 a_5^2 &= 6^3 a_2^2 a_3^2 + \sigma_1(a_2^2 i_2 + 4a_2 a_3 i_1 + a_3^2 i_0) + 2\sigma_2\mathrm{H}_2\mathrm{H}_4 + 4\sigma_3\mathrm{H}_3^2 \\
&- \lambda_3(a_2^2\mathrm{H}_4 + 4a_2 a_3\mathrm{H}_3 + a_3^2\mathrm{H}_2) + \sigma_4(\mathrm{H}_2 i_2 + \mathrm{H}_4 i_0) + 2\sigma_5\mathrm{H}_3 i_1 \\
&+ 2\sigma_6 i_0 i_2 + 2\sigma_7 i_1^2 - 3\nu_2(a_2 j_2 + a_3 j_1) \\
&= 6^3 a_2^2 a_3^2 + \sigma'_1(a_1 a_2^2 a^5 - 4a_2^3 a_4 + 10a_2^2 a_3^2 + a_0 a_3^2 a_4 - 4a_1 a_3^3 + 2a_0 a_2 a_3 a_5 - 6a_1 a_2 a_3 a_4) \\
&+ \sigma'_2(a_0 a_1 a_4 a_5 + a_1^2 a_3 a_5 - 2a_1 a_2^2 a_5 + a_0 a_2 a_4^2 + a_1 a_2 a_3 a_4 - 2a_2^3 a_4 - 2a_0 a_3 a_4 - 2a_1 a_3^3 \\
&+ 4a_2^2 a_3^2) + \sigma'_3(a_0^2 a_5^2 + 14a_0 a_1 a_4 a_5 + 49a_1^2 a_4^2 - 16a_0 a_2 a_3 a_5 - 112a_1 a_2 a_3 a_4 \\
&+ 64a_2^2 a_3^3)^2 - \lambda'_3(a_1 a_2^2 a_5 + a_2^3 a_4 - 12a_2^2 a_3^2 + a_0 a_3^2 a_4 + a_1 a_3^3 + a_0 a_2 a_3 a_5 + 7a_1 a_2 a_3 a_4) \\
&+ \sigma'_4(2a_0 a_1 a_4 a_5 - 3a_1^2 a_3 a_5 + a_1 a_2^2 a_5 - 3a_0 a_2 a_4^2 - 8a_1 a_2 a_3 a_4 + 11a_2^3 a_4 + a_0 a_3^2 a_4 \\
&+ 11a_1 a_3^3 - 12a_2^2 a_3^2) + \sigma'_5(a_0^2 a_5^2 + 4a_0 a_1 a_4 a_5 - 6a_0 a_2 a_3 a_5 - 21a_1^2 a_4^2 + 38a_1 a_2 a_3 a_4 \\
&- 16a_2^2 a_3^2) + \sigma'_6(a_0 a_1 a_4 a_5 - 4a_1^2 a_3 a_5 + 3a_1 a_2^2 a_5 - 4a_0 a_2 a_4^2 + 16a_1 a_2 a_3 a_4 - 12a_2^2 a_4 \\
&+ 3a_0 a_3^2 a_4 - 12a_1 a_3^3 + 9a_2^2 a_3^2) + \sigma'_7(a_0^2 a_5^2 - 6a_0 a_1 a_4 a_5 + 9a_1^2 a_4^2 + 4a_0 a_2 a_3 a_5 \\
&- 12a_1 a_2 a_3 a_4 + 4a_2^2 a_3^2) + \nu'_2(a_1^2 a_3 a_5 + a_0 a_2 a_4^2 - 2a_1 a_2 a_3 a_4 - a_1 a_3^3 - a_2^3 a_4 - 2a_0 a_2 a_3 a_5 \\
&+ 2a_2^2 a_3^2 + a_0 a_3^2 a_4 + a_1 a_2^2 a_5),
\end{aligned}$$

dove si è posto prima

$$\sigma_1 = \lambda_1 + 6\mu,\ \sigma_2 = 6\mu_1 - 6\mu_2 + \lambda_2,\ \sigma_3 = 6\mu_1 + 3\mu_2 + \lambda_2,\ \sigma_4 = -\mu_3 - \mu_4 + \nu_1 - \nu_3 + 6\varrho_1,$$

$$\sigma_5 = -2\mu_3 - 2\mu_4 - \nu_1 - 2\nu_3 - 6\varrho_1,\ \sigma_6 = \tfrac{1}{6}\nu + \varrho - \sigma,\ \sigma_7 = \tfrac{1}{3}\nu + 2\varrho + \sigma,$$

e poi

$$\sigma'_1 = 2\sigma_2,\ \sigma'_2 = \tfrac{8}{25}\sigma_2,\ \sigma'_3 = \tfrac{1}{25}\sigma_3,\ \sigma'_4 = \tfrac{4}{5}\sigma_4,\ \sigma'_5 = \tfrac{1}{5}\sigma_5,\ \sigma'_6 = 8\sigma_6,$$

$$\sigma'_7 = 2\sigma_7,\ \lambda'_3 = \tfrac{12}{5}\lambda_3,\ \nu'_2 = 6\nu_2.$$

Quindi si ottengono, eguagliando i coefficienti, 9 equazioni in $\nu'_2, \sigma'_1, \ldots, \sigma'_7$; le quali però si riducono a 8 indipendenti e porgono

$$\lambda'_3 = \frac{16.27}{5}\text{(come già sapevasi da } \lambda_3 = -4.9),\ \sigma'_1 = \frac{16.27}{5},$$

$$\nu'_2 = \frac{50}{7}\sigma'_7 - \frac{4.81.13}{5},\ \sigma'_2 = \frac{48}{7}\sigma'_7 - \frac{16.27.41}{25},\ \sigma'_3 = -\frac{3}{7}\sigma'_7 + \frac{4.81}{5},$$

$$\sigma'_4 = \frac{22}{7}\sigma'_7 - \frac{4.27.7.11}{25},\ \sigma'_5 = -\frac{4}{7}\sigma'_7 + \frac{4.27.7}{5},\ \sigma'_6 = \frac{8}{7}\sigma'_7 - \frac{128.27}{25}.$$

Dalla $\sigma'_1 = 2\sigma_1 = 2\lambda_1 + 12\mu$ si trae $\mu = \dfrac{\sigma'_1 - 2\lambda_1}{12} = -\dfrac{4.7.31}{5.27}$.

E inoltre si ha

$$\mu_1 = \frac{\sigma_2 + 2\sigma_3 - 3\lambda_2}{18} = \frac{25(\sigma'_2 + 16\sigma'_3) - 24\lambda_2}{16.9} = \frac{-16.27.41 + 64.5.81 - 128.3.7}{16.9} = \frac{5.23}{3}.$$

Determineremo tra breve σ'_7; allora saranno noti anche $\nu'_2, \sigma'_2, \dots, \sigma'_6$, e da essi dedurremo

$$\mu_4 + \nu_2 + \nu_3 = -\frac{\sigma_4 + \sigma_5}{3} = \frac{5(\sigma'_4 + 4\sigma'_5)}{12}, \quad \mu_2 = \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{9} = \frac{25(8\sigma'_3 - \sigma'_2)}{8.9},$$

$$\nu_2 = \tfrac{1}{6}\nu'_2, \quad \tfrac{1}{6}\nu + \varrho = \frac{\sigma_6 + \sigma_7}{3} = \frac{\sigma'_6 + 4\sigma'_7}{8.3}, \quad \nu_1 + 6\varrho_1 = \frac{2\sigma_4 - \sigma_5}{3} = \frac{5(\sigma'_4 - 2\sigma'_5)}{6},$$

$$\sigma = \frac{\sigma_7 - 2\sigma_6}{3} = \frac{2\sigma'_7 - \sigma'_6}{12}.$$

4.° Per $\varphi \equiv \alpha_0 x_1^4 + \alpha_4 x_2^4$ si ha

$$\chi = 2\alpha_0\alpha_4 x_1^2 x_2^2, \quad \theta = \alpha_0\alpha_4 x_1 x_2 (\alpha_0 x_1^4 - \alpha_4 x_2^4), \quad \iota = 2\alpha_0\alpha_4, \quad \eta = 0,$$

$$\begin{aligned}
I_{41} &= i_0^2 \alpha_4 + i_2^2 \alpha_0, \quad I'_{41} = (H_0 i_2 - 2H_1 i_1 + H_2 i_0)\alpha_4 + (H_4 i_2 - 2H_5 i_1 + H_6 i_0)\alpha_0,\\
I_{43} &= a_0^2 i_0 \alpha_4^3 + (2a_0 a_4 i_0 + a_1^2 i_2)\alpha_4^2\alpha_0 + (2a_1 a_5 i_2 + a_4^2 i_0)\alpha_4\alpha_0^2 + a_5^2 i_2 \alpha_5^2,\\
I'_{43} &= H_0^2\alpha_4^3 + (2H_0 H_4 + H_2^2)\alpha_4^2\alpha_0 + (2H_6 H_2 + H_4^2)\alpha_4\alpha_0^2 + H_6^2\alpha_0^3,\\
I''_{43} &= 2(H_0 H_4 - 2H_1 H_3 + H_2^2)\alpha_4^2\alpha_0 + 2(H_6 H_2 - 2H_5 H_3 + H_4^2)\alpha_4\alpha_0^2,\\
I'''_{43} &= \tfrac{1}{3}(H_0 i_2 + 4H_1 i_1 + H_2 i_0)\alpha_4^2\alpha_0 + \tfrac{1}{3}(H_4 i_2 + 4H_5 i_1 + H_3 i_0)\alpha_4\alpha_0^2,\\
I^{IV}_{43} &= 2(H_2 i_0 \alpha_4^2\alpha_0 + H_4 i_2 \alpha_4 \alpha_0^2), \quad I_{45} = (a_0\alpha_4 + a_4\alpha_0)^4\alpha_4 + (a_1\alpha_5 + a_5\alpha_0)^4\alpha_0,\\
I'_{45} &= 4(a_2^2 i_0 \alpha_4^3\alpha_0^2 + a_4^2 i_2 \alpha_4^2\alpha_0^3), \quad I''_{45} = 4(H_2^2\alpha_4^3\alpha_0^2 + H_4^2\alpha_4^2\alpha_0^3),\\
I'''_{45} &= \tfrac{1}{3}(a_0^2 H_2 + 4a_0 a_1 H_1 + a_1^2 H_0)\alpha_4^4\alpha_0 + \tfrac{1}{3}(2a_0 a_4 H_2 + 4a_0 a_5 H_1 + 4a_1 a_4 H_1\\
&\qquad + 2a_1 a_5 H_0 + a_0^2 H_6 + 4a_0 a_1 H_5 + a_1^2 H_4)\alpha_4^3\alpha_0^2 + \cdots,\\
I^{IV}_{45} &= \tfrac{1}{6}(a_0 l_3 + 5a_1 l_2 + 5a_2 l_1 + a_3 l_0)\alpha_4^3\alpha_0^2 - \tfrac{1}{6}(a_5 l_2 + 5a_4 l_3 + 5a_3 l_4 + a_2 l_5)\alpha_4^2\alpha_0^2,\\
I^{V}_{45} &= \tfrac{1}{6}(a_0 T_1 + 5a_1 T_0)\alpha_4^4\alpha_0 + \tfrac{1}{6}(2a_0 T_5 + 10a_1 T_4 - 5a_4 T_1 - a_5 T_0)\alpha_4^3\alpha_0^2 - \cdots,\\
\mathrm{Ris}(f,\varphi) &= \{5(4a_0a_2 - 5a_1^2)\alpha_4^2 + 10(a_1 a_5 - 10a_2 a_4 + 10a_3^2)\alpha_4\alpha_0 - a_5^2\alpha_0^2\}^2\alpha_0\\
&\quad + \{5(4a_3 a_5 - 5a_4^2)\alpha_0^2 + 10(a_0 a_4 - 10a_1 a_3 + 10a_2^2)\alpha_4\alpha_0 - a_0^2\alpha_4^2\}^2\alpha_4.
\end{aligned}$$

Eguagliando i coefficienti dei termini simili contenenti $\alpha_4^4\alpha_0$, la (1) non dà nulla di nuovo, ma conferma i valori trovati di $\lambda, \dots, \lambda_5, \mu, \mu_1$. Eguagliando le parti contenenti $\alpha_4^3\alpha_0^2$, si ha

$$\begin{aligned}
&150a_0^2a_4^2 - 40a_0^2a_3a_5 + 10000a_2^4 - 2000a_0a_2^2a_4 + 4000a_0a_2a_3^2 + 5000a_1^2a_3^2\\
&- 500a_1^3a_5 + 400a_0a_1a_2a_5 + 5000a_1^2a_2a_4 - 2000a_0a_1a_3a_4 - 20000a_1a_2^2a_3\\
&= 2\lambda(3a_0^2a_4^2 + 2a_1^3a_5) + 8\lambda_1(a_0a_2^2a_4 - 4a_1a_2^2a_3 + 3a_2^4)\\
&+ \tfrac{2}{15}\lambda_3(-3a_0^2a_4^2 + 2a_0a_1a_3a_4 - 4a_0a_2^2a_4 + 15a_0^2a_3a_5 + 10a_0a_1a_2a_5 - 9a_1^2a_2a_4 - 9a_1^3a_5\\
&- 2a_1^2a_3^2)\\
&+ \tfrac{2}{15}\lambda_4(9a_0a_1a_3a_4 - 55a_1^2a_3^2 - 20a_1a_2^2a_3 - a_0^2a_3a_5 - 14a_0a_2a_3^2 - 9a_0a_1a_2a_5 + 29a_0a_2^2a_4\\
&+ 30a_2^4 + 35a_1^2a_2a_4 - 5a_1^3a_5 + a_0^2a_4^2)\\
&+ \tfrac{1}{27.7}\lambda_5(-34a_0^2a_3a_5 - 43a_0^2a_4^2 + 127a_0a_1a_2a_5 - 141a_0a_1a_3a_4 + 232a_0a_2^2a_4 - 8a_0a_2a_3^2\\
&- 23a_1^3a_5 - 40a_1^2a_2a_4 - 110a_1^2a_3^2 + 40a_1a_2^2a_3)\\
&+ \omega(a_0^2a_4^2 + 2a_0a_1a_3a_4 + a_1^2a_3^2 - 4a_0a_2^2a_4 - 4a_1a_2^2a_3 + 4a_2^4)\\
&+ 4\mu(2a_0^2a_4^2 - 8a_0a_1a_3a_4 + 6a_0a_2^2a_4 + a_1^3a_5 - 4a_1^2a_2a_4 + 3a_1^2a_3^2)\\
&+ \omega_1(a_0a_1a_2a_5 - a_1^3a_5 + a_0a_2^2a_4 - a_1^2a_2a_4 - 2a_0a_2a_3^2 + 2a_1^2a_3^2)\\
&+ \omega_2(a_0^2a_3a_5 - a_0a_1a_2a_5 + 7a_0a_1a_3a_4 - 7a_1^2a_2a_4 - 8a_0a_2a_3^2 + 8a_1a_2^2a_3)\\
&+ \omega_3(a_0a_1a_2a_5 - a_1^3a_5 - 4a_0a_2^2a_4 + 4a_1^2a_2a_4 + 3a_0a_2a_3^2 - 3a_1^2a_3^2)\\
&+ \omega_4(a_0^2a_3a_5 - a_0a_1a_2a_5 - 3a_0a_1a_3a_4 + 3a_1^2a_2a_4 + 2a_0a_2a_3^2 - 2a_1a_2^2a_3)\\
&+ \omega_5(a_0^2a_4^2 - 3a_0a_1a_3a_4 - 4a_1^2a_3^2 + a_0a_2^2a_4 + 11a_1a_2^2a_3 - 6a_2^4)\\
&+ \omega_6(a_0^2a_4^2 - 8a_0a_1a_3a_4 + 16a_1^2a_3^2 + 6a_0a_2^2a_4 - 24a_1a_2^2a_3 + 9a_2^4),
\end{aligned}$$

dove si è posto per brevità:

$$\omega = \tfrac{8}{25}(2\lambda_2 + \mu_1 + 2\mu_2),\quad \omega_1 = \tfrac{16}{5}(\mu_1 + \mu_2),\quad \omega_2 = -\tfrac{4}{5}\mu_2,\quad \omega_3 = 8(\tfrac{1}{3}\mu_3 + 2\varrho_1),$$

$$\omega_4 = 8(\tfrac{1}{3}\mu_3 - \varrho_1),\quad \omega_5 = \tfrac{8}{5}(\tfrac{1}{3}\mu_3 + 2\mu_4 + 2\varrho_1),\quad \omega_6 = 16\varrho.$$

Eguagliando i coefficienti dei termini simili si ottengono 10 equazioni lineari in $\omega, \ldots, \omega_6$, le quali però si riducono a 7 indipendenti: esse porgono

$$\omega = -\frac{8.33641}{9.25.7},\quad \omega_1 = -\frac{16.22669}{9.5.7},\quad \omega_2 = \frac{16.6271}{9.5.7},\quad \omega_3 = \frac{32.15907}{9.5.7},$$

$$\omega_4 = -\frac{16.14633}{27.5.7},\quad \omega_5 = -\frac{32.49651}{27.25.7},\quad \omega_6 = \frac{16.212951}{27.5.7};$$

e in conseguenza

$$\mu_2 = -\frac{5}{4}\omega_2 = -\frac{4.6271}{9.7},\quad \mu_3 = \frac{\omega_3 + 2\omega_4}{8} = \frac{2^8.11.47}{9.5.7},\quad \mu_4 = \frac{5\omega_5 - \omega_3}{16} = -\frac{8.11.2213}{27.5.7},$$

$$\varrho = \frac{1}{16}\omega_6 = \frac{61.3491}{27.25.7},\quad \varrho_1 = \frac{\omega_3 - \omega_4}{24} = \frac{2.5.17.37}{81}.$$

Ora possiamo trovare σ'_7 mediante la equazione $\mu_2 = \dfrac{25(8\sigma'_3 - \sigma'_2)}{8.9}$, in cui μ_2 è noto; e ricaviamo $\sigma'_7 = \dfrac{2.25961}{9.25}$.

Indi calcoleremo $\nu'_2, \sigma'_2, \ldots \sigma'_6$; e da ultimo dedurremo

$$\nu = \frac{\sigma'_6 + 4\sigma'_7}{4} - 6\varrho = -\frac{4.3259}{9.25.7},\quad \nu_1 = \frac{5(\sigma'_4 - 2\sigma'_5)}{6} - 6\varrho_1 = -\frac{4.13^2.239}{27.5.7},$$

$$\nu_2 = \frac{1}{6}\nu'_2 = \frac{4.31733}{27.5.7},\quad \nu_3 = \frac{5(\sigma'_4 + 4\sigma'_5)}{12} - \mu_4 - \nu_2 = -\frac{2.13.167}{5.7},$$

$$\sigma = \frac{2\sigma'_7 - \sigma'_6}{12} = \frac{8821}{9.5.7}.$$

Concludiamo che *il risultante della forma di 5° ordine f e della forma di 4° ordine φ, espresso mediante i loro invarianti fondamentali, è*:

$$\left(\mathrm{I}_{45} + \frac{23.32}{9}\mathrm{I}'_{45} + 16.7\,\mathrm{I}''_{45} - 4.9\,\mathrm{I}'''_{45} + \frac{32.5}{3}\mathrm{I}^{\mathrm{IV}}_{45} + 16.11\,\mathrm{I}^{\mathrm{V}}_{45}\right)$$

$$+\left(-\frac{4.7.31}{27.5}\mathrm{I}_{43} + \frac{5.23}{3}\mathrm{I}'_{43} - \frac{4.6271}{9.7}\mathrm{I}''_{43} + \frac{2^8.11.47}{9.5.7}\mathrm{I}'''_{43}\right)\iota$$

$$+\left(-\frac{4.3259}{9.25.7}\mathrm{I}_{42} - \frac{4.13^2.239}{27.5.7}\mathrm{I}'_{42} + \frac{4.31733}{27.5.7}\mathrm{I}''_{42} - \frac{3.13.167}{5.7}\mathrm{I}'''_{42}\right)\eta$$

$$+\left(\frac{61.3491}{27.25.7}\mathrm{I}_{41} + \frac{2.5.17.37}{81}\mathrm{I}'_{41}\right)\iota^2$$

$$+\frac{8821}{9.5.7}\mathrm{A}\iota\eta.$$

XI.

Un altro procedimento per calcolare il risultante è quello indicato dal Gordan (Math. Ann. Bd. III). Egli ha dimostrato che, chiamando $\varrho, \sigma, \tau, \omega$ le spinte 1ª, 2ª, 3ª, 4ª di f su φ, se si forma il covariante (di ordine 6 e dei gradi 2 e 2)

$$A \equiv 8(\varrho,\varrho)_4 + \frac{18}{7}(\varrho,\sigma)_3 + \frac{4}{5}(\varrho,\tau)_2 + \frac{4}{15}(\varrho,\omega)_1 - \frac{3}{49}(\sigma,\sigma)_2 + \frac{3}{35}(\sigma,\tau) + \frac{4}{35}\sigma.\omega - \frac{2}{75}\tau^2$$

e il covariante (di ordine 2 e dei gradi 2 e 2)

$$B \equiv 16(\varrho,\varrho)_6 + \frac{12}{7}(\varrho,\sigma)_5 + \frac{33}{2.49}(\sigma,\sigma)_4 + \frac{1}{5}(\sigma,\tau)_3 + \frac{2}{25}(\tau,\tau)_2 + \frac{2}{15}(\tau,\omega)_1 + \frac{4}{45}\omega^2,$$

e poscia il covariante (di ordine 4 e dei gradi 4 e 4)

$$\Gamma \equiv (A,A)_4 - \frac{1}{5}(A,B)_2 - \frac{1}{25}B^2,$$

si otterrà

$$\text{Ris}\,(f,\varphi) = 4\,(\Gamma,\varphi)_4\,.$$

Ma i calcoli occorrenti per formare i covarianti A,B,Γ, e per dedurne il risultante, sono assai faticosi; d'altronde essi non conducono direttamente alla espressione del risultante in funzione degl' invarianti fondamentali. Perciò noi ci asterremo dall'eseguirli.

Tuttavia vogliamo determinare i covarianti fondamentali di ordine 2 e dei gradi 2 e 2, mediante i quali potrebbe esprimersi B; come pure i covarianti fondamentali di ordine 4 e dei gradi 2 e 2, mediante i quali potrebbe esprimersi A; il che agevolerebbe alquanto i calcoli.

È facile assicurarsi che i covarianti fondamentali di 2° ordine e dei gradi 2 e 2 son dati da spinte di i, H. f^2 su χ, φ^2; e che fra tali spinte quelle che non appariscono decomponibili sono

$$(i,\chi)_2 = (i\chi)^2\chi_x^2,\quad (\mathrm{H},\chi)_4 = (\mathrm{H}\chi)^4\mathrm{H}_x^2,\quad (\mathrm{H},\varphi^2)\,;$$

alla terza delle quali può sostituirsi $(\mathrm{H}\alpha)^4(\mathrm{H}\beta)^2\beta_x^2$.

Così siam ridotti a indagare se esistano relazioni del tipo:

$$\lambda(i\chi)^2\chi_x^2 + \lambda_1(\mathrm{H}\chi)^4\mathrm{H}_x^2 + \lambda_2(\mathrm{H}\alpha)^4(\mathrm{H}\beta)^2\beta_x^2 + \mu i i + \nu\omega^2 = 0\,.$$

Ma questa relazione per $\varphi \equiv \alpha_4 x_2^4$ darebbe $\lambda_2\mathrm{H}_0 x_2^2 + \nu(a_0x_1 + a_1x_2)^2 = 0$, onde $\lambda_2 = 0$, $\nu = 0$; e quindi per $\varphi \equiv 4\alpha_3x_1x_2^2$ darebbe $\lambda i_0 x_2^2 + (\mathrm{H}_0x_1^2 + 2\mathrm{H}_1x_1x_2 + \mathrm{H}_2x_2^2) = 0$, onde $\lambda = 0$, $\lambda_1 = 0$, ed anche $\mu = 0$.

Dunque: *come covarianti fondamentali di 2° ordine e dei gradi* 2 *e* 2 *si possono assumere* $(i\chi)^2\chi_x^2$, $(\mathrm{H}\chi)^4\mathrm{H}_x^2$, $(\mathrm{H}\alpha)^4(\mathrm{H}\beta)^2\beta_x^2$.

Quanto ai covarianti fondamentali di 6° ordine e dei gradi 2 e 2, anche essi son dati da spinte di i, H, f^2 su χ, φ^2. L'unica fra queste spinte che non apparisca decomponibile è $(\mathrm{H},\chi)_2 = (\mathrm{H}\chi)^2\mathrm{H}_x^4\chi_x^2$; e però siamo ridotti a indagare se non sussista una relazione del tipo:

$$\lambda\,(\mathrm{H},\chi)_2 + \mu f(f,\chi)_4 + \mu_1\varphi\,(i,\varphi)_2 + \mu_2\varphi\,(\mathrm{H},\varphi)_4 + \nu i\chi + \nu_1\mathrm{H}\iota + \varkappa\sigma\omega + \varkappa_1\tau^2 = 0.$$

Ma per $\varphi \equiv \alpha_4 x_2^4$ questa relazione darebbe $\varkappa + \varkappa_1 = 0$, $2\mu_2 + \varkappa = 0$, $10\mu_1 - \varkappa = 0$; e per $\varphi \equiv 4\alpha_3x_1x_2^3$ darebbe $2\lambda + 10\mu + 4\varkappa - 7\varkappa_1 = 0$, $2\lambda - 5\mu - 8\varkappa + \frac{25}{2}\varkappa_1 = 0$, $2\mu - \varkappa_1 = 0$, $6\mu + 4\varkappa + 5\varkappa_1 = 0$; onde segue che tutti i coefficienti $\lambda, \dots, \varkappa_1$ sono nulli.

Dunque: *di covarianti fondamentali di 6° ordine e dei gradi* 2 *e* 2 *ve ne ha uno solo, e come tale può assumersi* $(\mathrm{H},\chi)_2 = (\mathrm{H}\chi)^2\mathrm{H}_x^4\chi_x^2$.

INDICE DEL VOL. IV — SERIE 4ª

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Padova. *Sulle espressioni invariabili* . . . . Pag. 4
Fusari. *Intorno alla fina anatomia dell'Encefalo dei Teleostei* (Con tre tavole). » 19
Schlaefli. *Verbesserungen und Zusätze zu den Bemerkungen über die Laméschen Functionen.* (*Collectanea mathematica in Memoriam D.* CHELINI *p. 277*). . . . . » 37
Grimaldi. *Sulla resistenza elettrica delle amalgame di sodio e di potassio* (Con due tavole). . . . . » 46
Artini. *Natrolite della Regione Veneta*. . . . . » 76
Id. *Contribuzioni alla Mineralogia del Vicentino* (Con una tavola). . . . » 90
Struever. *Ulteriori osservazioni sui giacimenti minerali di Val d'Ala in Piemonte.* — I. *L'idocrasio del banco di granato nel serpentino della Testa Ciarva al piano della Mussa* (Con una tavola). . . . . » 101
Gerosa. *Sulla resistenza elettrica dei miscugli delle amalgame liquide e sulle costanti fisiche dei miscugli di liquidi isomeri* (Con una tavola). . . » 118
Gerosa e Mai. *Ricerca sul massimo di densità dei miscugli delle soluzioni saline corrispondenti, preceduta da una verifica del valor massimo di densità dell'acqua distillata* (Con una tavola). . . . . » 134
Moriggia. *Osservazioni e note sperimentali sulle mummie di Ferentillo.* . » 153
Aschieri. *Sulla curva normale di uno spazio a quattro dimensioni*. . . » 172
Bordiga. *La superficie del 6º ordine, con dieci rette, nello spazio R_4; e le sue proiezioni nello spazio ordinario*. . . . . » 182
Battelli. *Sulla resistenza elettrica delle amalgame*. . . . . » 206
Bianchi. *Sui sistemi di Weingarten negli spazî di curvatura costante*. . » 221
Lazzeri. *Sopra i sistemi lineari di connessi quaternarî (1, 1)*. . . . . » 259
Ciamician. *Il pirrolo e i suoi derivati*. . . . . » 274
Artini. *Epidoto dell'Elba* (Con una tavola). . . . . » 380
Ascoli. *Ricerche sperimentali sopra alcune relazioni tra l'elasticità e la resistenza elettrica dei metalli* (Con una tavola). . . . . » 406
Righi. *Sulla conducibilità calorifica del bismuto posto in un campo magnetico*. » 433
Sella. *Sulla Sellaite e sui minerali che l'accompagnano* (Con una tavola). . » 455
Scacchi. *Studio cristallografico dei fluossimolibdati d'ammonio. Dimolibdato di ammonio* (Con una tavola). . . . . » 473

Mauro. *Nuove ricerche sui fluossimolibdati ammonici. Dimolibdato ammonico* Pag. 481
Scacchi. *Studio cristallografico dei fluossiipomolibdati. Fluossiipomolibdati di potassio e di ammonio* (Con una tavola) . . . . » 489
Bianchi. *Sulle superficie d'area minima negli spazi a curvatura costante.* » 503
Aducco. *Esperienze sopra l'azione fisiologica delle basi tossiche dell'orina normale* (Con due tavole). . . . . » 521
Grassi. *Anatomia comparata dei Tisanuri e considerazioni generali sull'organizzazione degli insetti* (Con cinque tavole). . . . . » 543
D'Ovidio. *Sopra alcuni invarianti simultanei di due forme binarie degli ordini 5 e 4, e sul risultante di esse.* . . . . » 607

ERRATA-CORRIGE

A pag. 60 nella colonna 7ª linea 2ª *invece di:* 15,0; *leggi:* 51,0

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.
Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª Transunti.
2ª Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.
Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XIII.
Serie 4ª — Rendiconti Vol. I, II. (1884-86).
» Vol. III. (1887).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-IV.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-III. V.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume è per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

Ermanno Loescher & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
Ulrico Hoepli. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES
3 9088 01354 6460